

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра общих проблем управления

КУРСОВАЯ РАБОТА

**"Оптимальное восстановление решений задачи Дирихле в круге
по значениям оператора радиального интегрирования"**

**"Optimal recovery of solutions to the Dirichlet problem in a disk
from the values of the radial integration operator"**

Выполнил студент 3 курса 311 группы
Воронов А.А.

Научный руководитель
профессор Осипенко К.Ю.

Москва 2026

Оптимальное восстановление решений задачи Дирихле в круге по значениям оператора радиального интегрирования

Задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге является классическим примером эллиптической краевой задачи, для которой решение может быть явно записано через коэффициенты ряда Фурье граничной функции. Во многих прикладных задачах (например, в медицинской томографии, геофизике, тепловидении) граничные условия известны не полностью или с погрешностью, а доступная информация может быть связана с решением интегральным оператором. Это приводит к необходимости разработки методов приближённого восстановления решения по неточным и неполным данным о значениях соответствующего интегрального оператора.

В данной работе рассматривается задача оптимального восстановления решения задачи Дирихле в единичном круге по значениям оператора радиального интегрирования. Оператор $Ku(\theta) = \int_0^1 u(\rho, \theta) d\rho$ усредняет гармоническую функцию вдоль радиуса; предполагается, что вместо точного значения Ku известна функция $g \in L_2(\mathbb{T})$ с погрешностью $\|Ku - g\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta$. Требуется построить метод $m(g)$, минимизирующий максимальную ошибку восстановления в $L_2(B_2)$ на классе граничных функций из соболевского шара W_2^r .

Теория оптимального восстановления функций и их производных по неточным данным подробно изложена в монографии [1]. Для гармонических функций задачи оптимального восстановления по значениям на границе или по интегральным операторам рассматривались в работах [2,3]. В частности, в [3] исследована задача восстановления решения задачи Дирихле по неточным исходным данным. Общие подходы к оптимальному восстановлению по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью, развиты в [4,5].

Целью настоящей работы является получение точных оценок погрешности оптимального восстановления и построение оптимальных методов для рассматриваемой задачи.

Перейдём к описанию основных объектов и формулировке рассматриваемой задачи.

Рассмотрим отрезок

$$\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$$

с отождествлёнными концами. Определим пространство Соболева

$$\mathcal{W}_2^r = \{f : f^{(r-1)} \text{ абсолютно непрерывна на } \mathbb{T}, f^{(r)} \in L_2(\mathbb{T})\},$$

а норма в $L_2(\mathbb{T})$ задаётся как

$$\|g\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(\theta)|^2 d\theta \right)^{1/2}.$$

Положим

$$W_2^r = \{f \in \mathcal{W}_2^r : \|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1\}.$$

Пусть

$$B_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

— единичный круг. Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & (x, y) \in B_2, \\ u(\cos \theta, \sin \theta) = f(\theta), & \theta \in \mathbb{T}, \end{cases} \quad (1)$$

где $f \in W_2^r$ — граничная функция. Хорошо известно, что решение u может быть записано в полярных координатах (ρ, θ) ($0 \leq \rho < 1$, $\theta \in \mathbb{T}$) в виде ряда

$$u(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n [a_n(f) \cos n\theta + b_n(f) \sin n\theta], \quad (2)$$

где коэффициенты граничной функции f определяются равенствами

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) d\theta, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta, \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta.$$

Рассмотрим оператор радиального интегрирования K , действующий на решения задачи Дирихле. Для каждого фиксированного угла $\theta \in \mathbb{T}$ он усредняет функцию u вдоль радиуса от 0 до 1:

$$Ku(\theta) = \int_0^1 u(\rho, \theta) d\rho, \quad \theta \in \mathbb{T}. \quad (3)$$

Предположим, что для любой функции u , являющейся решением задачи Дирихле (1) с граничной функцией $f \in W_2^r$, значение оператора Ku известно нам с некоторой погрешностью. Это означает, что вместо точного значения Ku нам доступна функция $g \in L_2(\mathbb{T})$ такая, что выполняется условие

$$\|Ku - g\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta. \quad (4)$$

Зная такую функцию g (неточный результат радиального интегрирования), мы хотим наилучшим образом восстановить само решение u во всём круге B_2 .

Рассмотрим всевозможные методы восстановления — произвольные отображения

$$m : L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(B_2),$$

которые по полученной (неточной) функции g строят приближённое решение $m(g) \in L_2(B_2)$. Для каждого метода m определим величину, называемую погрешностью метода:

$$e(W_2^r, K, \delta, m) = \sup \left\{ \|u - m(g)\|_{L_2(B_2)} : \begin{array}{l} u - \text{решение задачи (1) с } f \in W_2^r, \\ g \in L_2(\mathbb{T}), \|Ku - g\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \delta \end{array} \right\}. \quad (5)$$

Оптимальным называется метод, который имеет наименьшую возможную погрешность, то есть тот, на котором достигается погрешность оптимального восстановления:

$$E(W_2^r, K, \delta) = \inf_{m: L_2(\mathbb{T}) \rightarrow L_2(B_2)} e(W_2^r, K, \delta, m). \quad (6)$$

Определим:

$$\|u\|_{L_2(B_2)} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{B_2} |u(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

В полярных координатах (ρ, θ) , где $dx dy = \rho d\rho d\theta$, получаем:

$$\|u\|_{L_2(B_2)}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |u(\rho, \theta)|^2 \rho d\theta d\rho.$$

Подставляя ряд (2) и используя ортогональность тригонометрической системы, находим:

$$\int_0^{2\pi} |u(\rho, \theta)|^2 d\theta = \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \rho^{2n}.$$

Интегрируя по ρ :

$$\int_{B_2} |u|^2 dx dy = \int_0^1 \left(\frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \rho^{2n} \right) \rho d\rho = \frac{\pi a_0^2}{4} + \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2n+2}.$$

Деля на π , получаем:

$$\|u\|_{L_2(B_2)}^2 = \frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2n+2}.$$

Введём для удобства следующие обозначения для коэффициентов Фурье граничной функции f :

$$c_0 = \frac{a_0^2}{2}, \quad c_n = a_n^2 + b_n^2, \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$\frac{a_0^2}{4} = \frac{c_0}{2}, \quad \frac{a_n^2 + b_n^2}{2n+2} = \frac{c_n}{2n+2}.$$

Следовательно,

$$\|u\|_{L_2(B_2)}^2 = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2n+2}. \quad (7)$$

Далее, норма старшей производной:

$$\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |f^{(r)}(\theta)|^2 d\theta = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} (a_n^2 + b_n^2) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} c_n. \quad (8)$$

Норма оператора K :

$$\|Ku\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{T}} |Ku(\theta)|^2 d\theta = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{(n+1)^2}.$$

В терминах c_n :

$$\|Ku\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)^2}. \quad (9)$$

Лемма 1. Для любого метода t выполнено:

$$e(W_2^r, K, \delta, m) \geq \sup_{\substack{f \in W_2^r \\ \|Ku\| \leq \delta}} \|u\|_{L_2(B_2)}.$$

Доказательство. Возьмём любую функцию $f \in W_2^r$ с $\|f^{(r)}\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$ и $\|Ku\| \leq \delta$. Положим $g = 0$. Проверим выполнение условия (4):

$$\|Ku - g\| = \|Ku - 0\| = \|Ku\| \leq \delta,$$

$$\|K(-u) - g\| = \|-Ku - 0\| = \|Ku\| \leq \delta.$$

Таким образом, для функций u и $-u$ условие (4) выполнено. Следовательно, при данных $g = 0$ метод t даёт ошибки $\|m(0) - u\|$ для u и $\|m(0) + u\|$ для $-u$. По определению погрешности метода,

$$e \geq \max(\|m(0) - u\|, \|m(0) + u\|).$$

По неравенству треугольника,

$$\|m(0) - u\| + \|m(0) + u\| \geq 2\|u\|,$$

откуда максимум не меньше $\|u\|$. Таким образом, $e \geq \|u\|$. Взятие супремума по всем таким u даёт утверждение леммы. \square

Из леммы и выражений (7)–(9) получаем:

$$E(W_2^r, K, \delta) \geq \sup_{\substack{\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} c_n \leq 1 \\ \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)^2} \leq \delta^2}} \sqrt{\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2(n+1)}}. \quad (10)$$

Теорема 1. Пусть $r > 0$. Для $n = 1, 2, 3, \dots$ определим

$$\delta_n = \frac{1}{n^r(n+1)}.$$

Предположим, что

$$\delta \in [\delta_{n+1}, \delta_n)$$

для некоторого $n \geq 1$ (при $n = 0$ считаем $\delta_0 = \infty$).

Положим

$$\lambda_1 = \frac{(n+1)^{2r+1}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2(n+2)}{2((n+1)^{2r}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2)},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2((n+1)^{2r}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2)}.$$

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(W_2^r, K, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2}. \quad (11)$$

Оптимальный метод имеет вид

$$m(g)(\rho, \theta) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \rho^n a_n(g) \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \rho^n b_n(g) \sin(n\theta), \quad (12)$$

где коэффициенты α_n, β_n выбраны так, что для всех $n \geq 1$ выполняется

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{2n+2} \left(\frac{\alpha_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n+1-\alpha_n)^2}{\lambda_2 n^{2r}(n+1)^2} \right) \leq 1,$$

$$\sup_{n \geq 1} \frac{1}{2n+2} \left(\frac{\beta_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n+1-\beta_n)^2}{\lambda_2 n^{2r}(n+1)^2} \right) \leq 1.$$

Доказательство.

$$\|Ku\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{(n+1)^2}.$$

$$E(W_2^r, K, \delta) \geq \sup_{\substack{\sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} c_n \leq 1 \\ c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)^2} \leq \delta^2}} \sqrt{\frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{2(n+1)}}.$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{2(n+1)} \rightarrow \max, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(n+1)^2} \leq \delta^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} c_n \leq 1. \quad (13)$$

Сделаем замену переменных

$$d_n = \frac{c_n}{(n+1)^2}, \quad n \geq 0.$$

Тогда экстремальная задача (13) переписется в виде

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2} d_n \rightarrow \max, \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_n \leq \delta^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} (n+1)^2 d_n \leq 1. \quad (14)$$

На плоскости (x, y) рассмотрим точки

$$\begin{cases} x_n = n^{2r} (n+1)^2, \\ y_n = \frac{n+1}{2}, \quad n \geq 0. \end{cases} \quad (15)$$

Эти точки лежат на графике функции $x = 4(2y-1)^{2r} y^2$, $y \geq \frac{1}{2}$. Нетрудно убедиться, что эта функция монотонно возрастает и выпукла. Следовательно, для любых двух точек $(x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1})$, $k \geq 0$, и прямой $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$, проходящей через эти точки будет выполняться неравенство

$$\lambda_1 + \lambda_2 x_s \geq y_s, \quad s \geq 0. \quad (16)$$

Теперь получим оценки снизу. Пусть

$$\delta \in [\delta_{n+1}, \delta_n), \quad \delta_n = \frac{1}{n^r (n+1)}, \quad n \geq 1, \quad \delta_0 = \infty.$$

Положим $d_k = 0$, $k \neq n, n+1$, а d_n и d_{n+1} выберем из условий

$$\begin{cases} d_n + d_{n+1} = \delta^2, \\ n^{2r}(n+1)^2 d_n + (n+1)^{2r}(n+2)^2 d_{n+1} = 1. \end{cases}$$

Имеем

$$d_n = \frac{(n+1)^{2r}(n+2)^2 \delta^2 - 1}{(n+1)^{2r}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2},$$

$$d_{n+1} = \frac{1 - n^{2r}(n+1)^2 \delta^2}{(n+1)^{2r}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2}.$$

Так определенная последовательность $\{d_n\}$ является допустимой в экстремальной задаче (2). Поэтому

$$E(W_2^r, K, \delta)^2 \geq \frac{n+1}{2} d_n + \frac{n+2}{2} d_{n+1} = \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2, \quad (17)$$

где

$$\lambda_1 = \frac{(n+1)^{2r+1}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2(n+2)}{2((n+1)^{2r}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2)},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2((n+1)^{2r}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2)}.$$

Отметим, что уравнение прямой, проходящей через точки (x_n, y_n) , (x_{n+1}, y_{n+1}) имеет вид $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$. Займемся теперь оценкой сверху. Для оценки величины $e^2(W_2^r, K, \delta, m)$ оценим значение экстремальной задачи

$$\|u - m(g)\|_{L^2(B_2)} \rightarrow \max, \quad \|Ku - g\|_{L^2(\mathbb{T})}^2 \leq \delta^2, \quad \|f^{(r)}\|^2 \leq 1.$$

Для метода, имеющего вид

$$m_0(g) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (\alpha_n a_n(g) \cos n\varphi + \beta_n b_n(g) \sin n\varphi), \quad (18)$$

эта экстремальная задача принимает вид

$$\begin{cases} \frac{(a_0 - a_0(g))^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - \alpha_n a_n(g))^2 + (b_n - \beta_n b_n(g))^2}{2n+2} \rightarrow \max, \\ \frac{(a_0 - a_0(g))^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n}{n+1} - a_n(g) \right)^2 + \left(\frac{b_n}{n+1} - b_n(g) \right)^2 \right) \leq \delta^2, \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} (a_n^2 + b_n^2) \leq 1. \end{cases} \quad (19)$$

Пусть $\delta \in [\delta_{n+1}, \delta_n)$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{(a_n - \alpha_n a_n(g))^2}{2n+2} &= \frac{1}{2n+2} \left(\alpha_n \left(\frac{a_n}{n+1} - a_n(g) \right) - \frac{\alpha_n a_n}{n+1} + a_n \right)^2 \\ &= \frac{1}{2n+2} \left(\frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_1}} \sqrt{\lambda_1} \left(\frac{a_n}{n+1} - a_n(g) \right) + \frac{1 - \frac{\alpha_n}{n+1}}{\sqrt{\lambda_2} n^r} \sqrt{\lambda_2} n^r a_n \right)^2. \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

Тогда

$$\frac{(a_n - \alpha_n a_n(g))^2}{2n + 2} \leq \frac{1}{2n + 2} \left(\frac{\alpha_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n + 1 - \alpha_n)^2}{\lambda_2 n^{2r} (n + 1)^2} \right) \left(\lambda_1 \left(\frac{a_n}{n + 1} - a_n(g) \right)^2 + \lambda_2 n^{2r} a_n^2 \right).$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{(b_n - \beta_n b_n(g))^2}{2n + 2} \leq \frac{1}{2n + 2} \left(\frac{\beta_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n + 1 - \beta_n)^2}{\lambda_2 n^{2r} (n + 1)^2} \right) \left(\lambda_1 \left(\frac{b_n}{n + 1} - b_n(g) \right)^2 + \lambda_2 n^{2r} b_n^2 \right).$$

Положим

$$S_\alpha = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{2n + 2} \left(\frac{\alpha_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n + 1 - \alpha_n)^2}{\lambda_2 n^{2r} (n + 1)^2} \right),$$

$$S_\beta = \sup_{n \geq 1} \frac{1}{2n + 2} \left(\frac{\beta_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n + 1 - \beta_n)^2}{\lambda_2 n^{2r} (n + 1)^2} \right).$$

Предположим, что существуют такие последовательности $\{\alpha_n\}$ и $\{\beta_n\}$, для которых $S_\alpha \leq 1$ и $S_\beta \leq 1$. Тогда для значения экстремальной задачи (19) имеем

$$\begin{aligned} & \frac{(a_0 - a_0(g))^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - \alpha_n a_n(g))^2 + (b_n - \beta_n b_n(g))^2}{2n + 2} \\ & \leq \frac{(a_0 - a_0(g))^2}{4} + \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{a_n}{n + 1} - a_n(g) \right)^2 + \left(\frac{b_n}{n + 1} - b_n(g) \right)^2 \right) + \lambda_2 \sum_{n=1}^{\infty} n^{2r} (a_n^2 + b_n^2). \end{aligned}$$

В силу того, что $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$, получаем

$$\frac{(a_0 - a_0(g))^2}{4} \leq \lambda_1 \frac{(a_0 - a_0(g))^2}{2}.$$

Тем самым

$$e^2(W_2^r, K, \delta, m) \leq \frac{(a_0 - a_0(g))^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_n - \alpha_n a_n(g))^2 + (b_n - \beta_n b_n(g))^2}{2n + 2} \leq \lambda_1 \delta^2 + \lambda_2.$$

Учитывая неравенство (17), получаем, что

$$E(W_2^r, K, \delta) = \sqrt{\lambda_1 \delta^2 + \lambda_2},$$

а методы (18) являются оптимальными. Остается доказать, что множество последовательностей $\{\gamma_n\}$, для которых

$$\frac{1}{2n + 2} \left(\frac{\gamma_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n + 1 - \gamma_n)^2}{\lambda_2 n^{2r} (n + 1)^2} \right) \leq 1,$$

не пусто. Рассмотрим последовательность

$$\gamma_n = \frac{(n + 1)\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 n^{2r} (n + 1)^2}.$$

Для такой последовательности

$$\frac{1}{2n+2} \left(\frac{\gamma_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n+1-\gamma_n)^2}{\lambda_2 n^{2r}(n+1)^2} \right) = \frac{n+1}{2} \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 n^{2r}(n+1)^2}.$$

Из неравенства (16) вытекает, что

$$\lambda_1 + \lambda_2 n^{2r}(n+1)^2 \geq \frac{n+1}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2n+2} \left(\frac{\gamma_n^2}{\lambda_1} + \frac{(n+1-\gamma_n)^2}{\lambda_2 n^{2r}(n+1)^2} \right) \leq 1.$$

□

Следствие 1 (о конечности оптимального метода)

Пусть $r > 0$ и

$$\delta \in [\delta_{n+1}, \delta_n)$$

для некоторого целого $n \geq 1$, где

$$\delta_n = \frac{1}{n^r(n+1)}.$$

Пусть λ_2 — константа, определённая в теореме 1:

$$\lambda_2 = \frac{1}{2((n+1)^{2r}(n+2)^2 - n^{2r}(n+1)^2)}.$$

Тогда для всякого номера $k \geq 1$, удовлетворяющего

$$\lambda_2 \geq \frac{1}{2(k+1)k^{2r}},$$

можно выбрать коэффициенты оптимального метода равными нулю:

$$\alpha_k = \beta_k = 0.$$

В частности, оптимальный метод восстановления содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых и может быть записан в виде

$$m(g)(\rho, \theta) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^K \rho^k (\alpha_k a_k(g) \cos k\theta + \beta_k b_k(g) \sin k\theta),$$

где

$$K = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{2(k+1)k^{2r}} > \lambda_2 \right\}.$$

Все коэффициенты Фурье $a_k(g), b_k(g)$ с номерами $k > K$ являются избыточными и не влияют на результат оптимального восстановления.

Доказательство

Согласно теореме 1, для оптимальности метода вида

$$m(g)(\rho, \theta) = \frac{a_0(g)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k (\alpha_k a_k(g) \cos k\theta + \beta_k b_k(g) \sin k\theta)$$

достаточно, чтобы для всех $k \geq 1$ выполнялись неравенства

$$\frac{1}{2k+2} \left(\frac{\alpha_k^2}{\lambda_1} + \frac{(k+1-\alpha_k)^2}{\lambda_2 k^{2r} (k+1)^2} \right) \leq 1,$$

$$\frac{1}{2k+2} \left(\frac{\beta_k^2}{\lambda_1} + \frac{(k+1-\beta_k)^2}{\lambda_2 k^{2r} (k+1)^2} \right) \leq 1.$$

Положим $\alpha_k = \beta_k = 0$. Тогда левая часть каждого из неравенств принимает вид

$$\frac{1}{2k+2} \cdot \frac{(k+1)^2}{\lambda_2 k^{2r} (k+1)^2} = \frac{1}{2(k+1)\lambda_2 k^{2r}}.$$

Следовательно, условие $\alpha_k = \beta_k = 0$ является допустимым (то есть не нарушает оптимальности метода), если

$$\frac{1}{2(k+1)\lambda_2 k^{2r}} \leq 1,$$

что эквивалентно

$$\lambda_2 \geq \frac{1}{2(k+1)k^{2r}}.$$

Поскольку $\lambda_2 > 0$ фиксировано, а выражение $\frac{1}{2(k+1)k^{2r}}$ строго убывает с ростом k и стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, неравенство выполняется для всех k , начиная с некоторого номера. Определим

$$K = \max \left\{ k \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{2(k+1)k^{2r}} > \lambda_2 \right\}.$$

Тогда для всех $k > K$ справедливо $\lambda_2 \geq \frac{1}{2(k+1)k^{2r}}$, и можно положить $\alpha_k = \beta_k = 0$.

Таким образом, в суммах, задающих метод $m(g)$, остаются только слагаемые с $k \leq K$.

□

Список литературы

- [1] Осипенко К. Ю. Введение в теорию оптимального восстановления — СПб.: Лань, 2022.
- [2] Баграмян Т. Э. Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования // Владикавк. мат. журнал. — 2012. — Т. 14, № 1. — С. 22–36

- [3] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавк. мат. журнал. — 2004. — Т. 6, № 4. — С. 55–62
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление значений функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. — 2002. — Т. 193, № 3. — С. 79–100.
- [5] Абрамова Е. В., Сивкова Е. О. Оптимальное восстановление решения задачи Дирихле для полуплоскости // Сиб. матем. журн. — 2023. — Т. 64, № 3. — С. 441–449.