ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)

специалиста

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО ИНФОРМАЦИИ, ЗАДАННОЙ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ

Выполнил студент 607 группы

Семочкин Иван Михайлович

Научный руководитель:

проф. Осипенко Константин Юрьевич

Москва

2026

Оглавление

Введение

Задача оптимального восстановления — это задача поиска наилучшего возможного приближения (восстановления) некоторой характеристики объекта (функционала, оператора) при условии, что исходные данные известны не точно, а заданы с ошибкой (неточной информацией), и при этом известна лишь априорная информация о классе, к которому принадлежит искомый объект, и о характере погрешности.

Задачи оптимального восстановления изучаются со второй половины двадцатого века. В основе теории оптимального восстановления лежит проблема поиска наилучших квадратурных формул, поставленная Колмогоровым А. Н. и изучавшаяся Никольским С. М. [1]. Изложение основных этапов развития теории оптимального восстановления и ее главных результатов содержится в статьях и монографиях: Трауб Д., Вожьняковский Х. [2] и Осипенко К. Ю. [3], которые изучали восстановление по информации, заданной с детерминированной ошибкой; Пласкота Л. [4] рассматривал восстановление по информации, заданной как с детерминированной, так и со случайной ошибкой. Ряд результатов, касающихся построения и оценки погрешности оптимальных методов восстановления по информации со случайной ошибкой, можно найти в работах Донохо Д. [5], Кривошеева К. Ю. [6]. Книга Осипенко К. Ю. [7] представляет собой изложение современного состояния теории оптимального восстановления. В наши дни развитие теории продолжается, примером является статья Давыдова О. [8].

Применение аппарата теории оптимального восстановления актуально в задачах, в которых начальные условия содержат ошибку, или о начальных условиях не имеется достаточно данных. Актуальными приложениями для теории являются: машинное обучение (анализ больших данных), численные методы, теория обработки сигналов и др.

В науке хорошо известны оптимальные линейные методы восстановления. Интерес представляет поиск оптимальных нелинейных методов и их погрешностей. Во многих задачах восстановления по неточной информации оптимальные методы не найдены. В данной работе проведено исследование задач восстановления, оптимальное решение которых в настоящий момент не известно.

Целью работы является проведение восстановления по информации, заданной со случайной ошибкой. Рассматривается одномерная задача восстановления. Ошибка, содержащаяся в информации, относится к наперед заданному распределению. Первая задача — предъявить нелинейный метод восстановления по информации, имеющий погрешность меньшую, чем у оптимального линейного. Информация задана с нормальной и с лапласовской ошибкой. Вторая задача — оценить снизу погрешность произвольного метода восстановления. Информация задана с лапласовской и с равномерно распределенной ошибкой.

Постановка задачи восстановления.

Пусть заданы линейное пространство $\mathcal{W}$, $W \subset \mathcal{W}$ — некоторое множество, U — нормированное пространство, оператор $T : \mathcal{W} \to U$, информационный оператор $I : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Для $f \in W$ считаем известной величину $If + X$. X — случайный вектор ошибки, у которого математическое ожидание нулевое, а ковариация определена и конечна. Положим $X \sim \mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — заданное распределение.

Задача состоит в оптимальном восстановлении значений оператора T на классе W по значениям оператора I. Пусть задан метод восстановления — отображение $\varphi : \mathbb{R}^N \to U$. φ принадлежит множеству

$$\Phi = \{\varphi : \mathbb{R}^N \to U \mid \varphi \text{ измеримо}, \sup_{f\in W, X\sim\mathcal{F}} \mathbb{M}(\|Tf - \varphi(If + X)\|_U^2 < \infty\}.$$

Погрешность метода восстановления — это величина:

$$e(T, W, I, \varphi) = \left(\sup_{f\in W, X\sim\mathcal{F}} \mathbb{M}(\|Tf - \varphi(If + X)\|_U^2)\right)^{1/2}. \tag{1}$$

Требуется найти погрешность оптимального метода восстановления:

$$E(T, W, I) = \inf_{\varphi\in\Phi} e(T, W, I, \varphi). \tag{2}$$

В работе будем проводить исследование одномерного случая. Имеем $\mathcal{W} = \mathbb{R}, W = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le \nu\}$, $Tx = \mu x$, $Ix = x$. $X = \xi \sim \mathcal{F} : \mathbb{M}\xi = 0, \mathbb{D}\xi = \sigma^2$, и пусть ξ обладает плотностью.

Оптимальные линейные методы восстановления и их погрешность.

Найдем погрешность линейных методов $\varphi(y) = \alpha y, \alpha \in \mathbb{R}$. Положим:

$$E_{\text{lin}}(T, W, I) = \inf_{\varphi(y)=\alpha y, \alpha\in\mathbb{R}} e(T, W, I, \varphi).$$

Теорема 1. (см. также [4]). *Имеет место равенство:*

$$E_{\text{lin}}(T, W, I) = \frac{\mu\nu\sigma}{\sqrt{\nu^2 + \sigma^2}}. \tag{3}$$

Оптимальным линейным методом является метод:

$$\varphi_{\text{lin}}(y) = \alpha_* y = \frac{\mu\nu^2}{\nu^2 + \sigma^2} y. \tag{4}$$

Доказательство. Выражение для погрешности имеет вид:

$$e^2(T, W, I, \varphi) = \sup_{x\in W, \xi\sim\mathcal{F}} \mathbb{M}\left(|\mu x - \alpha(x + \xi)|^2\right) =$$

$$= \sup_{x\in W, \xi\sim\mathcal{F}} \left[(\mu-\alpha)^2x^2 + \alpha^2\mathbb{M}\xi^2 - 2x(\mu-\alpha)\alpha\mathbb{M}\xi\right] = (\mu-\alpha)^2\nu^2 + \alpha^2\sigma^2.$$

Минимизируем погрешность по α. Получаем, что $\alpha_* = \mu\nu^2/(\nu^2+\sigma^2)$. Тогда находим погрешность оптимального линейного метода восстановления:

$$E^2_{\text{lin}}(T, W, I) = \frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2} \Rightarrow E_{\text{lin}}(T, W, I) = \frac{\mu\nu\sigma}{\sqrt{\nu^2+\sigma^2}}.$$

Теорема 1 доказана.

Замечание. *Лемма справедлива для произвольного распределения шума ξ, обладающего плотностью.*

Пример метода восстановления с погрешностью меньшей, чем у оптимального линейного, в случае нормального распределения ошибки.

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Рассмотрим нелинейный метод

$$\varphi_0(y) = \begin{cases} \alpha_* y, & |y| \le \beta \\ \mu\nu \operatorname{sgn} y, & |y| \ge \beta \end{cases}; \quad \beta := \nu + \sigma^2/\nu > 0. \tag{5}$$

Теорема 2. *Пусть случайная величина $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Тогда для величины погрешности метода восстановления φ_0, заданного по формуле (5), справедлива следующая оценка:*

$$e^2(T, W, I, \varphi_0) \le \frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}\left[1 - \frac{2t}{\sqrt{2\pi}(1+t^2)(2+t^2)}\, e^{-\frac{(2+t^2)^2}{2t^2}}\right], \quad \textit{где } t = \frac{\sigma}{\nu}. \tag{6}$$

Доказательство. Справедливо равенство:

$$e^2(T, W, I, \varphi_0) = \sup_{x\in W,\ \xi\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)} \mathbb{M}\left(|Tx - \varphi_0(y(x))|^2\right) =$$

$$= \sup_{x\in W,\ \xi\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)} [\mathbb{M}\left(|Tx - \varphi_{\text{lin}}(y(x))|^2\right) - f(x)],$$

где

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{|x+\xi|\ge\beta} (|\mu x - \varphi_{\text{lin}}(x+\xi)|^2 - |\mu x - \varphi_0(x+\xi)|^2) e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma^2}}\, d\xi.$$

Проведем замену $y = x + \xi$:

$$f(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{|y|\ge\beta} \left(\left|x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} y\right|^2 - |x - \nu \operatorname{sgn} y|^2\right) e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{y \geq \beta} \left(\left| x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} y \right|^2 - |x-\nu|^2 \right) e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2}} \, dy,$$

$$f_2(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{y \leq -\beta} \left(\left| x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} y \right|^2 - |x+\nu|^2 \right) e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2}} \, dy.$$

В первом интеграле проводим замену $y = \beta + z$:

$$f_1(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_0^{+\infty} \left(\left| x - \nu - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} z \right|^2 - |x-\nu|^2 \right) e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} \int\limits_0^{+\infty} z^2 e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} 2(\nu - x) \int\limits_0^{+\infty} z e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz.$$

Во втором интеграле проводим замену $y = -\beta + z$. Аналогично предыдущему получаем:

$$f_2(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} \int\limits_{-\infty}^{0} z^2 e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz - \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} 2(\nu + x) \int\limits_{-\infty}^{0} z e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz.$$

Оценим экспоненты снизу. Обозначим $Q = \nu + \beta = 2\nu + \sigma^2/\nu > 0$.
Для $f_1(x)$ имеем $z \geq 0$. Тогда:

$$\max_{x \in [-\nu, \nu]} (z + \beta - x) = \beta + \nu + z = Q + z \Longrightarrow e^{-\frac{(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \geq e^{-\frac{(Q+z)^2}{2\sigma^2}}.$$

Для $f_2(x)$ имеем $z \leq 0$. Тогда:

$$\max_{x \in [-\nu, \nu]} |z - \beta - x| = \beta + \nu - z = Q - z \Longrightarrow e^{-\frac{(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \geq e^{-\frac{(Q-z)^2}{2\sigma^2}}.$$

В выражении для $f_2(x)$ проведем замену $z \to -z$.
Обозначим:

$$I_2 := \int_0^{+\infty} z^2 e^{-\frac{(z+Q)^2}{2\sigma^2}} dz, \qquad I_1 := \int_0^{+\infty} z e^{-\frac{(z+Q)^2}{2\sigma^2}} dz.$$

Тогда:

$$f_1(x) \geq \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} I_2 + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{2\nu^2(\nu - x)}{\nu^2+\sigma^2} I_1,$$

$$f_2(x) \geq \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} I_2 + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \frac{2\nu^2(\nu + x)}{\nu^2+\sigma^2} I_1.$$

Получаем:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \geq \frac{2\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{\nu^3}{\nu^2+\sigma^2}\left[\frac{\nu}{\nu^2+\sigma^2}I_2 + 2I_1\right].$$

Найдем интегралы I_1, I_2. Выполним замену $u = z + Q$. Тогда:

$$I_1 = \int_Q^\infty (u-Q)e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du, \quad I_2 = \int_Q^\infty (u-Q)^2 e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du.$$

Вычисляем I_1:

$$I_1 = \int_Q^\infty u e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du - Q\int_Q^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du.$$

Первый интеграл:

$$\int_Q^\infty u e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = \sigma^2 e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}}.$$

Второй интеграл выражается через дополнительную функцию ошибок:

$$\int_Q^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}\,\sigma}\right).$$

Таким образом, получаем:

$$I_1 = \sigma^2 e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} - Q\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}\,\sigma}\right).$$

Вычисляем I_2:

$$I_2 = \int_Q^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du - 2Q\int_Q^\infty u e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du + Q^2\int_Q^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du.$$

Первый интеграл находим по формуле

$$\int u^2 e^{-pu^2}\,du = -\frac{u}{2p}e^{-pu^2} + \frac{1}{2p}\int e^{-pu^2}\,du, p = \frac{1}{2\sigma^2} \Rightarrow$$

$$\int_Q^\infty u^2 e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du = \sigma^2 Q e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} + \sigma^2\int_Q^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du.$$

Второй интеграл уже известен (см. выше). Тогда выразим I_2:

$$I_2 = \left[\sigma^2 Q e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} + \sigma^2\int_Q^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du\right] - 2Q\left[\sigma^2 e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}}\right] + Q^2\int_Q^\infty e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}}\,du.$$

После группировки всех слагаемых получаем:

$$I_2 = -\sigma^2 Q e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} + (\sigma^2+Q^2)\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}\,\sigma}\right).$$

Выполним подстановку найденных интегралов в неравенство для $f(x)$. После группировки всех слагаемых получаем:

$$f(x) \geq \frac{2\mu^2\nu^3}{\sqrt{2\pi}\sigma(\nu^2+\sigma^2)} \left[\sigma^2\left(2 - \frac{\nu Q}{\nu^2+\sigma^2}\right)e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} + \left(\frac{\nu(\sigma^2+Q^2)}{\nu^2+\sigma^2} - 2Q\right)\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right],$$

Заметим, что

$$2 - \frac{\nu Q}{\nu^2+\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}, \quad \frac{\nu(\sigma^2+Q^2)}{\nu^2+\sigma^2} - 2Q = -\frac{\sigma^2}{\nu}.$$

Тогда:

$$f(x) \geq \frac{2\mu^2\nu^3}{\sqrt{2\pi}\sigma(\nu^2+\sigma^2)} \left[\sigma^2 \cdot \frac{\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}} - \frac{\sigma^2}{\nu}\cdot\sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}\,\sigma}\right)\right].$$

Используем классическую верхнюю оценку для $\mathrm{erfc}(s)$. Для любого $s > 0$ справедливо

$$\mathrm{erfc}(s) \leq \frac{e^{-s^2}}{s\sqrt{\pi}} \Longrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{Q}{\sqrt{2}\,\sigma}\right) \leq \frac{\sigma}{Q}e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}}.$$

Тогда неравенство для $f(x)$ примет вид:

$$f(x) \geq \frac{2\mu^2\nu^3\sigma^3}{\sqrt{2\pi}(\nu^2+\sigma^2)}\left(\frac{1}{\nu^2+\sigma^2} - \frac{1}{\nu Q}\right)e^{-\frac{Q^2}{2\sigma^2}}.$$

Используем $Q = 2\nu + \sigma^2/\nu$ и упростим выражение. Получаем:

$$f(x) \geq \frac{2\mu^2\nu^5\sigma^3}{\sqrt{2\pi}\,(\nu^2+\sigma^2)^2(2\nu^2+\sigma^2)}\,e^{-\frac{\left(2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)^2}{2\sigma^2}} > 0.$$

Тогда оценка погрешности метода φ_0 такова:

$$e^2(T,W,I,\varphi_0) \leq \frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}\left[1 - \frac{2\nu^3\sigma}{\sqrt{2\pi}(\nu^2+\sigma^2)(2\nu^2+\sigma^2)}\,e^{-\frac{\left(2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)^2}{2\sigma^2}}\right].$$

Остается перейти к переменной $t = \sigma/\nu$. Теорема 2 доказана.

Следствие 2.1. *Для отношения погрешности оптимального линейного метода к погрешности метода φ_0 выполнено:*

$$\frac{E_{lin}(T,W,I)}{e(T,W,I,\varphi_0)} \geq g_{\mathcal{N}}(t) := \left[1 - \frac{2t}{\sqrt{2\pi}(1+t^2)(2+t^2)}\,e^{-\frac{(2+t^2)^2}{2t^2}}\right]^{-1/2}, \quad \text{где } t = \frac{\sigma}{\nu}; \tag{7}$$

причем 1) $\lim\limits_{t\to+\infty} g_{\mathcal{N}}(t) = \lim\limits_{t\to0+} g_{\mathcal{N}}(t) = \inf\limits_{t>0} g_{\mathcal{N}}(t) = 1$; 2) $\sup\limits_{t>0} g_{\mathcal{N}}(t) \in [1,0009; 1,0010]$.

Доказательство. Докажем 1). Имеем $\lim\limits_{t\to0+} \frac{2t}{\sqrt{2\pi}(1+t^2)(2+t^2)} = 0$, $\lim\limits_{t\to0+} e^{-\frac{(2+t^2)^2}{2t^2}} = 0 =>$ $\lim\limits_{t\to0+} g_{\mathcal{N}}(t) = 1$. $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{2t}{\sqrt{2\pi}(1+t^2)(2+t^2)}e^{-\frac{(2+t^2)^2}{2t^2}} = 0 => \lim\limits_{t\to+\infty} g_{\mathcal{N}}(t) = 1$. Кроме того, заметим, что

$g(t) > 1$ всюду на области определения.

Докажем 2). Для поиска экстремумов приравняем к нулю логарифмическую производную функции $\frac{2t}{\sqrt{2\pi}(1+t^2)(2+t^2)}e^{-\frac{(2+t^2)^2}{2t^2}}$. Получаем $t^8+6t^6+t^4-14t^2-8=0$. Отсюда находится точка максимума $t \in [1,2379; 1,2380]$. Тогда наибольшее значение $g_{\mathcal{N}}(t)$ принадлежит отрезку $[1,0009; 1,0010]$. Следствие 2.1 доказано.

Заметим, что функция $g_{\mathcal{N}}(t)$ сначала возрастает от 1, достигает своего наибольшего значения, а после убывает, приближаясь сверху к горизонтальной асимптоте 1.

Пример метода восстановления с погрешностью меньшей, чем у оптимального линейного, в случае лапласовского распределения ошибки.

Пусть $\boldsymbol{\mathcal{F}=\mathcal{L}(b,0)}$ — распределение Лапласа с нулевым средним. Функция плотности имеет вид $f(u)=\frac{b}{2}e^{-b|u|}$. $\mathbb{M}\xi=0, \mathbb{D}\xi=\frac{2}{b^2}$. В обозначениях исходной постановки имеем $b=\sqrt{2}/\sigma$. Снова рассмотрим нелинейный метод

$$\varphi_0(y)=\begin{cases}\alpha_* y, & |y|\le\beta\\ \mu\nu\operatorname{sgn} y, & |y|\ge\beta\end{cases}; \quad \beta:=\nu+\sigma^2/\nu>0. \tag{5}$$

Теорема 3. *Пусть случайная величина $\xi\sim\mathcal{L}(b,0)$. Тогда для величины погрешности метода восстановления φ_0, заданного по формуле (5), справедлива следующая оценка:*

$$e^2(T,W,I,\varphi_0)\le\frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}\left[1-\frac{1}{1+t^2}\,e^{-\frac{\sqrt{2}(2+t^2)}{t}}\right],\quad \text{где } t=\frac{\sigma}{\nu}. \tag{8}$$

Доказательство. Справедливо равенство:

$$e^2(T,W,I,\varphi_0)=\sup_{x\in W,\ \xi\sim\mathcal{L}(b,0)}\mathbb{M}\left(|Tx-\varphi_0(y(x))|^2\right)=$$

$$=\sup_{x\in W,\ \xi\sim\mathcal{L}(b,0)}[\mathbb{M}\left(|Tx-\varphi_{\text{lin}}(y(x))|^2\right)-f(x)],$$

где

$$f(x)=\frac{b}{2}\int\limits_{|x+\xi|\ge\beta}(|\mu x-\varphi_{\text{lin}}(x+\xi)|^2-|\mu x-\varphi_0(x+\xi)|^2)e^{-b|\xi|}\,d\xi.$$

Проведем замену $y=x+\xi$:

$$f(x)=\frac{\mu^2 b}{2}\int\limits_{|y|\ge\beta}\left(\left|x-\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}y\right|^2-|x-\nu\operatorname{sgn}y|^2\right)e^{-b|y-x|}\,dy.$$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \frac{\mu^2 b}{2} \int_{\beta}^{+\infty} \left(\left| x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} y \right|^2 - |x-\nu|^2 \right) e^{-b|y-x|} \, dy.$$

$$f_2(x) = \frac{\mu^2 b}{2} \int_{-\infty}^{-\beta} \left(\left| x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} y \right|^2 - |x+\nu|^2 \right) e^{-b|y-x|} \, dy.$$

В первом интеграле проводим замену $z = y - \beta$:

$$f_1(x) = \frac{\mu^2 b}{2} \int_{0}^{+\infty} \left(\left| x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} (z+\beta) \right|^2 - |x-\nu|^2 \right) e^{-b|z+\beta-x|} \, dz =$$
$$= \frac{\mu^2 b}{2} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} \int_{0}^{+\infty} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} z^2 + 2(\nu - x) z \right) e^{-b|z+\beta-x|} \, dz.$$

Во втором интеграле проводим замену $z = y + \beta$. Аналогично предыдущему получаем:

$$f_2(x) = \frac{\mu^2 b}{2} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} z^2 - 2(x + \nu) z \right) e^{-b|z-\beta-x|} \, dz.$$

Для $f_1(x)$ имеем $z \geq 0$, $x \leq \nu$, значит $z + \beta - x \geq 0 + \beta - \nu > 0$. Поэтому $|z+\beta-x| = z+\beta-x$.
Для $f_2(x)$ имеем $z \leq 0$, $x \geq -\nu$, значит $z - \beta - x \leq 0 - \beta + \nu < 0$. Поэтому $|z-\beta-x| = -z+\beta+x$.

$$f_1(x) = \frac{\mu^2 b}{2} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{-b(\beta - x)} \int_{0}^{\infty} \left(kz^2 + cz \right) e^{-bz} \, dz,$$

где $k = \nu^2/(\nu^2+\sigma^2)$, $c = 2(\nu - x)$. Используем формулу

$$\int_{0}^{+\infty} z^n e^{-bz} \, dz = \frac{n!}{b^{n+1}},$$

получаем:

$$f_1(x) = \frac{\mu^2 \nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{-b(\beta - x)} \left[\frac{\nu^2}{b^2(\nu^2+\sigma^2)} + \frac{\nu - x}{b} \right].$$

Максимум $\beta - x$ имеем при $x = -\nu$, также $\nu - x \geq 0$. Поэтому

$$f_1(x) \geq \frac{\mu^2 \nu^4}{b^2 (\nu^2+\sigma^2)^2} e^{-b\left(2\nu + \frac{\sigma^2}{\nu}\right)}.$$

$$f_2(x) = \frac{\mu^2 b}{2} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{-b(\beta + x)} \int_{-\infty}^{0} \left(kz^2 - cz \right) e^{bz} \, dz,$$

где $k = \nu^2/(\nu^2+\sigma^2)$, $c = 2(x+\nu)$. Используем формулу

$$\int_{-\infty}^{0} z^n e^{-bz}\, dz = (-1)^n \frac{n!}{b^{n+1}},$$

получаем:

$$f_2(x) = \frac{\mu^2\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{-b(\beta+x)} \left[\frac{\nu^2}{b^2(\nu^2+\sigma^2)} + \frac{x+\nu}{b}\right].$$

Максимум $\beta + x$ имеем при $x = \nu$, также $x + \nu \geq 0$. Поэтому

$$f_2(x) \geq \frac{\mu^2\nu^4}{b^2(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{-b\left(2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)}.$$

$$f(x) \geq \frac{2\mu^2\nu^4}{b^2(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{-b\left(2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)} = \frac{\mu^2\nu^4\sigma^2}{(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)} > 0.$$

Тогда оценка погрешности метода φ_0 такова:

$$e^2(T, W, I, \varphi_0) \leq \frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2} \left[1 - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\left(2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)}\right].$$

Остается перейти к переменной $t = \sigma/\nu$. Теорема 3 доказана.

Следствие 3.1. *Для отношения погрешности оптимального линейного метода к погрешности метода φ_0 выполнено:*

$$\frac{E_{lin}(T, W, I)}{e(T, W, I, \varphi_0)} \geq g_{\mathcal{L}}(s) := \left[1 - \frac{1}{1+2s^2} e^{-\frac{2(1+s^2)}{s}}\right]^{-1/2}, \quad \text{где } s = \frac{\sigma}{\sqrt{2}\nu}; \tag{9}$$

причем 1) $\lim\limits_{s\to 0+} g_{\mathcal{L}}(s) = \lim\limits_{s\to+\infty} g_{\mathcal{L}}(s) = \inf\limits_{s>0} g_{\mathcal{L}}(s) = 1$; 2) $\sup\limits_{s>0} g_{\mathcal{L}}(s) \in [1,0036; 1,0037]$.

Доказательство. Докажем 1). Имеем $\lim\limits_{s\to 0+} e^{-\frac{2(1+s^2)}{s}} = 0$, $\lim\limits_{s\to 0+} \frac{1}{1+2s^2} = 1 => \lim\limits_{s\to 0+} g_{\mathcal{L}}(s) = 1$. $\lim\limits_{s\to+\infty} \frac{1}{1+2s^2} e^{-\frac{2(1+s^2)}{s}} = 0 => \lim\limits_{t\to+\infty} g_{\mathcal{L}}(s) = 1$. Кроме того, заметим, что $g_{\mathcal{L}}(s) > 1$ всюду на области определения.

Докажем 2). Для поиска экстремумов приравняем к нулю логарифмическую производную функции $\frac{1}{1+2s^2} e^{-\frac{2(1+s^2)}{s}}$. Получаем $2s^4 + 2s^3 - s^2 - 1 = 0$. Отсюда находится точка максимума $s \in [0,7658; 0,7659]$. Тогда наибольшее значение $g_{\mathcal{L}}(s)$ принадлежит отрезку $[1,0036; 1,0037]$. Следствие 3.1 доказано.

Заметим, что функция $g_{\mathcal{L}}(s)$ сначала возрастает от 1, достигает своего наибольшего значения, а после убывает, приближаясь сверху к горизонтальной асимптоте 1.

Нижняя оценка погрешности произвольного метода восстановления для лапласовского распределения ошибки.

Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{L}(b, 0)$. В обозначениях исходной постановки задачи имеем $b = \sqrt{2}/\sigma$.

Теорема 4. *Пусть случайная величина $\xi \sim \mathcal{L}(b, 0)$. Тогда для величины погрешности произвольного метода восстановления φ по информации, заданной с шумом ξ, справедлива оценка снизу:*

$$e^2(T, W, I, \varphi) \geq \mu^2 \nu^2 e^{-p} \left[\frac{1}{\cosh(p)} + \operatorname{arctg}(\sinh(p))\right], \quad \text{где } p = \frac{\sqrt{2}\nu}{\sigma}. \tag{10}$$

Доказательство. Из формулы (1) следует:

$$e^2(T, W, I, \varphi) \geq \frac{b}{2} \sup_{|x| \leq \nu} \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi(x + \xi) - \mu x)^2 e^{-b|\xi|}\, d\xi = \frac{b}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi(y) - \mu x)^2 e^{-b|y-x|}\, dy,$$

кроме того, аналогично получим:

$$e^2(T, W, I, \varphi) \geq \frac{b}{2} \sup_{|x| \leq \nu} \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi(-x + \xi) + \mu x)^2 e^{-b|\xi|}\, d\xi = \frac{b}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} (\varphi(y) + \mu x)^2 e^{-b|y+x|}\, dy,$$

тогда выполняется неравенство для среднего этих двух выражений:

$$e^2(T, W, I, \varphi) \geq \frac{b}{4} \int\limits_{\mathbb{R}} \left((\varphi(y) - \mu x)^2 e^{-b|y-x|} + (\varphi(y) + \mu x)^2 e^{-b|y+x|} \right) dy.$$

Поскольку $\mu > 0$, примем $\widetilde{\varphi}(y) := \varphi(y)/\mu$. Тогда:

$$e^2(T, W, I, \varphi) \geq \mu^2 \frac{b}{4} \int\limits_{\mathbb{R}} \left((\widetilde{\varphi}(y) - x)^2 e^{-b|y-x|} + (\widetilde{\varphi}(y) + x)^2 e^{-b|y+x|} \right) dy.$$

Функция

$$F(\widetilde{\varphi}) = (\widetilde{\varphi} - x)^2 e^{-b|y-x|} + (\widetilde{\varphi} + x)^2 e^{-b|y+x|}$$

является квадратичной и возрастает при $\widetilde{\varphi} \to +\infty$. Поэтому ее минимум достигается в единственной точке ее экстремума. Получаем:

$$\widetilde{\varphi}_{\min}(y) = x \frac{e^{-b|y-x|} - e^{-b|y+x|}}{e^{-b|y-x|} + e^{-b|y+x|}}.$$

Подставим это выражение в $F(\widetilde{\varphi})$ и найдем $F_{\min}(y) = F(\widetilde{\varphi}_{\min}(y))$:

$$(\widetilde{\varphi}_{\min}(y) - x)^2 e^{-b|y-x|} = \frac{4x^2 (e^{-b|y+x|})^2 e^{-b|y-x|}}{(e^{-b|y+x|} + e^{-b|y-x|})^2}, \quad (\widetilde{\varphi}_{\min}(y) + x)^2 e^{-b|y+x|} = \frac{4x^2 e^{-b|y+x|} (e^{-b|y-x|})^2}{(e^{-b|y+x|} + e^{-b|y-x|})^2}$$

$$\Longrightarrow F_{\min}(y) = \frac{4x^2 e^{-b|y+x|} e^{-b|y-x|}}{e^{-b|y+x|} + e^{-b|y-x|}} = \frac{4x^2}{e^{b|y+x|} + e^{b|y-x|}}.$$

$F_{\min}(y)$ является четной по y. Найдем интеграл:

$$I := \int\limits_{\mathbb{R}} F_{\min}(y)\, dy = \int\limits_0^{+\infty} \frac{8x^2 dy}{e^{b|y+x|} + e^{b|y-x|}} = \int\limits_0^{x} \frac{8x^2 dy}{e^{b(y+x)} + e^{-b(y-x)}} + \int\limits_x^{+\infty} \frac{8x^2 dy}{e^{b(y+x)} + e^{b(y-x)}}.$$

Вычислим интегралы:

$$\int\limits_x^{+\infty} \frac{dy}{e^{b(y+x)} + e^{b(y-x)}} = \frac{1}{2\cosh(bx)} \int\limits_x^{+\infty} e^{-by}\, dy = \frac{e^{-bx}}{2b\cosh(bx)},$$

$$\int\limits_0^{x} \frac{dy}{e^{b(y+x)} + e^{-b(y-x)}} = \frac{e^{-bx}}{2} \int\limits_0^{x} \frac{dy}{\cosh(by)} = \frac{e^{-bx}}{2} \frac{1}{b} \int\limits_0^{bx} \frac{dt}{\cosh t}.$$

Имеем

$$\frac{1}{\cosh t} = \frac{2e^t}{e^{2t}+1}, \quad \int \frac{2e^t\, dt}{e^{2t}+1} = 2\operatorname{arctg}(e^t) + C \Rightarrow \int\limits_0^{bx} \frac{dt}{\cosh t} = 2\operatorname{arctg}(e^{bx}) - \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, собирая все слагаемые, получаем:

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \mu^2 \frac{b}{4} \left[\frac{4x^2 e^{-bx}}{b\cosh(bx)} + \frac{4x^2 e^{-bx}}{b} \left(2\operatorname{arctg}(e^{bx}) - \frac{\pi}{2} \right) \right] \Rightarrow$$
$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \frac{\mu^2 x^2}{e^{bx}} \left[\frac{1}{\cosh(bx)} + 2\operatorname{arctg}(e^{bx}) - \frac{\pi}{2} \right] = \mu^2 x^2 e^{-bx} \left[\frac{1}{\cosh(bx)} + \operatorname{arctg}(\sinh(bx)) \right].$$

Поскольку это неравенство выполнено $\forall |x| \leq \nu$, то оно выполнено и для $x = \nu$:

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \mu^2 \nu^2 e^{-b\nu} \left[\frac{1}{\cosh(b\nu)} + \operatorname{arctg}(\sinh(b\nu)) \right].$$

Остается перейти к переменной $p = b\nu$. Теорема 4 доказана.

Замечание. *Погрешность оптимального метода восстановления удовлетворяет полученной нижней оценке.*

Следствие 4.1. *В обозначениях исходной постановки одномерной задачи восстановления имеем:*

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \mu^2 \nu^2 e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\nu} \left[\frac{1}{\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\nu\right)} + \operatorname{arctg}\left(\sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{\sigma}\nu \right) \right) \right]. \tag{11}$$

Утверждение проверяется непосредственной подстановкой $b = \sqrt{2}/\sigma$ в Теорему 4.

Следствие 4.2. *Для отношения погрешности оптимального линейного метода к погрешности произвольного метода справедлива оценка сверху:*

$$\frac{E_{lin}(T,W,I)}{e(T,W,I,\varphi)} \le \psi(p) := \left(1+\frac{p^2}{2}\right)^{-1/2} e^{t/2}\left[\frac{1}{\cosh p}+\operatorname{arctg}(\sinh p)\right]^{-1/2}, \quad \text{где } p=\frac{\sqrt{2}\nu}{\sigma}; \qquad (12)$$

причем 1) $\lim\limits_{p\to 0+}\psi(p)=1+0$; 2) $\lim\limits_{p\to+\infty}\psi(p)=+\infty$; 3) $\psi(p)$ *строго монотонно возрастает* $\forall p>0$.

Доказательство. Выражение $\psi(p)$ следует из (3) и нижней оценки для $e^2(T,W,I,\varphi)$. Докажем 1). $\lim\limits_{p\to 0+}\left(1+\frac{p^2}{2}\right)^{-1/2}=1$, $\lim\limits_{p\to 0+}e^{p/2}=1$, $\lim\limits_{p\to 0}\frac{1}{\cosh p}=1$, $\lim\limits_{p\to 0+}\sinh p=0$, $\operatorname{arctg}(0)=0$. Поэтому $\lim\limits_{p\to 0+}\psi(p)=1$. И очевидно, что $\psi(+0)=1+0$.

Докажем 2). $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(1+\frac{p^2}{2}\right)^{-1/2}e^{p/2}=\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{\sqrt{2}}{t}e^{p/2}=+\infty$, $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{1}{\cosh p}=\lim\limits_{p\to+\infty}2e^{-p}=0$, $\lim\limits_{p\to+\infty}\sinh p=+\infty$, $\lim\limits_{p\to+\infty}\operatorname{arctg}(\sinh p)=\frac{\pi}{2}$. Поэтому $\lim\limits_{p\to+\infty}\psi(p)=+\infty$.

Докажем 3). Покажем, что логарифмическая производная строго положительна $\forall t>0$.

$$L(p)=\frac{d}{dp}[\ln(\psi(p))]=\frac{1}{2}-\frac{p}{2+p^2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-p}/\cosh^2 p}{1/\cosh p+\operatorname{arctg}(\sinh p)}.$$

Имеем, что $L(p)\ge\frac{1}{2}-\frac{p}{2+p^2}-\frac{1}{2e^p\cosh p}=\frac{p^2-2p+2}{2(2+t^2)}-\frac{1}{e^{2t}+1}$. Значит, будем доказывать следующее неравенство: $\frac{2(2+p^2)}{p^2-2p+2}<e^{2p}+1\Leftrightarrow 1+\frac{4p}{p^2-2p+2}<e^{2p}$. Используем разложение Тейлора для экспоненты. Достаточно показать, что $1+\frac{4p}{p^2-2p+2}<1+2p+2p^2+\frac{4}{3}p^3\Leftrightarrow\frac{2p}{p^2-2p+2}<1+p+\frac{2}{3}p^2$ $\Leftrightarrow 2p<\frac{2}{3}p^5-\frac{1}{3}p^4+\frac{1}{3}p^3+2p\Leftrightarrow 0<p^3(2p^2-p+1)$. Последнее равенство выполнено $\forall p>0$. Следствие 4.2 доказано.

Следствие 4.3.

$$E_{lin}(T,W,I)\ge e(T,W,I,\varphi)\ge\frac{1}{\psi(p)}E_{lin}(T,W,I)>0,$$

причем для фиксированного ν *при* $\sigma\to 0$ *функция* $\psi^{-1}(p)\to 0$, *а при* $\sigma\to+\infty$ *функция* $\psi^{-1}(p)\to 1$.

Нижняя оценка погрешности произвольного метода восстановления для равномерного распределения ошибки.

Пусть $\boldsymbol{\mathcal{F}}=\boldsymbol{\mathcal{U}([-a,a])}$ — равномерное распределение с нулевым средним. Функция плотности имеет вид $f(v)=\frac{1}{2a}, v\in[-a,a]$. $\mathbb{M}\xi=0,\mathbb{D}\xi=\frac{a^2}{3}$. В обозначениях исходной постановки имеем $a=\sqrt{3}\sigma$.

Теорема 5. *Пусть случайная величина* ξ *распределена по равномерному закону с нулевым средним. Тогда для величины погрешности произвольного метода восстановления* φ *по инфор-*

мации, заданной с шумом ξ, справедлива оценка снизу:

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \mu^2 \cdot \begin{cases} \frac{\nu^2(a-\nu)}{a}, & \nu \leq \frac{2a}{3} \\ \frac{4a^2}{27}, & \nu > \frac{2a}{3} \end{cases}. \tag{13}$$

Доказательство. Из формулы (1) следует:

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \frac{1}{2a} \sup_{|x|\leq\nu} \int\limits_{-a}^{+a} (\varphi(x+\xi) - \mu x)^2\, d\xi = \frac{1}{2a} \int\limits_{x-a}^{x+a} (\varphi(y) - \mu x)^2\, dy,$$

кроме того, аналогично получим:

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \frac{1}{2a} \sup_{|x|\leq\nu} \int\limits_{-a}^{+a} (\varphi(-x+\xi) + \mu x)^2\, d\xi = \frac{1}{2a} \int\limits_{-x-a}^{-x+a} (\varphi(y) + \mu x)^2\, dy,$$

тогда выполняется неравенство для среднего этих двух выражений:

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \frac{1}{4a} \left[\int\limits_{x-a}^{x+a} (\varphi(y) - \mu x)^2\, dy + \int\limits_{-x-a}^{-x+a} (\varphi(y) + \mu x)^2\, dy \right].$$

Поскольку $\mu > 0$, примем $\widetilde{\varphi}(y) := \varphi(y)/\mu$. Тогда

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \frac{\mu^2}{4a} \left[\int\limits_{x-a}^{x+a} (\widetilde{\varphi}(y) - x)^2\, dy + \int\limits_{-x-a}^{-x+a} (\widetilde{\varphi}(y) + x)^2\, dy \right].$$

Рассмотрим два случая. Случай 1: промежутки интегрирования не пересекаются: $a \leq x$. Тогда минимизируем каждый интеграл отдельно. Первый обращается в ноль при $\widetilde{\varphi} = x$, второй обращается в ноль при $\widetilde{\varphi} = -x$. Значит, минимальная погрешность в этом случае равняется нулю.

Случай 2: промежутки интегрирования пересекаются: $a > x$. Разобьем область интегрирования на три области: $I_1 : [-x-a, x-a]$ — существует только второй из интегралов,
$I_2 : [x-a, -x+a]$ — существуют оба интеграла, $I_3 : [-x+a, x+a]$ — существует только первый из интегралов.

$$e^2(T,W,I,\varphi) \geq \frac{\mu^2}{4a} \left[\int\limits_{I_1} (\widetilde{\varphi}(y) + x)^2\, dy + \int\limits_{I_2} \left((\widetilde{\varphi}(y) - x)^2 + (\widetilde{\varphi}(y) + x)^2 \right) dy + \int\limits_{I_3} (\widetilde{\varphi}(y) - x)^2\, dy \right].$$

Для интеграла по I_1 минимум достигается при $\widetilde{\varphi} = -x$ и равняется нулю, для интеграла по I_3 минимум достигается при $\widetilde{\varphi} = x$ и равняется нулю. Для интеграла по I_2 минимизируем выражение $(\widetilde{\varphi}-x)^2+(\widetilde{\varphi}+x)^2=2\widetilde{\varphi}^2+2x^2$. Минимум достигается при $\widetilde{\varphi}=0$ и равняется $2x^2$. Расчитаем длины $I_k, k=1,2,3$. $|I_1|=|I_3|=2x, |I_2|=2a-2x$. Тогда

$$e^2(T,W,I,\varphi)\geq\frac{\mu^2}{4a}\left[0\cdot|I_1|+2x^2|I_2|+0\cdot|I_3|\right]=\frac{\mu^2}{a}x^2(a-x).$$

Точка максимума данного выражения $x=\frac{2a}{3}$. Ищем наибольшее значение выражения на $x\in[0,\nu]$. Если $\nu>\frac{2a}{3}$, то максимум достигается в $x=\frac{2a}{3}$ — внутренней точке и равняется $\mu^2\frac{4a^2}{27}$. Если же $\nu\leq\frac{2a}{3}$, то максимум достигается в точке $x=\nu$. Таким образом,

$$e^2(T,W,I,\varphi)\geq\mu^2\cdot\begin{cases}\frac{\nu^2(a-\nu)}{a}, & \nu\leq\frac{2a}{3}\\ \frac{4a^2}{27}, & \nu>\frac{2a}{3}\end{cases}.$$

Теорема 5 доказана.

Замечание. *Погрешность оптимального метода восстановления удовлетворяет полученной нижней оценке.*

Следствие 5.1. *В обозначениях исходной постановки одномерной задачи восстановления имеем:*

$$e^2(T,W,I,\varphi)\geq\mu^2\cdot\begin{cases}\nu^2\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\nu}{\sigma}\right), & \frac{\nu}{\sigma}\leq\frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{4\sigma^2}{9}, & \frac{\nu}{\sigma}>\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}. \tag{14}$$

Утверждение проверяется непосредственной подстановкой $a=\sqrt{3}\sigma$ в Теорему 5.

Следствие 5.2. *Для отношения погрешности оптимального линейного метода к погрешности произвольного метода справедлива оценка сверху:*

$$\frac{E_{lin}(T,W,I)}{e(T,W,I,\varphi)}\leq\psi(q):=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{1+q^2}\sqrt{1-\frac{q}{\sqrt{3}}}}, & 0<q\leq\frac{2}{\sqrt{3}}\\ \frac{3}{2}\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}, & q>\frac{2}{\sqrt{3}}\end{cases}, \quad \textit{где } q=\frac{\nu}{\sigma}; \tag{15}$$

причем 1) $\lim\limits_{q\to 0+}\psi(q)=1+0$; 2) $\lim\limits_{q\to+\infty}\psi(q)=\frac{3}{2}-0$; *3)$\psi(q)$ монотонно неубывает $\forall q>0$.*

Доказательство. Выражение $\psi(q)$ следует из (3) и нижней оценки для $e(T,W,I,\varphi)$. Заметим, что $\psi(q)$ непрерывна в $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
Утверждение 1) очевидно. Утверждение 2) выполняется, поскольку $\lim\limits_{q\to+\infty}\frac{q}{\sqrt{1+q^2}}=1-0$.
Докажем 3). В случае $q>\frac{2}{\sqrt{3}}$ имеем $\psi'(q)=\frac{3}{2}\frac{1}{(1+q^2)^{3/2}}>0$.
В случае $0<q\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ найдем логарифмическую производную $l(q)=\frac{d}{dq}\left(\ln\psi(q)\right)$.
$\ln\psi(q)=-\frac{1}{2}\ln(1+q^2)-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{q}{\sqrt{3}}\right)$. Тогда $l(q)=-\frac{t}{1+q^2}+\frac{1}{2\sqrt{3}\left(1-\frac{q}{\sqrt{3}}\right)}$. Покажем, что на данном интервале $l(q)\geq 0$. То есть докажем $\frac{1}{2\sqrt{3}-2q}\geq\frac{q}{1+q^2}$, что равносильно $3q^2-2\sqrt{3}t+1\geq 0 \Leftrightarrow 3\left(1-\frac{q}{\sqrt{3}}\right)^2\geq 0$. Последнее всегда выполнено. Следствие 5.2 доказано.

Следствие 5.3.

$$E_{lin}(T,W,I) \geq e(T,W,I,\varphi) \geq \frac{1}{\psi(q)} E_{lin}(T,W,I) > 0,$$

причем для фиксированного ν *при* $\sigma \to 0$ *функция* $\psi^{-1}(q) \to 2/3$*, а при* $\sigma \to +\infty$ *функция* $\psi^{-1}(q) \to 1$*.*

Выводы.

Таким образом, в работе представлены верхние оценки погрешности метода φ_0 (5) в случае, если информация распределена по нормальному закону (Теорема 2) или по закону Лапласа (Теорема 3). Из данных теорем следуют нижние оценки для отношения погрешности оптимального линейного метода к погрешности φ_0. Имеем, что φ_0 является улучшением оптимального линейного метода. Он обладает немного меньшей погрешностью, чем оптимальный линейный метод.

Также в работе представлены нижние оценки погрешности произвольного метода восстановления φ в случае, если информация распределена по закону Лапласа (Теорема 4) и равномерному закону (Теорема 5). Получено, что погрешность оптимального метода восстановления будет также удовлетворять указанным нижним оценкам. Было исследовано асимптотическое поведение найденных оценок.

Заключение.

В некоторых случаях линейные методы восстановления удается подправить так, чтобы получить методы с меньшей погрешностью. Большую значимость имеет оценивание снизу погрешностей произвольного метода. Для многих задач оптимального восстановления решение только предстоит найти, проблема поиска отпимального метода и оптимальной погрешности остается актуальной.

Список литературы.

1. *Никольский С. М.* Квадратурные формулы. М.: Физматгиз. 1958.

2. *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. // New York: Academic Press. 1980.

3. *Осипенко К. Ю.* Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью. // Матем. сб. 1982. **118(160)**, № 3(7). 350–370.

4. *Plaskota L.* Noisy Information and Computational Complexity. // Cambridge: Cambridge University Press. (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics). 1996.

5. *Donoho D. L., Johnstone I. M., Kerkyacharian G., Picard D.* Wavelet shrinkage: asymptopia? // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1995. **57**, № 2. 301–337.

6. *Кривошеев К. Ю.* Об оптимальном восстановлении линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой. // Матем. сб. 2021. **212**, № 9. 57–84.

7. *Осипенко К. Ю.* Введение в теорию оптимального восстановления: учебное пособие для вузов. Санкт-Петербург: Лань. 2022.

8. *Davydov O., Solodky S.* On optimal recovery of unbounded operators from inaccurate data. // arXiv. https://doi.org/10.48550/arXiv.2505.07123. 2025.