Об эволюции точек экстремума тригонометрических полиномов

Вердиев В.Г. (Махачкала, Россия)

Имеет место следующий результат.

Теорема 1. *Пусть P и Q — тригонометрические полиномы, имеющие на $[-\pi,\pi)$ по $2n$ нулей и по $2n$ точек локальных экстремумов $y_1 < \ldots < y_{2n}$ и $\eta_1 < \ldots < \eta_{2n}$ — соответственно. Пусть далее $y_1 = \eta_1$, $P(y_i) = Q(\eta_i)$, $i \neq j$, где $1 < j \leq 2n$ и при этом $P(y_j) > Q(\eta_j)$, если $Q(\eta_j) > 0$ и $P(y_j) < Q(\eta_j)$, если $Q(\eta_j) \leq 0$. Тогда $y_i < \eta_i$ при $1 < i < j$ и $\eta_i < y_i$ при $j < i \leq 2n$.*

Доказательство теоремы основано на следующих двух утверждениях.

Лемма 1 (Дэвис). *Для любого набора чисел $\Gamma = \{\gamma_i\}_{i=1}^{2n}$ таких, что $\gamma_i\gamma_{i+1} < 0$, $1 \leq i \leq 2n-1$, существует единственный тригонометрический полином P^Γ степени n, имеющий $2n$ локальных экстремумов $\{x_i(\Gamma)\}_{i=1}^{2n}$ и при этом $P^\Gamma(x_i(\Gamma)) = \gamma_i$, $i = 1, \ldots, 2n$.*

Лемма 2. *Для каждого $1 \leq i \leq 2n$ функция, сопоставляющая набору Γ число $x_i(\Gamma)$, непрерывна.*

Выведем теорему из лемм 1 и 2. Обозначим $Q(\eta_i) = \gamma_i$, $1 \leq i \leq 2n$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma_j > 0$. Согласно лемме 2 существует такое $\varepsilon > 0$, что точки локальных экстремумов $\{y_i\}_{i=1}^{2n}$ полинома P, для которого $P(y_i) = \gamma_i$, $i \neq j$, и $P(y_j) = \widehat{\gamma}_j$, где $\widehat{\gamma}_j - \gamma_j < \varepsilon$ (такой полином существует по лемме 2), удовлетворяют неравенствам $\eta_{i-1} < y_i < \eta_{i+1}$, $i \neq j$. Покажем, что для этих полиномов теорема справедлива. Доказывать будем от противного: если утверждение теоремы нарушается, то полином $P-Q$, который, очевидно, не равен нулю, имеет более $2n$ нулей. Предварительно установим, что между точками η_i и y_i, где $1 < i < j$ или $j < i < 2n$ есть нуль разности $P - Q$. Если $\eta_i = y_i$, то это ясно. Пусть $\eta_i \neq y_i$ и для определенности $\eta_i < y_i$ и η_i — локальный минимум Q. Поскольку $y_i < \eta_{i+1}$ и Q возрастает на $[\eta_i, \eta_{i+1}]$ от γ_i до γ_{i+1} (в силу того, что $\eta_1, \ldots, \eta_{2n}$ — единственные точки экстремума полинома Q), то $Q(y_i) - \gamma_i > 0$. Но $\gamma_i = P(y_i)$ и поэтому $(P-Q)(y_i) < 0$. По аналогичным соображениям $P(\eta_i) - \gamma_i = P(\eta_i) - Q(\eta_i) > 0$. Следовательно, у $P-Q$ есть нуль на (η_i, y_i).

Предположим теперь, что утверждение теоремы нарушается и, например, $\eta_i \geq y_i$ для $1 < i < j$. Пусть i_0 — максимальный из таких номеров i. Покажем, что на интервале (y_{i_0}, y_{i_0+1}) есть нуль разности $P-Q$. Пусть сначала $i_0 < j-1$ и для определенности η_{i_0} — локальный минимум Q. Полином Q возрастает на $[\eta_{i_0}, \eta_{i_0+1}]$ от γ_{i_0} до γ_{i_0+1}, а $y_{i_0} < \eta_{i_0+1}$ и поэтому $0 < Q(y_{i_0}) - \gamma_{i_0} = Q(y_{i_0}) - P(y_{i_0})$. Аналогично $0 < \gamma_{i_0+1} - Q(y_{i_0+1}) = P(y_{i_0+1}) - Q(y_{i_0+1})$ и тем самым у разности $P - Q$ есть нуль на (y_{i_0}, y_{i_0+1}). Пусть теперь $i_0 = j-1$. Допустим, что $y_j < \eta_j$. Так как Q возрастает на $[\eta_{j-1}, \eta_j]$ от γ_{j-1} до γ_j, то $0 < Q(y_{j-1}) - \gamma_{j-1} = Q(y_{j-1}) - P(y_{j-1})$. Далее, по предположению $P(y_j) > Q(\eta_j) > Q(y_j)$, т. е. $Q(y_i) - P(y_j) < 0$ и значит, на интервале (y_{j-1}, y_j) есть нуль разности $P - Q$. Случай $y_j > \eta_j$ рассматривается совершенно аналогично.

Если утверждение теоремы нарушается для номеров $j < i \leq 2n$, то рассуждения точно такие же.

Итак, показано, что у разности $P-Q$ есть $2n-2$ нуля между точками η_i, y_i, $i = 2, \ldots, j-1, j+1, \ldots, 2n$, один нуль на интервале (y_{i_0}, y_{i_0+1}) и, по условию теоремы, двукратный нуль в точке y_1, т. е. ненулевой полином $P-Q$ имеет по крайней мере $2n+1$ нуль, что невозможно. Таким образом, теорема доказана для таких полиномов P и Q, что $\widehat{\gamma}_j > \gamma_j$, но $\widehat{\gamma}_j < \gamma_j + \varepsilon$. Обозначим через

Γ верхнюю грань тех $\widehat{\gamma}_j$, для которых утверждение теоремы остается справедливым. Покажем, что $\Gamma = +\infty$. Действительно, допустим, что Γ конечно. Тогда для полиномов P и Q, где $P(y_j) = \Gamma$ будем иметь: $y_i \leq \eta_i$, если $1 < i < j$ и $y_i \geq \eta_i$, если $j < i \leq 2n$. Но неравенства должны быть строгими, ибо если $y_i = \eta_i$ для какого-нибудь i, то разность $P - Q$ в этой точке будет иметь двукратный нуль и как и раньше получим, что ненулевой полином $P - Q$ имеет более $2n$ нулей. Итак, $\Gamma = +\infty$ и это доказывает теорему.