О точных константах Джексона

Васильев С.Н. (Екатеринбург, Россия)

Пусть $L^2(\mathbb{T})$ есть пространство 2π-периодических комплекснозначных функций и $L^2(\mathbb{R})$ есть пространство комплекснозначных функций на вещественной оси, суммируемых с квадратом. Пусть

$$E_n(f)_{L^2(\mathbb{T})} = \inf\{\|f-g\|L^2(\mathbb{T}) :\ g \in T_n\}$$

– величина наилучшего приближения функции $f \in L^2(\mathbb{T})$ подпространством T_n тригонометрических полиномов $g(x) = \sum_{k=-n}^{n} g_k e^{ikx}$ степени не выше n с комплексными коэффициентами g_k, и

$$E_\sigma(f)_{L^2(\mathbb{R})} = \inf\{\|f-g\|_{L^2(\mathbb{R})} : g \in G_\sigma\}$$

есть величина наилучшего приближения функции $f \in L^2(\mathbb{R})$ классом G_σ функций экспоненциального типа σ.

Символом $\mathcal{M} = \{\mu_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ обозначим ненулевой набор комплексных чисел μ_j, такой, что $\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\mu_j| < \infty$. По набору $\mathcal{M}$ определим разностный оператор $\Delta_t^{\mathcal{M}} f(x) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \mu_j f(x+jt)$ и модуль непрерывности

$$\omega_{\mathcal{M}}(f,\delta) = \sup\left\{\|\Delta_t^{\mathcal{M}} f\| :\ |t| \le \delta\right\},$$

где норма берется в пространстве $L^2(\mathbb{T})$ или $L^2(\mathbb{R})$ в зависимости от рассматриваемого случая. Конечному набору $\mathcal{M}_m = \left\{\mu_j = (-1)^{m-j} C_m^j\right\}_{j=0}^{m}$ (все остальные коэффициенты μ_j равны нулю) соответствует классический модуль непрерывности $\omega_{\mathcal{M}_m}(f,\delta) = \omega_m(f,\delta)$ порядка m.

В 1967 г. Н.И.Черных [1] доказал неравенство

$$E_{n-1}(f)_{L^2(\mathbb{T})} \le \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\,\omega_m\left(f, \frac{2\pi}{n}\right), \quad f \in L^2(\mathbb{T}), \quad n, m \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

причем для фиксированных $n, m \in \mathbf{N}$, $n > m$, константу $1/\sqrt{C_{2m}^m}$ нельзя уменьшить одновременно для всех $f \in L^2(\mathbb{T})$. В 1970 г. В.Ю. Попов [2] доказал неравенство

$$E_\sigma(f)_{L^2(\mathbb{R})} \le \frac{1}{\sqrt{C_{2m}^m}}\,\omega_m\left(f, \frac{2\pi}{\sigma}\right), \quad f \in L^2(\mathbb{R}), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \sigma \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

причем константу $1/\sqrt{C_{2m}^m}$ нельзя уменьшить при фиксированных $m \in \mathbb{N}$, $\sigma > m$. Подобные оценки величины наилучшего приближения функции f через значение модуля непрерывности $\omega_{\mathcal{M}}(f,\delta)$ в некоторой точке δ называют неравенствами Джексона, а наименьшую константу перед модулем непрерывности в правой части — константой Джексона.

Здесь будут приведены точные неравенства Джексона для всех определенных выше модулей непрерывности. Для классических модулей непрерывности приведенные результаты усиливают неравенства (1) и (2).

Теорема 1. *Для любого набора $\mathcal{M}$, существует такая константа $\gamma > 0$, зависящая только от $\mathcal{M}$, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ верно равенство*

$$E_{n-1}(f)_{L^2(\mathbb{T})} \le \frac{\omega_{\mathcal{M}}\left(f, \frac{\gamma}{n}\right)}{\max\left\{\sqrt{\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\mu_j|^2}, \left|\sum_{j\in\mathbf{Z}} \mu_j\right|\right\}} \quad f \in L^2(\mathbb{T})$$

и при каждом положительном $\sigma \in \mathbb{R}$ верно неравенство

$$E_\sigma(f)_{L^2(\mathbb{R})} \le \frac{\omega_{\mathcal{M}}\left(f, \frac{\gamma}{\sigma}\right)}{\max\left\{\sqrt{\sum_{j\in\mathbf{Z}} |\mu_j|^2}, \left|\sum_{j\in\mathbf{Z}} \mu_j\right|\right\}} \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Для классических модулей непрерывности порядка m, порождаемых наборами $\mathcal{M}_m$, несложно подсчитать, что $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2 = C_{2m}^m$ и $\left|\sum_{j\in\mathbf{Z}}\mu_j\right| = 0$. При этом константу γ в теореме 1 для всех наборов $\mathcal{M}_m$ можно оценить сверху величиной $\frac{7}{5}\pi$, таким образом, теорема 1 усиливает неравенства (1) и (2). Точность неравенств теоремы 1 следует из следующей теоремы.

Теорема 2. *Для любого набора $\mathcal{M}$, вещественного $\delta > 0$ и фиксированных $n \in \mathbb{N}$ и $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$ верны неравенства*

$$\sup_{f\in L^2(\mathbb{T})}\frac{E_{n-1}(f)_{L^2(\mathbb{T})}}{\omega_{\mathcal{M}}(f,\delta)} \geq \frac{1}{\max\left\{\sqrt{\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2}, \left|\sum_{j\in\mathbf{Z}}\mu_j\right|\right\}},$$

$$\sup_{f\in L^2(\mathbb{R})}\frac{E_{\sigma}(f)_{L^2(\mathbb{R})}}{\omega_{\mathcal{M}}(f,\delta)} \geq \frac{1}{\max\left\{\sqrt{\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2}, \left|\sum_{j\in\mathbf{Z}}\mu_j\right|\right\}}.$$

Аргумент модуля непрерывности, при котором достигается глобальный минимум константы Джексона, называется "точкой Черных". Из теорем 1 и 2 видно, что значение "точки Черных" оценивается как $\frac{\gamma}{n}$. Когда $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2 \leq \left|\sum_{j\in\mathbf{Z}}\mu_j\right|$, константа $\gamma = 0$. В обратном случае, когда $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2 > \left|\sum_{j\in\mathbf{Z}}\mu_j\right|$, значение точки Черных найдено только для классического модуля непрерывности первого порядка и для некоторых частных случаев. Следующая теорема говорит об асимптотической оценке снизу для точки Черных, то есть, что её величина не может стремиться к нулю бытрее, чем $1/n$.

Теорема 3. *Если набор $\mathcal{M}$ такой, что $\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2 > \left|\sum_{j\in\mathbf{Z}}\mu_j\right|$ то для любой последовательности δ_n, такой что $n\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L^2(\mathbb{T})}\frac{E_{n-1}(f)_{L^2(\mathbb{T})}}{\omega_{\mathcal{M}}(f,\delta_n)} > \frac{1}{\sqrt{\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2}},$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L^2(\mathbb{R})}\frac{E_{\sigma}(f)_{L^2(\mathbb{R})}}{\omega_{\mathcal{M}}(f,\delta_n)} > \frac{1}{\sqrt{\sum_{j\in\mathbf{Z}}|\mu_j|^2}}.$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Черных Н.И. *О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2.* // Матем. заметки, 1967. – Т. 2, вып.5. – С. 513–522.

2. Попов В.Ю. *О наилучших среднеквадратичных приближениях целыми функциями экспоненциального типа* // Известия Вузов, Математика. 1972, №. 6(121), С. 65–73.

Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ (проект 02-01-00782), целевой программы поддержки междисциплинарных проектов между УрО РАН и СО РАН, и гранта президента РФ МК-2518.2004.1.