# Асимптотика средних поперечников классов функций на неограниченных областях

Магарил-Ильяев Г.Г. (Москва, Россия)

Пусть $G$ — неограниченное открытое подмножество $\mathbb{R}^d$, $1 \le q \le \infty$, $\alpha > 0$, $\triangle_\alpha = [-\alpha, \alpha]^d$ и оператор $P_\alpha : L_q(G) \to L_q(G \cap \triangle_\alpha)$ определен по правилу: $P_\alpha x(\cdot) = x(\cdot)|_{G \cap \triangle_\alpha}$ ($P_\alpha x(\cdot) = 0$, если $G \cap \triangle_\alpha = \emptyset$). Пусть $L$ — подпространство в $L_q(G)$ и $BL$ — единичный шар в $L$. Для каждых $\varepsilon > 0$ и $\alpha > 0$ рассмотрим величину

$$K_\varepsilon(\alpha, L, L_q(G)) = \min\{n \in \mathbb{Z}_+ \mid d_n(P_\alpha(BL), L_q(G \cap \triangle_\alpha)) < \varepsilon\},$$

где $d_n(C, X)$ — $n$-поперечник по Колмогорову множества $C$ в метрике $X$. Другими словами, $K_\varepsilon(\alpha, L, L_q(G))$ — наименьшая размерность подпространства в $L_q(G \cap \triangle_\alpha)$, которое аппроксимирует $P_\alpha(BL)$ с точностью до $\varepsilon$.

Пусть $\varphi(\cdot)$ — неубывающая положительная функция на $(0, \infty)$. Величина

$$\dim(L, L_q(G), \varphi(\cdot)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \liminf_{\alpha \to \infty} \frac{K_\varepsilon(\alpha, L, L_q(G))}{\varphi(\alpha)}$$

называется $\varphi$-средней размерностью $L$ в $L_q(G)$.

Пусть $C$ — центрально симметричное подмножество $L_q(G)$ и $\nu \ge 0$. Величина

$$d_\nu(C, L_q(G), \varphi(\cdot)) = \inf_L \sup_{x(\cdot) \in C} \inf_{y(\cdot) \in L} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_q(G)},$$

где нижняя грань берется по всем подпространствам $L \subset L_q(G)$ таким, что $\dim(L, L_q(G), \varphi(\cdot)) \le \nu$, называется $\varphi$-средним $\nu$-поперечником по Колмогорову множества $C$ в $L_q(G)$.

Пусть $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{N}^d$ и $1 \le p \le \infty$. Обозначим через $\mathcal{W}_p^{\mathbf{r}}(G)$ анизотропное соболевское пространство функций $x(\cdot) \in L_p(G)$, у которых обобщенные частные производные $D_i^{r_i} x(\cdot)$ порядка $r_i$ по переменным $t_i$, $i = 1, \dots, d$, принадлежат $L_p(G)$. Это банахово пространство с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{W}_p^{\mathbf{r}}(G)} = \|x(\cdot)\|_{L_p(G)} + \sum_{i=1}^d \|D_i^{r_i} x(\cdot)\|_{L_p(G)}.$$

Единичный шар этого пространства обозначим $B\mathcal{W}_p^{\mathbf{r}}(G)$.

Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \dots, l_d)$ — вектор с положительными компонентами. Относительно понятия "$G$ удовлетворяет сильному условию $\mathbf{l}$-рога" см. О. В. Бесов, В. П. Ильин, С. М. Никольский. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М.: Наука, 1975, с. 117.

**Теорема 1.** *Пусть* $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_d) \in \mathbb{N}^d$, $G$ — *неограниченное выпуклое открытое подмножество* $\mathbb{R}^d$, *удовлетворяющее сильному условию* $\mathbf{r}$-*рога и* $\varphi(\alpha) = \operatorname{mes}(G \cap \triangle_\alpha)$. *Тогда, если* $1 < p = q < \infty$ *или* $1 < p < q \le 2$ *и* $\left(\sum_{i=1}^d 1/r_i\right)^{-1} > 1/p - 1/q$, *то*

$$d_\nu(B\mathcal{W}_p^{\mathbf{r}}(G), L_q(G), \varphi(\cdot)) \asymp \nu^{-(1/r_1 + \dots + 1/r_d)^{-1} + 1/p - 1/q}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №02-01-39012 и №02-01-00386), программ государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-304.2003.1) и "Университеты России" (УР.04.03.067), а также при поддержке U.S. CRDF-R.F. Ministry of Education Award VZ-0100-0.