Точные неравенства типа Колмогорова и экстремальные задачи анализа

Кофанов В.А. (Днепропетровск, Украина)

Установлены точные неравенства типа Колмогорова

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_1^{1-k/r}} \|f\|_1^{1-k/r} \left\|f^{(r)}\right\|_\infty^{k/r}, \quad k,r \in \mathbf{N}, \ \ k<r, \tag{1}$$

для 2π-периодических функций $f \in L_\infty^r$ в следующих случаях:

1) $q=1$,

2) $q=2$, $k>r/2$,

3) $q \in [1,3]$, $k=r-1$,

4) $q \in [1,3/2]$, $k=r-2$,

где φ_r – совершенный сплайн Эйлера порядка r.

Для функций $f \in L_\infty^r$ получены также точные неравенства типа Колмогорова следующего вида

$$\left\|f^{(k)}\right\|_q \le \frac{\|\varphi_r\|_q}{|||\varphi_{r-k}|||_p^{\frac{r-k}{r+1/p}}} |||f|||_p^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left\|f^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}}, \quad k,r \in \mathbf{N}, \ \ k<r, \tag{2}$$

для любых $q \in [1,\infty]$, $p \in (0,\infty]$, где

$$|||f|||_p := \sup_{a,b \in \mathbf{R}} \left\{ E_0(f)_{L_p[a,b]} \ : \ f'(t) \ne 0 \quad \forall t \in (a,b) \right\},$$

а $E_0(f)_{L_p[a,b]} := \inf_{c \in \mathbf{R}} \|f-c\|_{L_p[a,b]}$.

Доказательство неравенства (1) основано на новой теореме сравнения Σ-перестановок Корнейчука, а доказательство неравенства (2) – на усилении теоремы сравнения Колмогорова.

Рассмотрены разнообразные приложения неравенств (1) и (2) к таким задачам как: получение точных неравенств типа Бернштейна для тригонометрических полиномов и полиномиальных сплайнов, приближение одного класса функций другим функциональным классом, оценка характеристик типа K-функционала, исследование свойств экстремальных подпространств в задаче о поперечнике по Колмогорову.