О вложении и приближении пересечения множеств и функциональных классов

Галеев Э.М. (Москва, Россия)

В 1975 году Владимир Михайлович Тихомиров на семинаре по теории приближений[1] предложил для решения следующую задачу о вложении классов функций с несколькими ограниченными производными. Пусть про функцию известно, не только, как обычно, что ее какая-то r-я производная в метрике L_p ограничена ($\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_p} \le \beta$), а известна ограниченность ее нескольких производных в различных метриках, то есть, $\|x^{(r^i)}(\cdot)\|_{L_{p^i}} \le \beta_i$, $i = 1, \dots, m$. Найти вложение пересечения классов функций $W_{\overline{p}}^{\overline{r}} = \bigcap_{i=1}^{m} W_{p^i}^{r^i}$ в класс W_q^γ. В качестве функциональных классов можно рассматривать, например, классы периодических функций одной и нескольких переменных.

Поставленная задача была решена автором в 1975 г вначале для периодических функций одной переменной, а затем для нескольких переменных с дробными производными и смешанными нормами. Были получены необходимые и достаточные условия вложения.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{1} < p^i, q < \infty$. *Тогда* $W_{\overline{p}}^{\overline{r}} \subset W_q^\gamma$ *тогда и только тогда, когда* $(\frac{1}{q}, \gamma) \in G = \operatorname{conv}\{(\frac{1}{p^i}), r^i),\ i = 1, \dots, m\} + \operatorname{cone}\{(1,0), (-1,-1)\}$.

В дальнейшем в работах учеников В. М. Тихомирова (автора, Динь Зунга, А. А. Китбаляна, Г. Г. Магарил-Ильяева, С. В. Пухова, О. В. Геворкяна и др.) рассматривались подобные вопросы вложения и приближения классов. Найдены всевозможные поперечники различных классов функций, конечномерных множеств разной природы.

Оценка сверху в сформулированной теореме следует из мультипликативных неравенств. Первые неравенства подобного типа были получены О. В. Бесовым. Расширение этих неравенств дает достаточность условий вложения. Для доказательства необходимости условий вложения строится специальная функция $x(t) = a(D_{N+[N^{\gamma'}]}(t) - D_N(t))$, являющаяся некоторой разностью ядер Дирихле, принадлежащая классу $W_{\overline{p}}^{\overline{r}}$. Здесь $D_N(t) = \sum_{|k|=1}^{N} e^{ikt}$ — ядро Дирихле, $0 < \gamma' < 1$. Такая разность ядер Дирихле в дальнейшем использовалась для доказательства необходимости условий вложения и оценок снизу приближения как на $\mathbf{T}^d$, так и на $\mathbf{R}^d$ в работах автора, Г. Г. Магарил-Ильяева, Динь Зунга и других.

При приближении пересечения классов периодических функций многих переменных важным этапом стала работа Динь Зунга о нахождении порядка числа точек в логарифмически полиэдральном множестве.

Таким образом, поставленная В. М. Тихомировым задача, оказала существенное влияние на развитие теории приближений и дала возможность стать математиками многим его ученикам.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты №02-01-39012 ГФЕН, №02-01-00386), Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ-304.2003.1).

[1] Участниками семинара по теории приближений кроме автора заметки были в то время студенты и аспиранты В. М. Тихомирова: А. П. Буслаев, Динь Зунг, А. И. Камзолов, Г. Г. Магарил-Ильяев, С. В. Пухов, М. И. Стесин.