О вейвлет-анализе на полупрямой

Фарков Ю.А. (Москва, Россия)

Для фиксированного натурального $p \geq 2$ пусть $\oplus_p$ обозначает операцию "сложения" по модулю p на положительной полупрямой $\mathbf{R}_+$ и пусть $\{w_m\}$ – соответствующая система Уолша – Прайса (см., например, [1]). Через $\ominus_p$ обозначается операция, обратная $\oplus_p$, а через $\chi_{[0,1)}$ – характеристическая функция полуинтервала [0,1). В докладе будет рассказано, как для любых целых $p, n \geq 2$ определить коэффициенты $\{c_m\}$ и множество $\mathbf{N}(p,n) \subset \mathbf{N}$ такие, что функция φ, заданная формулой

$$\varphi(t) = p^{1-n}\chi_{[0,1)}(p^{1-n}t)(1 + \sum_{m \in \mathbf{N}(p,n)} c_m w_m(p^{1-n}t)), \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{1}$$

удовлетворяет уравнению

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^{p^n-1} a_k \varphi(pt \ominus_p k)$$

и генерирует кратномасштабный анализ в L^2–пространстве на $(\mathbf{R}_+, \oplus_p)$. Коэффициенты $\{a_k\}$ и $\{c_m\}$ могут быть вычислены с помощью быстрых алгоритмов по набору из $p^n - p$ (вообще говоря, комплексных) параметров, удовлетворяющих некоторому "условию ортогональности". Для $p = 2$ вейвлет ψ, ассоциированный с масштабирующей функцией φ, находится по формуле

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{p^n-1} (-1)^k \bar{a}_k \varphi(2t \ominus_2 (k \ominus_2 1)).$$

При $p > 2$ функции φ соответствуют $p-1$ вейвлета $\psi_1, \ldots, \psi_{p-1}$ в $L^2(\mathbf{R}_+)$.

Предполагается изложить также метод оценки гладкости масштабирующих функций вида (1), приводящий при малых значениях p и n к точным оценкам. Например, при $p = n = 2$ гладкость функции φ характеризуется последовательностью $\Omega_j(\varphi) := \sup\{|\varphi(x) - \varphi(t)| \,:\, x, t \in [0,2],\ x \ominus_p t \in [0, 2^{-j})\}, \quad j \in \mathbf{N}$. Установлено, в частности, что если φ задана формулой

$$\varphi(t) = (1/2)\chi_{[0,1)}(t/2)(1 + a\sum_{j=0}^{\infty} b^j w_{2^{j+1}-1}(t/2)), \quad t \in \mathbf{R}_+, \tag{2}$$

где $a \neq 0$, $|a|^2 + |b|^2 = 1$, то имеет место точная по порядку оценка $\Omega_j(\varphi) \leq C2^{-\mu j}$, где $\mu = \log_2(1/|b|)$ (сравните с [2, с.319]). Отметим, что формула (2) была найдена Лэнгом [3] и получается из (1) при $p = n = 2$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А.* Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения. М.: Наука, 1987.

[2] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

[3] *Lang W.C.* Fractal multiwavelets related to the Cantor dyadic group // Int. J. Math. and Math. Sci. 1998. V.21. P. 307-314.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №02-01-00386).