Обобщенное решение возмущенного включения

Булгаков А.И., Беляева О.П., Григоренко А.А. (Тамбов, Россия)

Рассмотрим в пространстве $\mathbf{C}^n[a,b]$ включение

$$x \in \Psi(x) + V\Phi(x), \tag{1}$$

где $\Psi(\cdot)$, $\Phi(\cdot)$ – многозначные отображения, $V : \mathbf{L}^n[a,b] \to \mathbf{C}^n[a,b]$ – линейный непрерывный интегральный оператор. Включение (1) рассматривалось в работе [1] в предположение, что многозначное отображение $\Phi(\cdot)$ имеет в пространстве $\mathbf{L}^n[a,b]$ замкнутые и выпуклые по переключению значения. Эта работа еще раз подтверждает высказанное профессором В.М. Тихомировым предложение о том, что выпуклость по переключению является специфическим понятием пространства суммируемых функций, которое играет такую же фундаментальную роль как понятие выпуклость множества в банаховом пространстве. Выпуклость по переключению неявно используется во многих разделах математики: в теории оптимизации, дифференциальных включениях и т.д.

В докладе не предполагается, что отображение $\Phi(\cdot)$ имеет выпуклые по переключению значения. В связи с этим все существующие в настоящее время методы исследований многозначных включений нельзя применить даже для вопроса разрешимости возмущенного включения (1). Кроме того, в этом случае нарушается равенство между множествами квазирешений включения (1) и решений "овыпукленного" включения (1), впервые установленное для обыкновенных дифференциальных включений Т. Важевским. В следствии этого не выполняются фундаментальные свойства множеств решений: принцип плотности и "бэнг-бэнг" принцип. Отметим, что эту ситуацию нельзя исправить никакой непрерывностью отображения $\Phi(\cdot)$. В докладе утверждается, что выход из такого положения можно найти с помощью введения обобщенного решения включения (1).

Под *обобщенным решением* включения (1) будем понимать функцию $x \in \mathbf{C}^n[a,b]$, для которой существуют $v \in \Psi(x)$ и $z \in \overline{\Pi}\Phi(x)$, что справедливо равенство $x = v + Vz$, где $\overline{\Pi}\Phi(x)$ – выпуклая по переключению замкнутая оболочка множества $\Phi(x)$, $\Pi\Phi(x) = \{y \in \mathbf{L}^n[a,b] : \exists\, m,$ что $y = \chi(e_1)y_1 + \ldots + \chi(e_m)y_m$, где $y_i \in \Phi(x)$, $e_i \subset [a,b]$, измеримы, $e_i \cap e_j = \oslash$, если $i \neq j$ и $\cup_{i=1}^m e_i = [a,b]$, $i = 1,2,\ldots,m\}$, $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция соответствующего множества.

Обобщенное решение включения (1) несколько отличается от классического определения обобщенного решения А.Ф. Филиппова для разрывных дифференциальных уравнений, поскольку выпуклая по переключению оболочка множества, вообще говоря, может и не быть выпуклым множеством пространства суммируемых функций. Кроме того, если отображение $\Phi(\cdot)$ имеет выпуклые по переключению образы, то обобщенное решение совпадает с решением.

Литература

1. Булгаков А.И., Ткач Л.И. Возмущение выпуклозначного оператора многозначным отображением типа Гаммерштейна с невыпуклыми образами и краевые задачи для функционально-дифференциальных включений // Матем. сб. 1998. Т. 189. 6. С. 3–32.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 04-01-00324), МОиН РФ (проект Е02-1.0-212).