Об одной конструкции несепарабельных всплесков

Бабенко В.Ф. (Днепропетровск, Украина),
Лигун А.А., Шумейко А.А. (Днепродзержинск, Украина)

Традиционно рассматриваемые системы всплесков используемых для обработки двумерных данных основаны на тензорном произведении одномерных всплесков. В свою очередь, одномерные системы всплесков обладают бинарной структурой, то есть весь массив данных разбивается на пары значений, один из которых обрабатывается масштабирующим фильтром, второй - всплесковым. Для обработки двумерных данных предлагается система существенно двумерных фильтров (несепарабельных), которая естественным образом обобщает традиционную схему всплеск-преобразований.

Обозначим

$$Z^+ = \{(i,j) | (i,j) \in Z^2 : i+j = 2k, k \in Z\} \quad \text{и} \quad Z^- = Z \setminus Z^+.$$

Через $\Re$ обозначим множество массивов $A = \{a_{i,j}\}$ с конечным носителем, обладающим свойством симметрии $a_{j,i} = a_{i,-j} = a_{-i,j} = a_{i,j}$. Сдвиг массива A на (ν,μ) будем обозначать через $A_{\nu,\mu} = \{a_{i-\nu,j-\mu}\}_{(i,j)\in Z^2}$. Пусть $\langle A,B\rangle = \sum_{(i,j)\in Z^2} a_{i,j} b_{i,j}$ и для массива $H \in \Re$ положим

$$H^+ = \begin{cases} h_{i,j}, & (i,j) \in Z^+, \\ 0, & (i,j) \in Z^- \end{cases} \quad \text{и} \quad H^- = \begin{cases} 0, & (i,j) \in Z^+, \\ h_{i,j}, & (i,j) \in Z^-, \end{cases}$$

кроме того, пусть $\mathbb{H}^+ = H^+ + H^-$ и $\mathbb{H}^- = H^+ - H^-$.

Массивы $\mathbb{H}^+$ и $\mathbb{H}^-$ по сути являются масштабирующим и, соответственно, всплесковым фильтрами.

Будем говорить, что массивы H и G образуют биортогональную пару, если для всех $(n,m), (\nu,\mu) \in Z^+$ имеет место соотношение

$$\left\langle \mathbb{H}^+_{n,m}, \mathbb{G}^+_{\nu,\mu} \right\rangle = \begin{cases} 1, & (n,m) = (\nu,\mu), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Для биортогональной пары $H, G \in \Re$ положим

$$\mathbb{U}_{\nu,\mu} = \begin{cases} G^+_{\nu,\mu} - H^-_{\nu,\mu}, & (\nu,\mu) \in Z^+, \\ H^+_{\nu,\mu} + G^-_{\nu,\mu}, & (\nu,\mu) \in Z^-, \end{cases} \quad \text{и} \quad \mathbb{V}_{\nu,\mu} = \begin{cases} H^+_{\nu,\mu} - G^-_{\nu,\mu}, & (\nu,\mu) \in Z^+, \\ G^+_{\nu,\mu} + H^-_{\nu,\mu}, & (\nu,\mu) \in Z^-. \end{cases}$$

Теорема 1. *Если F массив с конечным носителем и $H, G \in \Re$ биортогональная пара, то справедливо равенство*

$$F = \left\{ \left\langle \left\langle F, \mathbb{H}_{\nu,\mu} \right\rangle, \mathbb{U}_{\nu,\mu} \right\rangle \right\}_{(\nu,\mu)\in Z} = \left\{ \left\langle \left\langle F, \mathbb{G}_{\nu,\mu} \right\rangle, \mathbb{V}_{\nu,\mu} \right\rangle \right\}_{(\nu,\mu)\in Z}.$$