О неравенствах типа Колмогорова для операторов, действующих в гильбертовы пространства

Бабенко В.Ф. (Днепропетровск, Украина),
Лигун А.А., Шумейко А.А. (Днепродзержинск, Украина)

Пусть W - полное сепарабельное евклидово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\| = (\cdot,\cdot)^{1/2}$; $\{e_k\}_{k\in M}$, $M \subset \mathbb{Z}^d$, - ортонормированный базис в W. Пусть также X - линейное нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$ и заданы операторы

$$A : D(A) \to X, \quad D(A) \subset W,$$

$$B_j : D(B) \to W, \quad D(B_j) \subset W, \; j = 1 \dots m,$$

такие, что $\forall k \in M \quad e_k \in D(A) \cap \left(\bigcap_{j=1}^m D(B_j)\right)$, причем операторы B_j сохраняют ортогональность, т.е. $B_j e_k \perp B_j e_l$ для $k \neq l$. Обозначим через W^{B_j} множество элементов $x \in W$ таких, что $\sum\limits_{k\in M} |(x,e_k)|^2 \|B_j e_k\|^2 < \infty$. Для $t = (t_1,\dots,t_m)$, $t_j > 0$, $j = 1,\dots,m$, определим оператор $T_t : W \to X^*$:

$$T_t x = \sum_{k\in M} (x,e_k)\, Ae_k \left(1 + \sum_{j=1}^m t_j \|B_j e_k\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для оператора T_t сопряженный оператор $T_t^* : X^* \to W$ задается равенством

$$T_t^* f = \sum_{k\in M} \overline{\langle f, Ae_k\rangle}\, e_k \left(1 + \sum_{j=1}^m t_j \|B_j e_k\|^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Нами доказана

Теорема 1. *Для любого $x \in \bigcap_{j=1}^m W^{B_j}$ при любых заданных положительных числах $t_1,\dots,t_m$ имеет место неулучшаемое неравенство*

$$\|Ax\| \le \|T_t^*\|_{X^*\to W} \left(\|x\|^2 + \sum_{j=1}^m t_j \|B_j x\|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 1 дает единый подход к доказательству неулучшаемых неравенств типа Харди - Литтлвуда - Полиа для L_2 - норм "промежуточных" производных функций одной и многих переменных, а также неравенств типа Тайкова - Шадрина, оценивающих L_∞ - нормы "промежуточных" производных функций одной и многих переменных через L_2 - нормы самих функций и "старших" производных. Эта теорема позволяет также получить новые неулучшаемые неравенства для "промежуточных" производных функций одной и многих переменных.