Вырожденные задачи нелинейного анализа и теории экстремума

Арутюнов А.В. (Москва, Россия)

Рассмотрим классическую экстремальную задачу с ограничениями

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, k, \quad x \in X.$$

Здесь X — нормированное пространство (возможно конечномерное), гладкие функции f_i задают ограничения, а f_0 - минимизируемый функционал. Пусть x_0 — точка локального минимума. Известно, что если точка x_0 вырождена (анормальна), то есть градиенты ограничений $f_i'(x_0)$ линейно зависимы, то классический принцип Лагранжа вырождается (не несет содержательной информации), а классические необходимые условия второго порядка не выполняются.

В докладе обсуждается это явление вырождения и излагается теория необходимых условий первого и второго порядков одинаково содержательная как для вырожденных, так и для невырожденных задач. Эти результаты являются развитием принципа Лагранжа. Обсуждается обобщение этих результатов на теорию оптимального управления.

Аналогичная проблема возникает при исследовании системы нелинейных уравнений $F(x) = y$, где F — гладкое отображение одного банахова пространства в другое. Если точка x_0 вырождена, то есть линейный оператор $F'(x_0)$ не является сюръективным (например, $F'(x_0) = 0$), то в точке x_0 классическая теорема об обратной функции неприменима. В докладе предлагается вариант теоремы об обратной функции, который применим и в вырожденных точках.