



Общероссийский математический портал

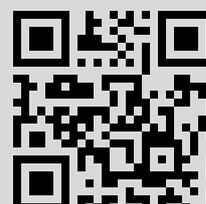
Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, Е. О. Сивкова, Наилучшая аппроксимация множества, элементы которого известны приближённо, *Фундамент. и прикл. матем.*, 2014, том 19, выпуск 5, 127–141

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 188.124.228.106

19 июля 2015 г., 19:49:24



Наилучшая аппроксимация множества, элементы которого известны приближённо*

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
Институт проблем передачи информации РАН
им. А. А. Харкевича
e-mail: magaril@mech.math.msu.su*

К. Ю. ОСИПЕНКО

*МАТИ — Российский государственный
технологический университет
им. К. Э. Циолковского,
Институт проблем передачи информации РАН
им. А. А. Харкевича
e-mail: kosipenko@yahoo.com*

Е. О. СИВКОВА

*Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики
e-mail: sivkova_elena@inbox.ru*

УДК 517.518.8

Ключевые слова: коэффициенты Фурье, преобразование Фурье, соболевский класс, экстремальная задача.

Аннотация

В работе решается задача о наилучшем (в точно определённом смысле) приближении с фиксированной точностью периодических функций и функций на прямой соответственно по неточно заданному конечному набору их коэффициентов Фурье и преобразованию Фурье на произвольном множестве конечной меры.

Abstract

G. G. Magaril-Ilyayev, K. Yu. Osipenko, E. O. Sivkova, The best approximation of a set whose elements are known approximately, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 19 (2014), no. 5, pp. 127–141.

This paper is concerned with the problem of the best (in a precisely defined sense) approximation with given accuracy of periodic functions and functions on the real line from, respectively, a finite tuple of noisy Fourier coefficients or noisy Fourier transform on an arbitrary set of finite measure.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12447, 14-01-00456, 14-01-00744).

Введение

Начнём с общей постановки задачи о наилучшем приближении с фиксированной точностью элементов данного класса при условии, что сами элементы известны приближённо. Пусть X — векторное пространство, W — непустое подмножество (класс) элементов в X . Пусть, далее, Y — нормированное пространство, $I: X \rightarrow Y$ — линейный оператор, $\delta \geq 0$. Элементы из W известны приближённо, а именно для каждого элемента $x \in W$ известен (мы «наблюдаем») элемент $y \in Y$, такой что $\|Ix - y\|_Y \leq \delta$ (если $\delta = 0$, то известен элемент Ix). Таким образом, информация об элементах из W определяется тройкой (Y, I, δ) .

Восстановить по данной информации значения некоторого линейного оператора $T: X \rightarrow Z$ на классе W с фиксированной точностью — это значит предъявить метод восстановления $\varphi: Y \rightarrow Z$, дающий нужную точность (погрешность) приближения, которая определяется следующим образом:

$$e(\delta, \varphi) = e(T, W, Y, I, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x \in W, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leq \delta}} \|Tx - \varphi(y)\|_Z.$$

Предположим, что пары (Y, I) можно выбирать из некоторого множества \mathcal{I} и при этом каждой такой паре (Y, I) поставлено в соответствие неотрицательное число $v(Y, I)$, называемое *объёмом используемой информации*. Нас интересует вопрос: какой минимальный объём информации нужен, чтобы по ней можно было восстановить значения оператора T на классе W с погрешностью, не превосходящей заданного числа ε ? Точнее, обозначая через $\Phi(Y)$ множество всех отображений из Y в Z , мы хотим для данных $\varepsilon > 0$ и $\delta \geq 0$ найти величину

$$V(\varepsilon, \delta) = \inf \{v(Y, I) \mid \text{найдётся } (\varphi, (Y, I)) \in \Phi(Y) \times \mathcal{I}, \text{ такой что } e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon\}$$

и те наборы $(\hat{\varphi}, (\hat{Y}, \hat{I}))$, на которых нижняя грань достигается. Такие наборы будем называть *оптимальными*.

Если множество тех $(\varphi, (Y, I)) \in \Phi(Y) \times \mathcal{I}$, для которых $e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon$, пусто, то полагаем $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$, и это означает, что по данной информации нельзя восстановить элементы из W с заданной точностью.

Данная постановка восходит к понятию ε -энтропии множества, величине, характеризующей наилучшее с точностью до ε приближение множества конечным числом элементов (см., например, [1]). Сама постановка является в определённом смысле обратной к задаче об оптимальном восстановлении функций из данного класса по их неточно заданному спектру. Подобные задачи рассматривались в ряде работ авторов (см. [2–7]).

1. Периодический случай

Пусть n — натуральное число и $W_2^n(\mathbb{T})$ — соболевский класс 2π -периодических функций $x(\cdot)$, у которых $(n - 1)$ -я производная абсолютно непрерывна и

$\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1$, где

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Коэффициенты Фурье $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ задаются формулами

$$c_j = c_j(x(\cdot)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} x(t) e^{-ijt} dt, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Ставится следующая задача. Пусть для любого конечного набора целых чисел имеется возможность измерить (точно или приближённо) коэффициенты Фурье каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ с номерами из данного набора. Мы хотим по этой информации восстановить сами элементы $x(\cdot)$ и их k -ю производную ($1 \leq k \leq n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{T})$ с фиксированной точностью, выбрав из всех таких наборов тот, который имеет минимальное число элементов.

Уточним постановку, приведя её в соответствие с общей схемой. Пусть X — пространство 2π -периодических функций, у которых $(n-1)$ -я производная абсолютно непрерывна, а n -я производная принадлежит $L_2(\mathbb{T})$, $W = W_2^n(\mathbb{T})$, $Z = L_2(\mathbb{T})$. Каждому конечному набору α целых чисел поставим в соответствие пару $(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha)$, где $N(\alpha)$ — число элементов в наборе, $l_\infty^{N(\alpha)}$ — пространство $\mathbb{C}^{N(\alpha)}$ векторов $y = (y_1, \dots, y_{N(\alpha)})$ с нормой $\|y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} = \max_{1 \leq i \leq N(\alpha)} |y_i|$ и

$I_\alpha: X \rightarrow l_\infty^{N(\alpha)}$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $x(\cdot)$ её коэффициенты Фурье с номерами из набора α . Итак, в нашем случае \mathcal{I} — это множество пар $(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha)$, занумерованное конечными подмножествами целых чисел, а информация $(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta)$ о функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ при $\delta = 0$ состоит в том, что мы знаем коэффициенты Фурье $x(\cdot)$ с номерами из α , а если $\delta > 0$, то мы располагаем $N(\alpha)$ числами, каждое из которых отличается от соответствующего коэффициента Фурье по модулю не более чем на δ . Полагаем $v(l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha) = N(\alpha)$.

Пусть $0 \leq k \leq n-1$, D^k — оператор k -го дифференцирования (D^0 — тождественный оператор) и $\varphi: l_\infty^{N(\alpha)} \rightarrow L_2(\mathbb{T})$ — метод восстановления. Его погрешность, согласно общей схеме, имеет вид

$$\begin{aligned} e(\delta, \varphi) &= e(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi) = \\ &= \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}), y \in l_\infty^{N(\alpha)} \\ \|I_\alpha x(\cdot) - y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}. \end{aligned}$$

В данном случае нас интересует величина

$$\begin{aligned} V(\varepsilon, \delta) &= \\ &= \inf \left\{ N(\alpha) \mid \text{найдётся } \left(\varphi, (l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha) \right) \in \Phi(l_\infty^{N(\alpha)}) \times \mathcal{I}, \text{ такой что } e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Кроме того, нас интересуют такие $\hat{\alpha}$ и $\hat{\varphi}$, что на наборах $(\hat{\varphi}, (l_\infty^{N(\hat{\alpha})}, I_{\hat{\alpha}}))$ достигается нижняя грань. В этом случае мы говорим, что $\hat{\alpha}$ — оптимальный набор, а $\hat{\varphi}$ — оптимальный метод.

Положим при $\delta > 0$

$$N_\delta = \max \left\{ N \in \mathbb{Z}_+ \mid 2\delta^2 \sum_{j=0}^N j^{2n} < 1 \right\}$$

и $N_0 = +\infty$, а также для каждого $m \in \mathbb{Z}_+$ обозначим

$$\varepsilon_m = \left(\frac{1}{(m+1)^{2(n-k)}} + 2\delta^2 \sum_{j=0}^m j^{2k} \left(1 - \left(\frac{j}{m+1} \right)^{2(n-k)} \right) \right)^{1/2}.$$

Нетрудно убедиться, что если $\delta > 0$, то $1 = \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \dots > \varepsilon_{N_\delta}$.

Теорема. Пусть n — натуральное число, k — целое число, $0 \leq k \leq n-1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда если $\varepsilon \geq 1$ и $k \geq 1$, то $V(\varepsilon, \delta) = 0$. Если $\varepsilon \geq 1$ и $k = 0$, то $V(\varepsilon, \delta) = 1$, а оптимальное множество — $\alpha = \{0\}$. Если $\varepsilon_m \leq \varepsilon < \varepsilon_{m-1}$, $m = 1, 2, \dots, N_\delta$, то

$$V(\varepsilon, \delta) = \begin{cases} 2m+1, & k=0, \\ 2m, & k \geq 1. \end{cases}$$

Оптимальное множество —

$$\alpha = \begin{cases} \{0, \pm 1, \dots, \pm m\}, & k=0, \\ \{\pm 1, \dots, \pm m\}, & k \geq 1. \end{cases}$$

Оптимальный метод имеет вид

$$\tilde{\varphi}(y)(t) = \sum_{|j| \leq m} (ij)^k \left(1 - \left(\frac{j}{m+1} \right)^{2(n-k)} \right) y_j e^{ijt}.$$

Если $\delta > 0$ и $\varepsilon < \varepsilon_{N_\delta}$, то $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$.

Доказательство. Пусть α — набор целых чисел, $\delta \geq 0$ и $\varphi: l_\infty^{N(\alpha)} \rightarrow L_2(\mathbb{T})$.

1. Оценим снизу величину $e(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi)$. Сначала покажем, что она не меньше значения задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \rightarrow \max, \quad \|I_\alpha x(\cdot)\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1, \quad (1)$$

т. е. величины верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (1) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима, и мы имеем

$$\begin{aligned}
 2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} &\leq \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} + \| -x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \\
 &\leq 2 \sup_{\substack{\|I_\alpha x(\cdot)\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta, \\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq \\
 &\leq 2 \sup_{\substack{\|I_\alpha x(\cdot) - y\|_{l_\infty^{N(\alpha)}} \leq \delta, \\ y \in l_\infty^{N(\alpha)}, \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.
 \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), получаем требуемое.

2. Теперь оценим снизу значение задачи (1). По равенству Парсеваля квадрат её значения равен значению задачи

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2k} |c_j|^2 \rightarrow \max, \quad |c_j| \leq \delta, \quad j \in \alpha, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2n} |c_j|^2 \leq 1. \quad (2)$$

Далее считаем, что $k \geq 1$ (случай $k = 0$ рассматривается аналогично и проще). Для каждого $s \in \mathbb{N}$ обозначим $\Delta_s = \{\pm 1, \dots, \pm s\}$ и положим

$$\hat{s} = \max\{s \in \mathbb{N} \mid \text{card}(\alpha \cap \Delta_s) = 2s\},$$

считая, что $\hat{s} = 0$, если множество в фигурных скобках пусто. Далее, пусть

$$p_0 = \max\left\{p \mid 2\delta^2 \sum_{j=0}^p j^{2n} < 1, \quad 0 \leq p \leq \hat{s}\right\}.$$

Рассмотрим последовательность c_j , $j \in \mathbb{Z}$, определённую следующим образом: если $p_0 < \hat{s}$, то $c_j = \delta$ при $|j| \leq p_0$,

$$c_{p_0+1} = c_{-(p_0+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_0 + 1)^{-n} \sqrt{1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}}$$

и $c_j = 0$ для остальных j . Если же $p_0 = \hat{s}$, то ясно, что либо $p_0 + 1$, либо $-(p_0 + 1)$ не принадлежит α . Пусть m — то из этих чисел, которое не принадлежит α . Положим

$$c_m = (p_0 + 1)^{-n} \sqrt{1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}},$$

$c_j = \delta$ при $|j| \leq p_0$ и $c_j = 0$ для остальных j . Определённая последовательность является допустимой в задаче (2). Действительно, если $p_0 < \hat{s}$, то $|c_j| \leq \delta$, когда $|j| = p_0 + 1$, так как иначе

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (p_0 + 1)^{-n} \sqrt{1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n}} > \delta \iff 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0+1} j^{2n} < 1,$$

что противоречит определению p_0 . Кроме того, очевидно, что $\sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2n} |c_j|^2 = 1$. Это равенство выполняется и когда $p_0 = \hat{s}$.

Следовательно, значение задачи (2) не меньше, чем значение максимизируемого функционала на этой последовательности, т. е. не меньше величины

$$2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2k} + (p_0 + 1)^{-2(n-k)} \left(1 - 2\delta^2 \sum_{j=0}^{p_0} j^{2n} \right) = \varepsilon_{p_0}^2.$$

Отсюда и из предыдущего пункта вытекает, что

$$e(\delta, \varphi) = e(D^k, W_2^n(\mathbb{T}), l_\infty^{N(\alpha)}, I_\alpha, \delta, \varphi) \geq \varepsilon_{p_0}. \quad (3)$$

3. Покажем, что эта оценка достигается для метода

$$\tilde{\varphi}(y)(t) = \sum_{|j| \leq p_0} (ij)^k \omega_j y_j e^{ijt},$$

где

$$\omega_j = 1 - \left(\frac{j}{p_0 + 1} \right)^{2(n-k)}, \quad |j| \leq p_0.$$

Квадрат погрешности этого метода равен по определению значению экстремальной задачи

$$\sum_{|j| \leq p_0} j^{2k} |c_j - \omega_j y_j|^2 + \sum_{|j| > p_0} j^{2k} |c_j|^2 \rightarrow \max, \quad |c_j - y_j| \leq \delta_j, \quad j \in \alpha, \quad \sum_{j \in \mathbb{Z}} j^{2n} |c_j|^2 \leq 1. \quad (4)$$

Оценим сверху её значение. Положим

$$\lambda = (p_0 + 1)^{-2(n-k)}, \quad \lambda_j = j^{2k} \omega_j, \quad |j| \leq p_0.$$

Если $0 < |j| \leq p_0$, то по неравенству Коши–Буняковского, используя легко проверяемое равенство

$$j^{2k} \left(\frac{\omega_j^2}{\lambda_j} + \frac{(1 - \omega_j)^2}{j^{2n} \lambda} \right),$$

будем иметь

$$\begin{aligned} j^{2k} |c_j - \omega_j y_j|^2 &= j^{2k} |\omega_j (c_j - y_j) + c_j (1 - \omega_j)|^2 \leq \\ &\leq j^{2k} \left(\frac{\omega_j^2}{\lambda_j} + \frac{(1 - \omega_j)^2}{j^{2n} \lambda} \right) (|c_j - y_j|^2 \lambda_j + |c_j|^2 \lambda j^{2n}) = |c_j - y_j|^2 \lambda_j + |c_j|^2 \lambda j^{2n}. \end{aligned}$$

Если $|j| > p_0$, то, очевидно, $j^{2k} \leq \lambda j^{2n}$. Из полученных соотношений следует, что максимизируемый функционал в (4) оценивается сверху величиной

$$\sum_{|j| \leq p_0} |c_j - y_j|^2 \lambda_j + \lambda \sum_{|j| > p_0} j^{2n} |c_j|^2 \leq \delta^2 \sum_{|j| \leq p_0} \lambda_j + \lambda = \varepsilon_{p_0}^2.$$

Отсюда и из (3) вытекает, что

$$e(\delta, \tilde{\varphi}) = \varepsilon_{p_0}. \quad (5)$$

4. Пусть $\varepsilon_m \leq \varepsilon < \varepsilon_{m-1}$ для некоторого $m \geq 1$. Тогда для набора $\alpha = \{\pm 1, \dots, \pm m\}$ из (5) следует, что

$$e(0, \tilde{\varphi}) = \varepsilon_m \leq \varepsilon.$$

Предположим, что существуют α и метод φ , такие что $N(\alpha) < 2m$ и $e(0, \varphi) \leq \varepsilon$. Тогда $\hat{s} \leq m$ и $p_0 \leq m - 1$. Следовательно, с учётом (3) получаем, что

$$\varepsilon < \varepsilon_{m-1} \leq \varepsilon_{p_0} \leq e(0, \varphi) \leq \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, 0) = 2m$. Случай $\varepsilon \geq 1$ рассматривается аналогично.

Пусть $\delta > 0$ и $\varepsilon < \varepsilon_{N_\delta}$. Так как $p_0 \leq N_\delta$ для всех α , для любого метода

$$e(\delta, \varphi) \geq \varepsilon_{p_0} \geq \varepsilon_{N_\delta} > \varepsilon.$$

Это означает, что в рассматриваемом случае $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$. □

2. Непериодический случай

Здесь мы рассматриваем функции на прямой. Пусть $W_2^n(\mathbb{R})$ — соболевский класс функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна и $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1$. Ставится следующая задача. Пусть для любого измеримого подмножества \mathbb{R} конечной лебеговой меры имеется возможность измерить (точно или приближённо) преобразование Фурье каждой функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T})$ на этом множестве. По этой информации мы хотим восстановить сами элементы $x(\cdot)$ и их k -ю производную ($1 \leq k \leq n-1$) в метрике $L_2(\mathbb{R})$ с фиксированной точностью, выбрав из всех этих множеств то, которое имеет минимальную меру.

Уточним постановку, приведя её в соответствие с общей схемой. Пусть X — пространство функций на \mathbb{R} , у которых $(n-1)$ -я производная локально абсолютно непрерывна, а n -я производная принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, $W = W_2^n(\mathbb{R})$, $Z = L_2(\mathbb{R})$, и пусть $F: L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — преобразование Фурье. Каждому множеству $A \subset \mathbb{R}$ конечной лебеговой меры поставим в соответствие пару $(L_2(A), I_A)$, где $I_A: X \rightarrow L_2(A)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие функции $x(\cdot)$ функцию $Fx(\cdot)|_A$ — сужение $Fx(\cdot)$ на A . Таким образом, в рассматриваемом случае \mathcal{I} — это множество пар $(L_2(A), I_A)$, занумерованное подмножествами A конечной меры, а информация $(L_2(A), I_A, \delta)$ о функции $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ при $\delta = 0$ состоит в том, что мы знаем преобразование Фурье $x(\cdot)$ на A , а если $\delta > 0$, то мы знаем лишь функцию $y(\cdot) \in L_2(A)$, такую что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta$. Полагаем $v(L_2(A), I_A) = \text{mes } A$.

Пусть, как и раньше, D^k — оператор k -го дифференцирования (D^0 — тождественный оператор), A — множество конечной меры и $\varphi: L_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ — метод восстановления. Его погрешность, согласно общей схеме, имеет вид

$$e(\delta, \varphi) = e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) = \\ = \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}), y(\cdot) \in L_2(A) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta}} \|D^k x(\cdot) - \varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

и

$$V(\varepsilon, \delta) = \\ = \inf \{ \text{mes } A \mid \text{найдётся } (\varphi, (L_2(A), I_A)) \in \Phi(L_2(A)) \times \mathcal{I}, \text{ такой что } e(\delta, \varphi) \leq \varepsilon \}.$$

Если для \hat{A} и $\hat{\varphi}$ на наборе $(\hat{\varphi}, (L_2(\hat{A}), I_{\hat{A}}))$ достигается минимум, то мы говорим, что \hat{A} — оптимальное множество, а $\hat{\varphi}$ — оптимальный метод.

Теорема. Пусть n — натуральное число, k — целое число, $0 \leq k \leq n - 1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда

$$V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-1/(n-k)}.$$

Оптимальное множество — отрезок $\hat{A} = [-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$, где $2\sigma_\varepsilon = V(\varepsilon, 0)$. Оптимальный метод имеет вид

$$\hat{\varphi}(Fx(\cdot)|_{\hat{A}})(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{A}} (i\xi)^k Fx(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Пусть $\delta > 0$. Если

$$\varepsilon < \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{(n-k)/(2n)},$$

то $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$, а если

$$\varepsilon \geq \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{(n-k)/(2n)},$$

то $V(\varepsilon, \delta) = 2\sigma_\varepsilon$, где σ_ε — единственный корень уравнения

$$\frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{k/(n-k)} \frac{\delta^2}{2\pi} \sigma^{2k} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}} = \varepsilon^2$$

(чтобы включить случай $k = 0$, считаем здесь, что $0^0 = 1$ и что $\infty^0 = 1$ в оптимальном методе ниже). Оптимальное множество — отрезок $\hat{A} = [-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$. Оптимальный метод имеет вид

$$\hat{\varphi}(y(\cdot))(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\hat{A}} (i\xi)^k \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k} \right)^{k/(n-k)} \left(\frac{\xi}{\sigma_\varepsilon} \right)^{2n} \right)^{-1} y(\xi) e^{i\xi t} d\xi.$$

Отметим, что по точной информации ($\delta = 0$) о преобразовании Фурье можно восстановить элементы класса $W_2^n(\mathbb{R})$ с любой точностью, и наилучший метод восстановления k -й производной ($0 \leq k \leq n - 1$) «естественный»: надо взять k -ю производную (если $k \geq 1$) от обратного преобразования Фурье на отрезке $[-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$.

Если же $\delta > 0$, то функции и их k -е производные можно восстановить с данной точностью уже не для всех ε , а для тех ε , для которых это возможно, оптимальный метод использует информацию только на отрезке $[-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$ и при этом её предварительно «сглаживает».

Доказательство. Пусть A — множество конечной меры в \mathbb{R} , $\delta \geq 0$ и $\varphi: L_2(A) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$.

1. Покажем сначала, что величина $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi)$ не меньше значения задачи

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1 \quad (6)$$

(где $\|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta$ при $\delta = 0$ означает, что $Fx(\cdot)|_A = 0$). Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (6) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи). Тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем

$$\begin{aligned} 2\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &\leq \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\|Fx(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(A)} \leq \delta, \\ y(\cdot) \in L_2(A), \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot) - \varphi(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (6), получаем требуемое.

2. Положим

$$\hat{a} = \sup\{a \geq 0 \mid \text{mes}\{A \cap [-a, a]\} = 2a\}$$

и покажем, что если $\hat{a} = 0$, то значение задачи (6) равно бесконечности. Действительно, в образах Фурье квадрат значения этой задачи, согласно теореме Планшереля, равен значению задачи

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad (7)$$

$$\int_A |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \delta^2, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \quad (8)$$

Так как $\hat{a} = 0$, то $\text{mes}\{M_\sigma \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\} < 2\varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$, и значит, мера множества $\Omega_\varepsilon = \{(\mathbb{R} \setminus M_\sigma) \cap [-\varepsilon, \varepsilon]\}$ положительна. Пусть функция $x_\varepsilon(\cdot)$ такова, что

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} d\tau \right)^{-1/2}, & \xi \in \Omega_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (7), и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} \xi^{2k} d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} d\tau} = \frac{\int_{\Omega_\varepsilon} \xi^{2n} \xi^{-2(n-k)} d\xi}{\int_{\Omega_\varepsilon} \tau^{2n} d\tau} \geq \varepsilon^{-2(n-k)}.$$

Следовательно, ввиду произвольности ε значение максимизируемого функционала в (7) может быть сделано сколь угодно большим.

3. Пусть $\delta = 0$. Покажем, что

$$e(0, \varphi) = e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \geq \sigma^{-(n-k)}, \quad (9)$$

где $2\sigma = \text{mes } A$.

Так как $\delta = 0$, то первое ограничение в задаче (7) означает, что $Fx(\xi) = 0$ для почти всех $\xi \in A$, и тогда сама задача (7) переписывается в виде

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus A} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus A} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq 1. \quad (10)$$

Оценим снизу её значение. Если $\hat{a} = 0$, то, как показано в пункте 2, это значение равно $+\infty$. Тогда согласно пункту 1 $e(0, \varphi) = +\infty$, и (9) выполняется очевидным образом. Пусть $\hat{a} > 0$. Для любого натурального m множество $[-\hat{a} - 1/m, \hat{a} + 1/m] \setminus [-\hat{a}, \hat{a}]$ содержит подмножество положительной меры E_m , не принадлежащее A (иначе это противоречило бы определению \hat{a}). Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\text{mes } E_m}} \left(\hat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-n}, & \xi \in E_m, \\ 0, & \xi \notin E_m. \end{cases}$$

Простая проверка показывает, что эти функции допустимы в задаче (10). Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus A} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi &\geq \\ &\geq \frac{1}{\text{mes } E_m} \left(\hat{a} + \frac{1}{m}\right)^{-2n} \hat{a}^{2k} \text{mes } E_m \rightarrow \hat{a}^{-2(n-k)} \geq \sigma^{-2(n-k)}, \end{aligned}$$

так как, очевидно, $\hat{a} \leq \sigma$, и значит, значение задачи (10) не меньше $\sigma^{-2(n-k)}$. Тогда ввиду доказанного в пункте 1 и того, что значение задачи (10) равно квадрату значения задачи (6), получаем, что $e(0, \varphi) \geq \sigma^{-(n-k)}$, а это и есть (9).

4. Покажем, что в неравенстве (9) достигается равенство, когда $A = [-\sigma, \sigma]$, а метод тот же, что в формулировке теоремы, но с σ вместо σ_ε . Обозначим этот метод $\tilde{\varphi}$. Действительно, для любого $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$ имеем по теореме Планшереля

$$\|x^{(k)}(\cdot) - \tilde{\varphi}(Fx(\cdot)|_{[-\sigma, \sigma]})(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\sigma, \sigma]} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\sigma, \sigma]} \xi^{-2(n-k)} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \\ &\leq \sigma^{-2(n-k)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \sigma^{-2(n-k)}, \end{aligned}$$

т. е.

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2([- \sigma, \sigma]), I_{[- \sigma, \sigma]}, 0, \tilde{\varphi}) \leq \sigma^{-(n-k)},$$

и значит, неравенство (9) точное.

5. Теперь мы можем доказать, что $V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-1/(n-k)}$ для любого $\varepsilon > 0$. В самом деле, для данного $\varepsilon > 0$ положим $\sigma_\varepsilon = \varepsilon^{-1/(n-k)}$. Согласно пункту 4 для множества $A_\varepsilon = [-\sigma_\varepsilon/2, \sigma_\varepsilon/2]$ и соответствующего метода $\tilde{\varphi}$ справедлива оценка

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A_\varepsilon), I_{A_\varepsilon}, 0, \tilde{\varphi}) \leq \varepsilon,$$

и значит, $V(\varepsilon, 0) \leq \varepsilon^{-1/(n-k)}$. Предположим, что неравенство строгое, т. е. существуют множество A , $\text{mes } A = 2\sigma$, и метод φ , такие что $\sigma < \sigma_\varepsilon$ и $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \leq \varepsilon$. Тогда с учётом (9) имеем

$$\varepsilon = \sigma_\varepsilon^{-(n-k)} < \sigma^{-(n-k)} \leq e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, 0, \varphi) \leq \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, 0) = \varepsilon^{-1/(n-k)}$.

Оптимальность множества и метода, указанных в теореме, следует из приведённых рассуждений.

6. Пусть $\delta > 0$. Далее считаем, что $k \geq 1$ (случай $k = 0$ рассматривается аналогично, но технически значительно проще). Обозначим

$$\hat{\sigma} = \left(\frac{n}{k}\right)^{1/(2(n-k))} \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{-1/(2n)}$$

и покажем, что для любых метода φ и множества A , $\text{mes } A = 2\sigma$, справедлива оценка

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \geq \begin{cases} \sqrt{\frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)} \frac{\delta^2}{2\pi} \sigma^{2k} + \frac{1}{\sigma^{2(n-k)}}}, & \sigma \leq \hat{\sigma}, \\ \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{(n-k)/(2n)}, & \sigma \geq \hat{\sigma}. \end{cases} \quad (11)$$

Заметим, что функция справа переменной σ , определённая на полуинтервале $(0, \hat{\sigma}]$, монотонно убывает на этом полуинтервале и в точке $\hat{\sigma}$ её минимальное значение равно $(\delta^2/2\pi)^{(n-k)/(2n)}$. Ни для каких A и φ погрешность не может быть меньше этой величины.

Оценим снизу значение задачи (7). Если $\hat{a} = 0$, то согласно пункту 2 оно равно $+\infty$, а тогда из пункта 1 следует, что

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) = +\infty,$$

и (11) выполняется тривиальным образом.

Пусть $\hat{a} > 0$. Рассмотрим случай, когда $\sigma < \hat{\sigma}$. Для каждого натурального m обозначим

$$C_m = 1 - \frac{1}{2\pi} \left(\left(\frac{k}{n} \right)^{1/(2(n-k))} \hat{a} + \frac{1}{2m} \right)^{2n}.$$

Поскольку $\hat{a} \leq \sigma < \hat{\sigma}$, то $C_m > 0$ для достаточно больших m . Так как $\gamma = (k/n)^{1/(2(n-k))} < 1$, то отрезок $\Delta_m = [\gamma\hat{a} - 1/(2m), \gamma\hat{a} + 1/(2m)]$ принадлежит отрезку $[-\hat{a}, \hat{a}]$ для достаточно больших m . Наконец, пусть E_m — множество, определённое в пункте 3. Для указанных m рассмотрим семейство функций $x_m(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2\pi}{\text{mes } E_m}} \left(\hat{a} + \frac{1}{m} \right)^{-n} \sqrt{C_m}, & \xi \in E_m, \\ \sqrt{m} \delta, & \xi \in \Delta_m, \\ 0 & \xi \notin E_m \cup \Delta_m. \end{cases}$$

Несложная проверка показывает, что $x_m(\cdot)$ — допустимые функции в задаче (7). Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{E_m} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_m} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi \geq \left(\hat{a} + \frac{1}{m} \right)^{-2n} C_m \hat{a}^{2k} + \\ &+ \frac{\delta^2}{2\pi} \left(\frac{k}{n} \right)^{k/(n-k)} \hat{a}^{2k} \rightarrow \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{k/(n-k)} \frac{\delta^2}{2\pi} \hat{a}^{2k} + \frac{1}{\hat{a}^{2(n-k)}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение справа как функция \hat{a} монотонно убывает на полуинтервале $(0, \hat{\sigma}]$, и так как $\hat{a} \leq \sigma < \hat{\sigma}$, то значение задачи (7) не меньше выражения справа под корнем в (11). По пункту 1 это доказывает оценку (11) при $\sigma < \hat{\sigma}$.

Пусть $\sigma \geq \hat{\sigma}$. Если $\hat{a} < \hat{\sigma}$, то те же рассуждения, что и выше, приводят к формуле (12). Минимальное значение выражения справа в (12) равно $(\delta^2/(2\pi))^{(n-k)/n}$. Это доказывает (11) в рассматриваемом случае.

Пусть $\hat{a} \geq \hat{\sigma}$. Так как $\gamma_1 = (\delta^2/(2\pi))^{-1/(2n)} < \hat{\sigma}$, то для достаточно больших m отрезок $\Delta_m = [\gamma_1 - 1/m, \gamma_1]$ принадлежит полуинтервалу $(0, \hat{\sigma}]$. Для таких m рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$Fx_m(\xi) = \begin{cases} \sqrt{m} \delta, & \xi \in \Delta_m, \\ 0, & \xi \notin \Delta_m. \end{cases}$$

Снова простая проверка показывает, что это допустимые функции в задаче (7) и

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2k} |Fx_m(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{\delta^2}{2\pi} \left(\left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{-1/(2n)} - \frac{1}{m} \right)^{2k} \rightarrow \left(\frac{\delta^2}{2\pi} \right)^{(n-k)/n},$$

т. е. оценка (11) доказана.

Докажем теперь, что эта оценка достигается на множестве $A = [-\sigma, \sigma]$ и методе из формулировки теоремы с σ вместо σ_ε . Обозначим этот метод $\tilde{\varphi}$. Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R})$, $y(\cdot) \in L_2([-\sigma, \sigma])$ и $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2([-\sigma, \sigma])} \leq \delta$. Положим $\sigma_0 = \min(\sigma, \hat{\sigma})$ и обозначим

$$\lambda_1 = \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^{k/(n-k)} \sigma_0^{2k}, \quad \lambda_2 = \sigma_0^{-2(n-k)}.$$

Тогда нетрудно проверить, что

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} = \left(1 + \frac{n}{n-k} \left(\frac{n}{k} \right)^{k/(n-k)} \left(\frac{\xi}{\sigma_0} \right)^{2n} \right)^{-1} \quad (13)$$

и $-\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n} \geq 0$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$.

По теореме Планшереля, учитывая (13), получаем, что

$$\begin{aligned} & \|x^{(k)}(\cdot) - \tilde{\varphi}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \chi_{\sigma_0}(\xi) y(\xi) \right|^2 d\xi, \quad (14) \end{aligned}$$

где $\chi_{\sigma_0}(\cdot)$ — характеристическая функция отрезка $[-\sigma_0, \sigma_0]$.

Пусть $\xi \in [-\sigma_0, \sigma_0]$. При таких ξ для выражения под знаком интеграла в правой части (14) после несложных преобразований с использованием неравенства Коши—Буняковского и того, что многочлен $\xi \mapsto -\xi^{2k} + \lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}$ неотрицателен на \mathbb{R} , будем иметь

$$\begin{aligned} & \left| (i\xi)^k Fx(\xi) - (i\xi)^k \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} y(\xi) \right|^2 = \\ & = \xi^{2k} \left| \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \sqrt{\lambda_1} (Fx(\xi) - y(\xi)) + \frac{\sqrt{\lambda_2} \xi^n}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} \sqrt{\lambda_2} \xi^n Fx(\xi) \right|^2 \leq \\ & \leq \xi^{2k} \left(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n})^2} + \frac{\lambda_2 \xi^{2n}}{(\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n})^2} \right) (\lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2) = \\ & = \frac{\xi^{2k}}{\lambda_1 + \lambda_2 \xi^{2n}} (\lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2) \leq \\ & \leq \lambda_1 |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 + \lambda_2 \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2. \end{aligned}$$

Интегрируя это неравенство по отрезку $[-\sigma_0, \sigma_0]$, получаем, что интеграл справа в (14) на этом отрезке оценивается величиной

$$\lambda_1 \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_0} |Fx(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi + \lambda_2 \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \sigma_0} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi.$$

Если $|\xi| > \sigma_0$, имеем следующую оценку для выражения справа в (14):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2k} |Fx(\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2n} \xi^{-2(n-k)} |Fx(\xi)|^2 d\xi \leq \\ &\leq \sigma_0^{-2(n-k)} \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi = \lambda_2 \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \sigma_0} \xi^{2n} |Fx(\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Складывая эти неравенства, учитывая выбор $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ и выражения для λ_1 и λ_2 , получаем, что

$$\|x^{(k)}(\cdot) - \tilde{\varphi}(y(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \frac{\lambda_1 \delta^2}{2\pi} + \lambda_2 = \frac{n-k}{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{k/(n-k)} \frac{\delta^2}{2\pi} \sigma_0^{2k} + \frac{1}{\sigma_0^{2(n-k)}}.$$

Если $\sigma_0 = \hat{\sigma}$, то выражение справа принимает нужное значение. Этим доказана точность неравенства (11).

7. Докажем вторую часть теоремы, когда $\delta > 0$. Пусть $\varepsilon < (\delta^2/(2\pi))^{(n-k)/(2n)}$. Надо показать, что не существует таких множества A конечной меры и метода φ , что

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon.$$

Действительно, если такие A и φ нашлись, то по (11) имеем, что

$$\varepsilon < \left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{(n-k)/(2n)} \leq e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon,$$

и полученное противоречие доказывает, что $V(\varepsilon, \delta) = +\infty$.

Рассмотрим $\varepsilon \geq (\delta^2/2\pi)^{(n-k)/(2n)}$ и σ_ε из формулировки теоремы. Согласно предыдущему пункту для множества $A_\varepsilon = [-\sigma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon]$ и метода $\hat{\varphi}$ из формулировки теоремы справедлива оценка

$$e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A_\varepsilon), I_{A_\varepsilon}, \delta, \hat{\varphi}) \leq \varepsilon,$$

и значит, $V(\varepsilon, \delta) \leq 2\sigma_\varepsilon$. Предположим, что неравенство строгое, т. е. существуют множество A , $\text{mes } A = 2\sigma$, и φ , такие что $\sigma < \sigma_\varepsilon$ и $e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon$. Тогда если через $f(\cdot)$ обозначить функцию от σ в правой части выражения (11) (она строго монотонно убывает на $(0, \hat{\sigma}]$), то согласно определению σ_ε и оценке (11) имеем

$$\varepsilon = f(\sigma_\varepsilon) < f(\sigma) \leq e(D^k, W_2^n(\mathbb{R}), L_2(A), I_A, \delta, \varphi) \leq \varepsilon.$$

Полученное противоречие доказывает нужное утверждение.

Оптимальность множества и метода, указанных в теореме, следует из приведённых рассуждений. \square

Литература

- [1] Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М. ε -энтропия и ε -ёмкость множеств в функциональных пространствах // УМН. — 1959. — Т. 14, № 2. — С. 3—86.

- [2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближённой информации о спектре и неравенства для производных // Функци. анализ и его прил. — 2003. — Т. 37. — С. 51—64.
- [3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Матем. сб. — 2004. — Т. 195, № 10. — С. 67—82.
- [4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. О восстановлении операторов свёрточного типа по неточной информации // Тр. МИАН. — 2010. — Т. 269. — С. 181—192.
- [5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функци. анализ и его прил. — 2010. — Т. 44. — С. 76—79.
- [6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру? // Матем. заметки. — 2012. — Т. 92, № 1. — С. 59—67.
- [7] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по её неточно заданному спектру // Матем. сб. — 2012. — Т. 203, № 4. — С. 119—130.

