ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ ПРОИЗВОДНЫМ ДРУГИХ ПОРЯДКОВ И САМОЙ ФУНКЦИИ

С. А. УНУЧЕК

Аннотация. В работе рассматривается задача оптимального восстановления производной k_1-го и k_2-го порядков функции по ее неточно заданным производным других порядков и самой функции. Построено семейство оптимальных методов восстановления.

1. Введение.

Общая постановка задачи оптимального восстановления функционала принадлежит С.А. Смоляку [1]. Она явилась обобщением задачи о наилучших квадратурных формулах С.М. Никольского [2], которая в свою очередь возникла на основе идей А.Н. Колмогорова. Задача об оптимальном восстановлении по неточно заданной информации была поставлена в работе [3]. В данной работе изучается задача одновоеменного восстановления производных функций k_1-го и k_2-го порядков в среднеквадратичной норме по неточно заданным производным n_1-го и n_2-го порядков и самой функции. Решение приводится при некоторых условиях на погрешности, с которыми заданы производные и сама функция. Полностью задача решена для случая $k_1 = 1$, $n_1 = 2$, $k_2 = 3$, $n_2 = 4$. Нам показался этот случай интересен тем, что в задачах восстановления производных при задании погрешности в среднеквадратичной норме не встречался случай, когда более двух множителей Лагранжа отличны от нуля. Для заданной погрешности в равномерной норме ситуация, когда много множителей Лагранжа отлично от нуля, достаточно распространен (см [4], [5]). Ранее задача оптимального восстановления k-ой производной функции по приближенной информации о самой функции и ее n-ой производной рассматривалась в работе [6].

2. Основные понятия

Рассмотрим соболевское пространство функций

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}) = \{x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(n-1)}(\cdot) \text{ - локально абсолютно непрерывна, } x^{(n)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Пусть $n_0 = 0, n_1, n_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$. Предположим, что для каждой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ приближенно известны её производные n_1-го и n_2-го порядков и сама функция, то есть известны функции $y_0(\cdot)$, $y_1(\cdot)$ и $y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j,\ j = 0, 1, 2.$$

Задача состоит в одновременном оптимальном восстановлении производных k_1-го и k_2-го порядков функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$, $0 < k_1 < n_1 < k_2 < n_2$.

В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные отображения

$$\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3 \to (L_2(\mathbb{R}))^2.$$

Погрешностью методов φ будем называть величину

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\ \overline{Y}\in(L_2(\mathbb{R}))^3 \\ \|x^{(n_j)}(\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j \|x^{(k_j)}(\cdot) - \varphi_j(\overline{Y})(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

где $\overline{K} = (k_1, k_2)$, $\overline{\delta} = (\delta_0, \delta_1, \delta_2)$, $\overline{Y} = (y_0(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot))$, $\varphi = (\varphi_1(\overline{Y}), \varphi_2(\overline{Y}))$. Здесь $p = (p_1, p_2)$, $p_1, p_2 \ge 0$ — весовые коэффициенты, варьируя которые можно отдавать предпочтение более точному восстановлению производной какого-либо порядка.

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \inf_{\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}))^3\to(L_2(\mathbb{R}))^2} e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi).$$

Методы $\widehat{\varphi}$, на которых достигается нижняя грань, будем называть оптимальными методами.

3. Основные результаты

Теорема 1. *Если $\delta_1 \ge \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2}, \tag{1}$$

где

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_1/n_2}\left(1 - \frac{k_1}{n_2}\right) + p_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2k_2/n_2}\left(1 - \frac{k_2}{n_2}\right),$$

$$\widehat{\lambda}_2 = p_1\frac{k_1}{n_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_1/n_2-1)} + p_2\frac{k_2}{n_2}\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2(k_2/n_2-1)}.$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ *такой, что его преобразование Фурье*

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = (i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)Fy_0(\xi) + (i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)Fy_2(\xi), s=1,2,$$

где

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} + \theta_s(\xi)|\xi|^{n_2}\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} - p_1\xi^{2k_1} - p_2\xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}},$$

а $\theta_s(\cdot)$*– прозвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$*, удовлетворяющие условию*

$$p_1\xi^{2k_1}\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^{2k_2}\theta_2^2(\xi) \le 1,$$

является оптимальным.

Положим

$$W = \sqrt{p_1^2\delta_0^2 + 2p_1p_2\delta_1^2 + p_2^2\delta_2^2},$$

$$\widehat{\lambda}_0 = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\delta_2}{\delta_0}}\left(3p_1 + p_2\frac{\delta_2}{\delta_0}\right), & \delta_1 \ge \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_1^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \le \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} 0, & \delta_1 \ge \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_2^2W^2 + 2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}, & \delta_1 \le \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},$$

$$\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\delta_0}{\delta_2}}\left(p_1\frac{\delta_0}{\delta_2} + 3p_2\right), & \delta_1 \ge \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \frac{p_2^2\delta_1}{2W}, & \delta_1 \le \sqrt{\delta_0\delta_2} \end{cases},$$

.

Теорема 2. *Пусть* $k_1 = 1$*,* $n_1 = 2$*,* $k_2 = 3$*,* $n_2 = 4$*. Тогда*

$$E(\mathcal{W}_2^4(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) = \begin{cases} \sqrt[4]{\delta_0\delta_2}\sqrt{p_1\delta_0 + p_2\delta_2}, & \delta_1 \ge \sqrt{\delta_0\delta_2}, \\ \sqrt{\delta_1 W}, & \delta_1 \le \sqrt{\delta_0\delta_2}. \end{cases}$$

Метод $\widehat{\varphi} = (\widehat{\varphi_1}(\overline{Y}), \widehat{\varphi_2}(\overline{Y}))$ *такой, что его преобразование Фурье*

$$F\widehat{\varphi_s}(\overline{Y}) = \sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)Fy_j(\xi), s=1,2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot)-$ *любые функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие в случае* $\delta_1 \ge \sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{2s-1}\frac{\widehat{\lambda}_0 - \theta_s(\xi)\xi^4\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^8 - p_1\xi^2 - p_2\xi^6\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^8},$$

$$\alpha_1^s(\xi) = 0,$$

$$\alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{2s-5}\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^8 + \theta_s(\xi)\xi^4\sqrt{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2} - p_1\xi^2 - p_2\xi^6\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2\xi^8},$$

$$s = 1, 2,$$

а $\theta_s(\cdot)-$ *прозвольные функции из* $\mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, *удовлетворяющие условию*

$$p_1\xi^2\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^6\theta_2^2(\xi) \le 1,$$

в случае $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$ *условиям*

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^2 (i\xi)^{2j}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{2s-1}, s = 1, 2, \\ p_1\left(\sum_{j=0}^2 \dfrac{|\alpha_j^1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) + p_2\left(\sum_{j=0}^2 \dfrac{|\alpha_j^2(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right) \le 1 \end{cases},$$

является оптимальным .

4. Доказательства

Сначала рассмотрим задачу оптимального восстановления производных k_1-го и k_2-го порядков в общем виде. Докажем, что имеет место неравенство

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^2 p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}. \quad (2)$$

Для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R})$ такой, что выполнены условия $\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j$, $j = 0, 1, 2$, и для любого метода φ имеем

$$\begin{aligned} 2&\left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} \\ &= \left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot) - (-x)^{(k_1)}(\cdot) + \varphi(0) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right. \\ &\quad \left.+p_2\|x^{(k_2)}(\cdot) - (-x)^{(k_2)}(\cdot) + \varphi(0) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} \\ &\le \left(p_1\|x^{(k_1)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + p_2\|x^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} \\ &\quad + \left(p_1\|(-x)^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + p_2\|(-x)^{(k_2)}(\cdot) - \varphi(0)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\right)^{1/2} \\ &\le 2e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi). \end{aligned}$$

То есть, для любого метода φ выполняется

$$e(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}, \varphi) \geq \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\\ \|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta_j,\ j=0,1,2}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2} p_j\|x^{(k_j)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}.$$

Отсюда следует неравенство (2).

Это означает, что погрешность оптимального восстановления не меньше значения экстремальной задачи

$$\sqrt{p_1\|x^{(k_1)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + p_2\|x^{(k_2)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \to \max,$$
$$\|x^{(n_j)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq \delta_j, \quad j = 0, 1, 2. \quad (3)$$

Перейдем к квадрату задачи (3) и запишем её в образах Фурье. По теореме Планшереля имеем

$$\|x^{(m)}(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\|Fx^{(m)})(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\|(i\xi)^m(Fx)(\xi)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2m}|(Fx)(\xi)|^2\, d\xi.$$

Тем самым, приходим к следующей задаче:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}(p_1\xi^{2k_1} + p_2\xi^{2k_2})|(Fx)(\xi)|^2\, d\xi \to \max,$$
$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_j}|(Fx)(\xi)|^2\, d\xi \leq \delta_j^2, \quad j = 0, 1, 2. \quad (4)$$

Теперь докажем теорему 1. Пусть $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}}\delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$. Покажем, что погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$. Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0], \end{cases}$$

где $\xi_0 = \left(\dfrac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{\frac{1}{n_2}}$, $D(m) = \delta_0\sqrt{2\pi m}$. Так как

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(Fx_m)(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} D^2(m)\, d\xi \leq$$
$$\frac{1}{2\pi m}\cdot D^2(m) = \delta_0^2,$$

и, учитывая условие $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$, выполняются соотношения

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_1}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^{2n_1} D^2(m)\,d\xi \leq$$

$$\frac{D^2(m)}{2\pi m}\cdot \xi_0^{2n_1} \leq \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2n_2}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi \leq \frac{D^2(m)}{2\pi m}\cdot \xi_0^{2n_2} = \delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}p_1\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k_1}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi + \frac{1}{2\pi}p_2\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^{2k_2}\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi =$$

$$\frac{D^2(m)}{2\pi}\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\left(p_1\xi^{2k_1}+p_2\xi^{2k_2}\right)d\xi \geq$$

$$\delta_0^2\left(p_1\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{2k_1}+p_2\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^{2k_2}\right).$$

При $m \to \infty$ величина, стоящая в правой части, стремится к величине

$$Q = \delta_0^2\left(p_1\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_1}{n_2}} + p_2\left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^{2\frac{k_2}{n_2}}\right) = \widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при

$$\widehat{\lambda}_0 = p_1\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_1}{n_2}}\big(1-\frac{k_1}{n_2}\big) + p_2\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_2}{n_2}}\big(1-\frac{k_2}{n_2}\big), \tag{5}$$
$$\widehat{\lambda}_2 = p_1\frac{k_1}{n_2}\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_1-n_2}{n_2}} + p_2\frac{k_2}{n_2}\big(\frac{\delta_2}{\delta_0}\big)^{2\frac{k_2-n_2}{n_2}}.$$

То есть в случае $\delta_1 \geq \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1-\frac{n_1}{n_2}}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}), \overline{K}, \overline{\delta}) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Займемся построением оптимальных методов. Оптимальные методы в общем случае будем искать среди методов $\widehat{\varphi}(\overline{Y}) = (\widehat{\varphi}_1(\overline{Y}), \widehat{\varphi}_2(\overline{Y}))$ вида $\widehat{\varphi}_s(\overline{Y}(\cdot)) = \Lambda_0^s y_0(\cdot) + \Lambda_1^s y_1(\cdot) + \Lambda_2^s y_2(\cdot)$, где $\Lambda_j^s : L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$, $j = 0,1,2$, $s = 1,2$ - линейные непрерывные операторы, действие которых в образах Фурье имеет вид:

$$F(\Lambda_j^s y_j)(\cdot) = \alpha_j^s(\cdot)(Fy_j)(\cdot),\ j = 0,1,2,\ s = 1,2,$$

где $\alpha_j^s(\cdot) \in \mathbb{L}_\infty(\mathbb{R})$.

Для оценки оптимальной погрешности для фиксированных $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, $j = 0, 1, 2$, $s = 1, 2$, рассмотрим экстремальную задачу

$$\sum_{s=1}^{2} \left(p_s \|x^{(k_s)}(\cdot) - \sum_{j=0}^{2} \Lambda_j^s y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \right) \to max,$$

$$\|x^{(n_j)}(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j^2,\ j = 0, 1, 2,\ s = 1, 2.$$

Перепишем эту задачу в образах Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{2} \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} Fx(\xi) - \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) F y_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \to \max, \qquad (6)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) - F y_j(\xi) \right|^2 d\xi \le \delta_j^2,\ j = 0, 1, 2.$$

Положим

$$z_j(\xi) = (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) - F y_j(\xi), j = 0, 1, 2.$$

Задача (6) примет вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{2} \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} Fx(\xi) - \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) (i\xi)^{n_j} Fx(\xi) + \right.\right.$$
$$\left.\left. \sum_{j=0}^{2} \alpha_j^s(\xi) z_j(\xi) \right|^2 d\xi \right) \to \max, \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| z_j(\xi) \right|^2 d\xi \le \delta_j^2,\ j = 0, 1, 2.$$

В случае $\delta_1 \ge \delta_2^{\frac{n_1}{n_2}} \delta_0^{1 - \frac{n_1}{n_2}}$ положим

$$\alpha_0^s(\xi) = (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right),\ \alpha_1^s(\xi) = 0,\ \alpha_2^s(\xi) = (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi),\ s = 1, 2.$$

Задача (7) перепишется в виде

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{2} \left(p_s \int_{\mathbb{R}} \left| (i\xi)^{k_s} \left(1 - \alpha_s(\xi)\right) z_0(\xi) + \right.\right.$$
$$\left.\left. (i\xi)^{k_s - n_2} \alpha_s(\xi) z_2(\xi) \right|^2 d\xi \right) \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| z_j(\xi) \right|^2 d\xi \le \delta_j^2,\ j = 0, 1, 2.$$

Оценим подынтегральные функции с помощью неравенства Коши-Буняковского:

$$\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2 =$$

$$\xi^{2k_s}\left|\frac{1-\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_0}}\sqrt{\widehat{\lambda}_0}\cdot z_0(\xi)+\frac{(i\xi)^{-n_2}\alpha_s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}\sqrt{\widehat{\lambda}_2}\cdot z_2(\xi)\right|^2 \le$$

$$\xi^{2k_s}\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\cdot\left(\widehat{\lambda}_0\left|z_0(\xi)\right|^2+\widehat{\lambda}_2\left|z_2(\xi)\right|^2\right),\ s=1,2.$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2 d\xi\right) \le$$

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^{2k_s}\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\left(\widehat{\lambda}_0\left|z_0(\xi)\right|^2+\widehat{\lambda}_2\left|z_2(\xi)\right|^2\right)d\xi\right).$$

Если выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)\le 1, \tag{8}$$

справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{k_s}\left(1-\alpha_s(\xi)\right)z_0(\xi)+(i\xi)^{k_s-n_2}\alpha_s(\xi)z_2(\xi)\right|^2 d\xi \le$$

$$\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2,$$

то есть оценка сверху совпадает с оценкой снизу, что означает оптимальность метода. Покажем, что множество оптимальных методов не пусто. Из условия (8) найдем ограничения на $\alpha_s(\xi)$ и построим явно какой-либо из методов.

$$\sum_{s=1}^{2}\xi^{2k_s}p_s\left(\frac{|1-\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_0}+\frac{|\alpha_s(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right)=$$

$$\frac{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0\widehat{\lambda}_2}\cdot\sum_{s=1}^{2}\xi^{2(k_s-n_2)}p_s\left|\alpha_s(\xi)-\frac{\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\right|^2+\frac{\sum\limits_{s=1}^{2}p_s\xi^{2k_s}}{\widehat{\lambda}_0+\widehat{\lambda}_2\xi^{2n_2}}\le 1$$

$$\sum_{s=1}^{2} \xi^{2(k_s-n_2)} p_s \left| \alpha_s(\xi) - \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}} \right|^2 \leq$$
$$\frac{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2}{\left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}\right)^2} \cdot \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - \sum_{s=1}^{2} p_s \xi^{2k_s} \right)$$

Рассмотрим функцию

$$g(\xi) = -p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2} + \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}, \quad \xi \geq 0,$$

и параметрически заданную кривую (см. рис. 1):

$$\begin{cases} x = \xi^{2n_2}, \\ y = p_1 \xi^{2k_1} + p_2 \xi^{2k_2}. \end{cases}$$

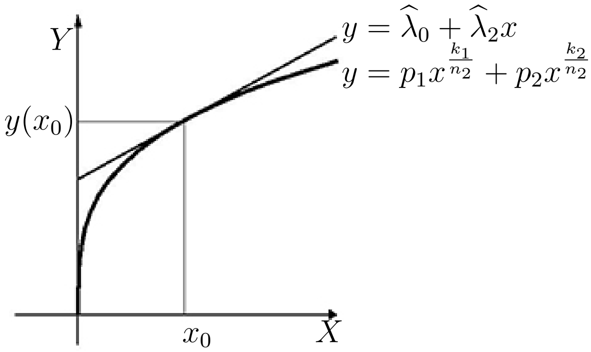

рис. 1

Нетрудно видеть, что функция $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ возрастает и вогнута при $x \in [0, +\infty)$. В силу вогнутости функции выполняется неравенство $y \leq \widetilde{y}$, где $\widetilde{y} = kx + b$ - касательная к графику вогнутой функции $y(x)$ в некоторой точке $x_0 \geq 0$ Построим касательную в точке $x_0 = \left(\frac{\delta_2}{\delta_0}\right)^2$. Значения коэффициентов касательной равны $k = y'(x_0) = \widehat{\lambda}_2$, $b = \widetilde{y}(0) = \widehat{\lambda}_0$. График функции $y(x) = p_1 x^{k_1/n_2} + p_2 x^{k_2/n_2}$ расположен ниже прямой $y \leq \widetilde{y} = \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 x$. Это означает, что $g(\xi) \geq 0$, то есть

$$\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - \sum_{s=1}^{2} p_s \xi^{2k_s} \geq 0.$$

Положим

$$\alpha_s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} + \theta_s(\xi) |\xi|^{n_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_2 \left(\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2} - p_1 \xi^{2k_1} - p_2 \xi^{2k_2}\right)}}{\widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2n_2}},$$

тогда условие (8) выполняется при всех $\theta_s(\xi) \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{R})$, $s = 1, 2$, удовлетворяющих условию

$$p_1\xi^{2k_1}\theta_1^2(\xi) + p_2\xi^{2k_2}\theta_2^2(\xi) \le 1,$$

в частности, при $\theta_1(\xi) = \theta_2(\xi) = 0$.

Перейдем к доказательству теоремы 2. Пусть $k_1 = 1$, $n_1 = 2$, $k_2 = 3$, $n_2 = 4$. В случае $\delta_1 \ge \sqrt{\delta_0\delta_2}$ утверждение теоремы вытекает из теоремы 1.

Пусть

$$\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}. \tag{9}$$

Покажем, что в этом случае погрешность оптимального восстановления не меньше величины $\sqrt{\delta_1 W}$. Пусть

$$\Delta_0 = \frac{\delta_0^2}{\delta_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2}, \quad P = \frac{p_1^2}{p_2^2},$$

$$\xi_0 = \frac{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2} =$$

$$\left(\frac{p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2 - \sqrt{(p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2)^2 - 4p_1^2p_2^2\delta_1^4}}{2p_2^2\delta_1^2}\right)^{1/4}, \tag{10}$$

$$\xi_1 = \frac{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}}{2} =$$

$$\left(\frac{p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2 + \sqrt{(p_1^2\delta_0^2 + p_2^2\delta_2^2)^2 - 4p_1^2p_2^2\delta_1^4}}{2p_2^2\delta_1^2}\right)^{1/4}, \tag{11}$$

$$D_1(m) = \sqrt{2\pi m\frac{\delta_0^2\xi_1^4 - \delta_1^2}{\xi_1^4 - \xi_0^4}},\ D_2(m) = \sqrt{2\pi m\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^4}{\xi_1^4 - \xi_0^4}}.$$

Подкоренное выражение в равенствах (10) и (11) положительно, т.к. из (9) следует, что $\Delta_0\Delta_2 > 1$, и, следовательно,

$$\Delta_2 + P\Delta_0 \ge 2\sqrt{\Delta_2 P\Delta_0} \ge 2\sqrt{P}.$$

Тем самым доказано, что $\xi_0 < \xi_1$.

Покажем, что

$$\frac{\delta_0^2\xi_1^4 - \delta_1^2}{\xi_1^4 - \xi_0^4} > 0.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\delta_0^2\xi_1^4 - \delta_1^2 > 0$$

или $\Delta_0\xi_1^4 > 1$. Это неравенство можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 - \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} > 1.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно показать, что

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > \Delta_2 - P\Delta_0.$$

Если правая часть этого неравенства отрицательна, то оно очевидно выполнено, а если правая часть неотрицательна, то неравенство выполнено в силу очевидного соотношения

$$(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P > (\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P\Delta_0\Delta_2 = (\Delta_2 - P\Delta_0)^2.$$

Осталось показать, что

$$\frac{\delta_1^2 - \delta_0^2\xi_0^4}{\xi_1^4 - \xi_0^4} = \delta_0^2 - \frac{\delta_0^2\xi_1^4 - \delta_1^2}{\xi_1^4 - \xi_0^4} > 0.$$

Нетрудно убедиться, что для доказательства этого неравенства достаточно убедиться в справедливости неравенства $\Delta_0\xi_0^4 < 1$, которое можно записать в виде

$$\frac{2P\Delta_0}{\Delta_2 + P\Delta_0 + \sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P}} < 1.$$

Доказательство этого неравенства сводится к доказательству неравенства

$$\sqrt{(\Delta_2 + P\Delta_0)^2 - 4P} > P\Delta_0 - \Delta_2,$$

которое фактически уже было доказано.

Рассмотрим последовательность функций $x_m(\cdot)$, для которой

$$(Fx_m)(\xi) = \begin{cases} D_1(m), & \xi \in [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \\ D_2(m), & \xi \in [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1] \\ 0, & \xi \notin [\xi_0 - \frac{1}{m}; \xi_0] \cup [\xi_1 - \frac{1}{m}; \xi_1]. \end{cases}$$

Поскольку

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} D_1^2(m)\, d\xi + \int\limits_{\xi_1 - \frac{1}{m}}^{\xi_1} D_2^2(m)\, d\xi\right) \le \frac{D_1^2(m) + D_2^2(m)}{2\pi m} = \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} \xi^4\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\, d\xi = \frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0 - \frac{1}{m}}^{\xi_0} \xi^4 D_1^2(m)\, d\xi + \int\limits_{\xi_1 - \frac{1}{m}}^{\xi_1} \xi^4 D_2^2(m)\right) \le \frac{D_1^2(m)\xi_0^4 + D_2^2(m)\xi_1^4}{2\pi m} = \frac{2\pi m\,(\delta_0^2\xi_0^4\xi_1^4 - \delta_1^2\xi_0^4 + \delta_1^2\xi_1^4 - \delta_0^2\xi_0^4\xi_1^4)}{2\pi m\,(\xi_1^4 - \xi_0^4)} = \delta_1^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^8\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi=\frac{1}{2\pi}\left(\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\xi^8D_1^2(m)\,d\xi+\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1}\xi^8D_2^2(m)\right)\le$$

$$\frac{D_1^2(m)\xi_0^8+D_2^2(m)\xi_1^8}{2\pi m}=\frac{2\pi m\left(\delta_0^2\xi_0^8\xi_1^4-\delta_1^2\xi_0^8+\delta_1^2\xi_1^8-\delta_0^2\xi_0^4\xi_1^8\right)}{2\pi m\left(\xi_1^4-\xi_0^4\right)}=$$

$$\delta_1^2\left(\xi_1^4+\xi_0^4\right)-\delta_0^2\frac{p_1^2}{p_2^2}=\delta_2^2,$$

то последовательность функций $x_m(\cdot)$ допустима в задаче (4). Значение этой задачи не менее величины:

$$\frac{1}{2\pi}\left(p_1\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^2\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi+p_2\int\limits_{\mathbb{R}}\xi^6\big|(Fx_m)(\xi)\big|^2\,d\xi\right)=$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(D_1^2(m)\int\limits_{\xi_0-\frac{1}{m}}^{\xi_0}\left(p_1\xi^2+p_2\xi^6\right)d\xi+D_2^2(m)\int\limits_{\xi_1-\frac{1}{m}}^{\xi_1}\left(p_1\xi^2+p_2\xi^6\right)d\xi\right)\ge$$

$$\frac{D_1^2(m)\left(p_1\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^2+p_2\left(\xi_0-\frac{1}{m}\right)^6\right)+D_2^2(m)\left(p_1\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^2+p_2\left(\xi_1-\frac{1}{m}\right)^6\right)}{2\pi m}.$$

При $m\to\infty$ данная дробь стремится к величине

$$Q=\frac{W^2}{p_2\left(\xi_0^2+\xi_1^2\right)}=\delta_1W=\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2$$

при указанных выше значениях ξ_0, ξ_1 и

$$\widehat{\lambda}_0=\frac{p_1^2\delta_1}{2W},\quad \widehat{\lambda}_1=\frac{p_2^2W^2+2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1W},\quad \widehat{\lambda}_2=\frac{p_2^2\delta_1}{2W}.$$

То есть в случае $\delta_1<\sqrt{\delta_0\delta_2}$ погрешность оптимального восстановления

$$E(\mathcal{W}_2^{n_2}(\mathbb{R}),\overline{K},\overline{\delta})\ge\sqrt{\widehat{\lambda}_0\delta_0^2+\widehat{\lambda}_1\delta_1^2+\widehat{\lambda}_2\delta_2^2}.$$

Перейдем к построению оптимальных методов. При $k_1=1$, $n_1=2$, $k_2=3$, $n_2=4$ задача (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|(i\xi)^{2s-1}Fx(\xi)-\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)(i\xi)^{2j}Fx(\xi)+\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2d\xi\right)\to\max,\quad (12)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta_j^2,\ j=0,1,2.$$

В случе $\delta_1 < \sqrt{\delta_0\delta_2}$, возьмем такие $\alpha_j^s(\xi)$, $s=1,2$, чтобы они удовлетворяли условию

$$\sum_{j=0}^{2}(i\xi)^{2j}\alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{2s-1}.$$

Задача (7) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right) \quad \to \quad \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\left|z_j(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta_j^2,\ j=0,1,2.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского для оценки подынтегральных функций:

$$\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 = \left|\sum_{j=0}^{2}\frac{\alpha_j^s(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_j}}\sqrt{\widehat{\lambda}_j}\cdot z_j(\xi)\right|^2 \le \left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right),\ s=1,2.$$

Значит,

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right) \le \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j}\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\left|z_j(\xi)\right|^2\right)d\xi\right).$$

При выполнении условия

$$\sum_{s=1}^{2}p_s\sum_{j=0}^{2}\frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j} \le 1, \tag{13}$$

также выполняется неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{2}\left(p_s\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\sum_{j=0}^{2}\alpha_j^s(\xi)z_j(\xi)\right|^2 d\xi\right) \le \sum_{j=0}^{2}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2,$$

то есть указанные методы оптимальны. Докажем, что множество оптимальных методов также не пусто. Пусть

$$\alpha_j^s(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_j \left(i\xi\right)^{2s-1} \left(-i\xi\right)^{2j}}{\sum\limits_{j=0}^{2} \widehat{\lambda}_j \xi^{4j}},$$

тогда условие $\sum_{j=0}^{2} (i\xi)^{2j} \alpha_j^s(\xi) = (i\xi)^{2s-1}, s = 1, 2$, выполняется. Покажем, что условие (13) также выполняется.

$$\sum_{s=1}^{2} p_s \sum_{j=0}^{2} \frac{\left|\alpha_j^s(\xi)\right|^2}{\widehat{\lambda}_j} = \frac{p_1\xi^2 + p_2\xi^6}{\sum\limits_{j=0}^{2} \widehat{\lambda}_j \xi^{4j}}.$$

Рассмотрим функцию

$$g_1(\xi) = -p_1\xi^2 - p_2\xi^6 + \widehat{\lambda}_0 + \widehat{\lambda}_1\xi^4 + \widehat{\lambda}_2\xi^8 =$$

$$\frac{p_1^2\delta_1}{2W} - p_1\xi^2 + \frac{p_2^2W^2 + 2p_1p_2\delta_1^2}{2\delta_1 W}\xi^4 - p_2\xi^6 + \frac{p_2^2\delta_1}{2W}\xi^8 =$$

$$\frac{p_2^2\delta_1}{2W} \left(\xi_0^4\xi_1^4 - 2\xi_0^2\xi_1^2\xi^2 + \left(\xi_0^4 + 4\xi_0^2\xi_1^2 + \xi_1^4\right)\xi^4 - 2\left(\xi_0^2 + \xi_1^2\right)\xi^6 + \xi^8\right) =$$

$$\frac{p_2^2\delta_1}{2W} \left(\xi^2 - \xi_0^2\right)^2 \left(\xi^2 - \xi_1^2\right)^2 \geq 0,$$

это означает что

$$\frac{p_1\xi^2 + p_2\xi^6}{\sum\limits_{j=0}^{2} \widehat{\lambda}_j \xi^{4j}} \leq 1,$$

условие (13) выполнено, множество оптимальных методов не пусто.

Список литературы

[1] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них, Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.

[2] Никольский С. М. Квадратурные формулы, М.: Наука, 1988.

[3] Марчук А. Г., Осипенко К. Ю. Наилучшее приближение функций, заданных с погрешностью в конечном числе точек, Матем. заметки, 17, 3, 1975,с. 359–368

[4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой. Мат. сб., 2002, 193, 79-100.

[5] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации. Функц. анализ и его приложения, 2003, 37, 51-64

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации. Докл. РАН, 2011, 438, 3, 300-302.

Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации, г. Москва