Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования

Т. Э. Баграмян

Аннотация

В работе рассматривается задача оптимального восстановления гармонической в единичном шаре функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования. Информация о значении оператора задается в виде функции, отличающейся от точного значения в средне квадратичной метрике не более чем на фиксированную величину погрешности, либо в виде конечного набора коэффициентов Фурье, вычисленных с фиксированной погрешностью в средне квадратичной или равномерной метрике.

В общем случае задача оптимального восстановления состоит в наилучшем приближении значения линейного оператора на некотором множестве по информации, являющейся значениями другого линейного оператора (называемого информационным), заданными с погрешностью в той или иной метрике (см. [1], [3]). В конкретных задачах восстановления в качестве информационного оператора обычно рассматривают линейные функционалы или операторы, сопоставляющие функции ее значения в точках, ее коэффициенты Фурье или просто саму функцию. Подобные задачи рассматривались во многих работах, начиная с [4]. Упомянем лишь некоторые из недавно опубликованных на эту тему [5]—[8]. В настоящей работе рассматривается оператор, ставящий в соответствие функции множество ее интегралов, взятых вдоль радиусов единичного шара в $\mathbb{R}^d$. Такого рода операторы применяются для моделирования различных томографических процессов и подробно изучаются в теории компьютерной томографии [9]. В теории оптимального восстановления информационные операторы томографического типа рассматривались ранее в [2] (пример 3.2).

Рассмотрим пространство h_2 гармонических в шаре $\mathbb{B}^d = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| < 1\}$, $d \geq 2$, функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{h_2} = \sup_{0\leq r<1} \|f(r\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| = 1\}.$$

Следуя [10], будем называть h_2 пространством Харди гармонических функций. Известно представление функций из h_2 в виде разложения в ряд по ортонормированной системе сферических гармоник:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} f_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \tag{1}$$

где

$$N(l,d) = \frac{(2l+d-2)(d+l-3)!}{l!(d-2)!}, \quad l \geq 1,$$
$$N(0,d) = 1.$$

Рассмотрим оператор радиального интегрирования K, определенный равенством

$$Kf(\zeta) = \int_0^1 f(r\zeta) dr, \quad \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}. \tag{2}$$

Предположим, что для любой функции $f \in Bh_2 = \{f \in h_2 : \|f\|_{h_2} \leq 1\}$ значение Kf известно с некоторой погрешностью. Т.е. дана функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, такая что

$$\|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta.$$

Зная функцию g, мы хотим наилучшим образом восстановить функцию f. Воспользуемся тем, что h_2 непрерывно вложено в $L_2(\mathbb{B}^d)$ и будем искать приближение в этом пространстве. Рассмотрим всевозможные методы восстановления — произвольные отображения $m \colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Для каждого m определим величину, называемую погрешностью метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Оптимальным назовем метод, который имеет наименьшую погрешность, т.е. тот, на котором достигается погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m : L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{B}^d)} e(Bh_2, K, \delta, m). \tag{3}$$

Теорема 1. *Положим*

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i+d-2} \right), \quad i = 0, 1 \dots\ , \tag{4}$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s}, \tag{5}$$

где число $s \geq 0$ таково, что $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$. Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|} \right), \tag{6}$$

где g_{kl} — коэффициенты разложения функции g в ряд Фурье по ортонормированной системе Y_k^l

$$g_{kl} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} g(\zeta) Y_k^l(\zeta) d\zeta,$$

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 (l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon_{kl} \frac{\sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}(l+1)}{\widehat{\lambda}_1 (l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{\widehat{\lambda}_1 (2l+d) + \widehat{\lambda}_2 \frac{2l+d}{(l+1)^2} - 1}, \tag{7}$$

ϵ_{kl} — произвольные числа из отрезка $[-1;1]$, являются оптимальными.

Доказательство. С экстремальной задачей (3) тесно связана двойственная к ней задача

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad f \in Bh_2, \quad \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta. \tag{8}$$

Эта связь подробна изучена и описана в [3] и других работах тех же авторов. Нам же потребуется следующее утверждение

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Действительно, если функция f допустима в (8), то функция $-f$ также является допустимой. Поэтому верна цепочка неравенств

$$\sup_{\substack{f \in \mathbb{B}h_2 \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(g) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(0) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \geq$$

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \frac{\|m(0) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} + \| - m(0) - f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}}{2} \geq \sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Таким образом, погрешность оптимального восстановления ограничена снизу значением двойственной задачи. Решив ее, получим явное выражение для этой оценки.

Из (1) следует

$$Kf(\zeta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}}{l+1} Y_k^l(\zeta). \tag{9}$$

Используя (1),(2),(9) и равенство Парсеваля, получим следующие формулы

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{2l+d},$$

$$\|f\|^2_{h_2} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2,$$

$$\|Kf\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2}.$$

Введем обозначение

$$b_l = \sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2,$$

тогда задача (8) может быть переписана в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{2l+d} \to \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty} b_l \le 1, \quad \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2} \le \delta^2, \quad b_l \ge 0 \tag{10}$$

(для удобства мы рассматриваем квадраты функционала и ограничений). Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(b, \lambda_1, \lambda_2) = -\lambda_1 - \lambda_2\delta^2 + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{b_l}{(l+1)^2} \left(\lambda_1 (l+1)^2 + \lambda_2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \right),$$

$b = (b_0, b_1, \dots)$. Множество точек $\{(x_i, y_i) | i \ge 0\}$, определенное в (4) лежит на графике функции $y = \frac{x}{2\sqrt{x}+d-2}$, которая является вогнутой при $x \ge 0$. Отсюда следует, что все это множество лежит под каждой из прямых, соединяющих соседние точки (x_i, y_i) и (x_{i+1}, y_{i+1}) (рис. (1)). Прямая, соединяющая точки (x_s, y_s) и (x_{s+1}, y_{s+1}), имеет вид $y = \widehat{\lambda}_1 x + \widehat{\lambda}_2$, где $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2$ определены в (5). Тогда

$$y_i \le \widehat{\lambda}_1 x_i + \widehat{\lambda}_2, \quad i \ge 0.$$

Подставляя $i = l+1$, получим

$$\frac{(l+1)^2}{2l+d} \le \widehat{\lambda}_1 (l+1)^2 + \widehat{\lambda}_2,$$

откуда следует, что
$$L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) \geq -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2.$$

Пусть $x_s < \delta^{-2} \leq x_{s+1}$, тогда определены неотрицательные числа $\widehat{b}_s = x_s\frac{\delta^2 x_{s+1}-1}{x_{s+1}-x_s}$ и $\widehat{b}_{s+1} = x_{s+1}\frac{1-\delta^2 x_s}{x_{s+1}-x_s}$. Положим $\widehat{b}_i = 0$, при $i \notin \{s, s+1\}$. Тогда получившийся набор $\widehat{b}$ допустим в (10), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости
$$\widehat{\lambda}_1\left(\sum_{l=0}^{\infty}\widehat{b}_l - 1\right) + \widehat{\lambda}_2\left(\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2\right) = 0 \tag{11}$$
и доставляет минимум функции Лагранжа
$$\min_{b_l\geq 0} L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2. \tag{12}$$

В силу того, что $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, верно неравенство
$$L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) \leq -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{2l+d},$$
откуда
$$\min_{b_l\geq 0} L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) \leq \min_{\substack{b_l\geq 0\\ \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leq 1\\ \sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{(l+1)^2}\leq\delta^2}} -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{2l+d}.$$
Но, из (11),(12) следует
$$\min_{b_l\geq 0} L(b,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b},\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2) = -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\widehat{b}_l}{2l+d}.$$
Таким образом,
$$-\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\widehat{b}_l}{2l+d} \leq \min_{\substack{b_l\geq 0\\ \sum_{l=0}^{\infty} b_l \leq 1\\ \sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{(l+1)^2}\leq\delta^2}} -\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{2l+d},$$
что означает, что набор $\widehat{b}$ является точкой максимума в задаче (10). Решение этой задачи равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2$, а решение задачи (8), соответственно $\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}$.

Итак, мы оценили погрешность оптимального восстановления снизу
$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Покажем теперь, что на самом деле в этой оценке выполнено равенство.

Рассмотрим метод m_a, определенный в (6). При $\widehat{\lambda}_2 = 0$ (эквивалентно $s = 0$ или $\delta \geq 1$) из (7) следует, что $a = (0)$ и $m_0(g) = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m_0(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \sup_{f \in Bh_2} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq \widehat{\lambda}_1.$$

При $\widehat{\lambda}_2 > 0$, используя (1) имеем

$$\|m_a(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl} - f_{kl})^2}{2l+d} =$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{\left(a_{kl}(l+1)(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}) + f_{kl}(a_{kl}-1)\right)^2}{2l+d}.$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского $| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|$ к векторам $x = \left(\frac{a_{kl}(l+1)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}, \frac{a_{kl}-1}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}}\right)$, $\quad y = \left(\sqrt{\widehat{\lambda}_2}(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}), \sqrt{\widehat{\lambda}_1} f_{kl}\right)$, получим

$$\|m_a(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{1}{2l+d} \left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1}\right) \left(\widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\right).$$

Введем обозначение

$$A_{kl} = \frac{1}{2l+d} \left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_2} + \frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}_1}\right). \tag{13}$$

Тогда

$$e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 = \sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \|m(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \leq$$

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} A_{kl} \left(\widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\right).$$

Равенства (7) эквивалентны неравенствам $A_{kl} \leq 1$. Откуда

$$e(Bh_2, K, \delta, m_a)^2 \leq \sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leq \delta}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \left(\widehat{\lambda}_2 \left(g_{kl} - \frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2 + \widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\right) \leq$$

$$\widehat{\lambda}_2\delta^2 + \widehat{\lambda}_1.$$

Таким образом, мы получили, что оценки снизу и сверху для величины $E(Bh_2, K, \delta)$ совпадают. Отсюда немедленно следует утверждение теоремы

$$\sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2} = \sup_{\substack{f\in Bh_2,\\ \|Kf-g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\le\delta}} \|f\|_{L_2(B^d)} \le E(Bh_2, K, \delta) \le$$

$$e(Bh_2, K, \delta, m_a) \le \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

■

Определенный в теореме 1 набор коэффициентов (a_{kl}) является фильтром, определяющим значение каждой гармоники в восстановлении функции f. Заметим, что при $\delta \ge 1$ погрешность оптимального восстановления становится равной 1, а оптимальным оказывается метод $m_0(g) = 0$. Покажем, что в зависимости от величины погрешности δ некоторые гармоники не нуждаются в фильтрации, а другие вовсе можно не учитывать.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда можно положить* $a_{kl} = 0$ *при* $\frac{1}{2l+d} \le \widehat{\lambda}_1$ *и* $a_{kl} = 1$ *при* $\frac{(l+1)^2}{2l+d} \le \widehat{\lambda}_2$.

Доказательство. Подставляя $a_{kl} = 0$ и $a_{kl} = 1$ в (13), получим, что условие $A_{kl} \le 1$ эквивалентно, соответственно, $\frac{1}{2l+d} \le \widehat{\lambda}_1$ и $\frac{(l+1)^2}{2l+d} \le \widehat{\lambda}_2$. ■

Приведенное следствие означает, что, начиная с некоторой степени, все гармоники большего порядка не влияют на погрешность восстановления и коэффициент перед ними можно взять равным нулю. Также все гармоники, степень которых не превосходит определенного значения, не нуждаются в фильтрации и коэффициент может быть выбран равным единице. С ростом погрешности измерения δ число ненулевых коэффициентов в наборе a уменьшается, пока они все не становятся равными нулю при $\delta \ge 1$. При уменьшении погрешности измерения δ увеличивается число гармоник, не нуждающихся в фильтрации, а оптимальный метод m_a переходит в точную формулу восстановления

$$m_1(g) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} (l+1)g_{kl}|x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Сказанное проиллюстрировано на рис. (1). На рис. (2) указаны области значений фильтра a, при которых метод $m_a(g)$ является оптимальным. Видно, для каких l значение a_{kl}, $k = 1, \ldots, N(l, d)$, может быть взято равным 1 или 0.

Решая задачу оптимального восстановления функции f по неточно заданному значению оператора K, мы считали, что информация, которой мы владеем есть функция $g \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, удовлетворяющая условию $\|Kf - g\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta$.

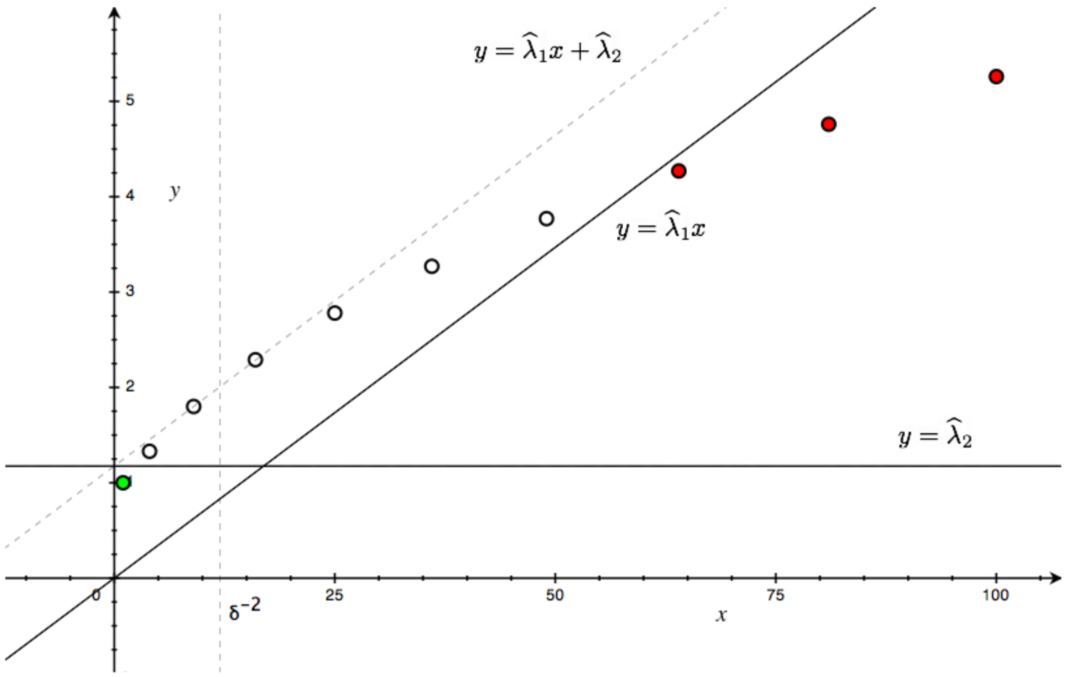

Рис. 1: На рисунке изображено множество точек $\{(x_l, y_l)|l \geq 0\}$, при $\delta^{-2} = 12$, $d = 2$. Зеленые точки соответствуют тем значениям l, для которых можно положить $a_{kl} = 1$, $k = 1, \ldots, N(l, d)$, красные - тем l, для которых $a_{kl} = 0$, $k = 1, \ldots, N(l, d)$.

В действительности, однако, мы сразу перешли от функций f и g к рассмотрению их рядов Фурье и далее работали лишь с наборами коэффициентов Фурье $\{f_{kl}\}$ и $\{g_{kl}\}$. Предположим теперь, что вместо всего множества $\{g_{kl}\}$ нам известно лишь конечное число первых его элементов. Получим следующую задачу. Пусть для каждой функции $f \in Bh_2$ нам известен набор $g \in \mathbb{R}^q$, $q = \sum_{l=0}^{N-1} N(l, d)$, такой что

$$\sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |K f_{kl} - g_{kl}|^2 \leq \delta^2,$$

где

$$K f_{kl} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} K f(\zeta) Y_k^l(\zeta) d\zeta.$$

В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m : \mathbb{R}^q \to L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2, K, \delta, m) = \sup_{\substack{f \in Bh_2, \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |K f_{lk} - g_{lk}|^2 \leq \delta^2}} \|m(g) - f\|_{L_2(B^d)}$$

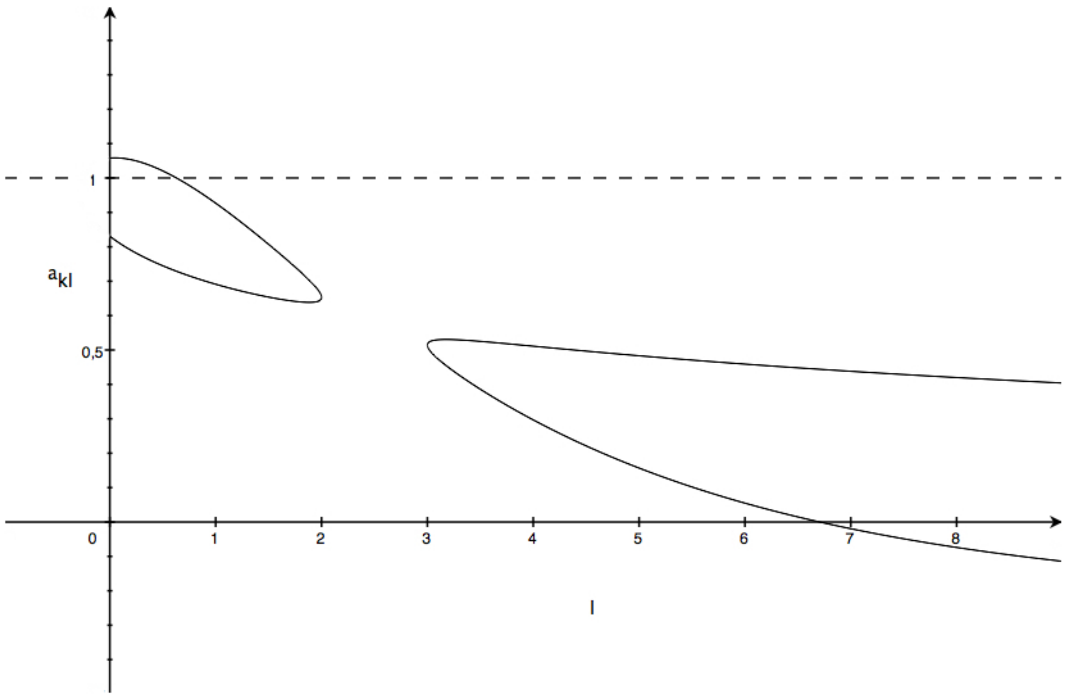

Рис. 2: На рисунке изображена область возможных значений фильтра a_{kl}, $k = 1, \dots, N(l, d)$, в зависимости от параметра l, при $\delta^{-2} = 12$, $d = 2$.

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2, K, \delta) = \inf_{m:\mathbb{R}^q \to L_2(B^d)} e(Bh_2, K, \delta, m).$$

Теорема 2. *Положим*

$$(x_i, y_i) = \left(i^2, \frac{i^2}{2i + d - 2}\right), \quad i = 0, 1, \dots,$$

$$s_N = \min\left\{s \geq 0 : \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} \geq \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}\right\},$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{y_s x_{s+1} - y_{s+1} x_s}{x_{s+1} - x_s}, \tag{14}$$

при $x_s < \delta^{-2} < x_{s+1}, \quad 0 \leq s < s_N$ *и*

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = y_{s_N} - x_{s_N} \widehat{\lambda}_1 \tag{15}$$

при $\delta^{-2} \geq x_{s_N}$.

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2,K,\delta)=\sqrt{\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Методы

$$m_a(g)(x)=\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}a_{kl}(l+1)g_{kl}|x|^lY_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{16}$$

где a_{kl} *определены равенствами* (7)*, являются оптимальными.*

Доказательство. Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}\to\max,\quad f\in Bh_2,\quad \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}|^2\le\delta^2. \tag{17}$$

Аналогично доказательству теоремы 1, получим оценку снизу

$$E(Bh_2,K,\delta)\ge\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}|^2\le\delta^2}}\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Переходя к квадратам функционала и ограничений, используя (9) и обозначение

$$b_l=\sum_{k=1}^{N(l,d)}|f_{kl}|^2,$$

перепишем задачу (17) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{2l+d}\to\max,\quad \sum_{l=0}^{\infty}b_l\le1,\quad \sum_{l=0}^{N-1}\frac{b_l}{(l+1)^2}\le\delta^2,\quad b_l\ge0. \tag{18}$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(b,\lambda_1,\lambda_2)=-\lambda_1-\lambda_2\delta^2+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{b_l}{(l+1)^2}\left(\lambda_1(l+1)^2+\chi^N(l)\lambda_2-\frac{(l+1)^2}{2l+d}\right),$$

где $\chi^N(l)$ - характеристическая функция множества $\{0,\dots,N-1\}$, $b=(b_0,b_1,\dots)$.

Рассмотрим два случая.

Пусть $x_s<\delta^{-2}<x_{s+1},\quad s<s_N$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ как в (14). Следуя тем же рассуждениям, что и в доказательстве теоремы 1, получим

$$y_{j+1}\le\widehat{\lambda}_1x_{j+1}+\widehat{\lambda}_2,\quad j\le N-1.$$

При $j \geq N$, имеем

$$\widehat{\lambda}_1 x_{j+1} - y_{j+1} = \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s} x_{j+1} - y_{j+1} \geq \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} x_{j+1} - y_{j+1} \geq 0.$$

Таким образом, выполнено

$$L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \geq -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Положим

$$\widehat{b}_s = x_s \frac{\delta^2 x_{s+1} - 1}{x_{s+1} - x_s}, \quad \widehat{b}_{s+1} = x_{s+1} \frac{1 - \delta^2 x_s}{x_{s+1} - x_s},$$

$\widehat{b}_i = 0$, при $i \notin \{s, s+1\}$. Тогда получившийся набор $\widehat{b}$ допустим в (18), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \widehat{b}_l - 1 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2 \right) = 0$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \geq 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Отсюда следует (аналогично доказательству теоремы 1), что $\widehat{b}$ доставляет максимум в задаче (18), что означает

$$E(Bh_2, K, \delta) \geq \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Пусть $\delta^{-2} \geq x_{s_N}$. Выберем $\widehat{\lambda}_1$ и $\widehat{\lambda}_2$ как в (15), так что прямая $y = \widehat{\lambda}_1 x + \widehat{\lambda}_2$ проходит через точку (x_{s_N}, y_{s_N}) параллельно прямой $y = \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} x$. Тогда при $0 \leq j \leq s_N - 1$ имеем

$$y_{j+1} \leq \frac{y_{s_N} - y_{s_N - 1}}{x_{s_N} - x_{s_N - 1}} x_{j+1} + y_{s_N} - x_{s_N} \frac{y_{s_N} - y_{s_N - 1}}{x_{s_N} - x_{s_N - 1}}$$

(точки (x_{j+1}, y_{j+1}) лежат под прямой, соединяющей $(x_{s_N - 1}, y_{s_N - 1})$ и (x_{s_N}, y_{s_N})), откуда

$$y_{j+1} \leq y_{s_N} - \frac{y_{s_N} - y_{s_N - 1}}{x_{s_N} - x_{s_N - 1}} (x_{s_N} - x_{j+1}) \leq y_{s_N} - \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}} (x_{s_N} - x_{j+1}) = \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2.$$

При $s_N \leq j \leq N - 1$ выполнено

$$y_{j+1} \leq \frac{y_{s_N + 1} - y_{s_N}}{x_{s_N + 1} - x_{s_N}} x_{j+1} + y_{s_N} - x_{s_N} \frac{y_{s_N + 1} - y_{s_N}}{x_{s_N + 1} - x_{s_N}}$$

(точки (x_{j+1}, y_{j+1}) лежат под прямой, соединяющей (x_{s_N}, y_{s_N}) и (x_{s_N+1}, y_{s_N+1})), откуда

$$y_{j+1} \le y_{s_N} + \frac{y_{s_N+1} - y_{s_N}}{x_{s_N+1} - x_{s_N}}(x_{j+1} - x_{s_N}) \le y_{s_N} + \frac{y_{N+1}}{x_{N+1}}(x_{j+1} - x_{s_N}) = \widehat{\lambda}_1 x_{j+1} + \widehat{\lambda}_2.$$

Если $j > N$, то

$$\widehat{\lambda}_1 x_j - y_j = x_j \left(\frac{1}{2N + d - 2} - \frac{1}{2j + d - 2} \right) > 0.$$

Таким образом, выполнено

$$L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) \ge -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Положим $\widehat{b}_i = 0$, $i \notin \{s_N - 1, N\}$,

$$\widehat{b}_{s_N-1} = \delta^2 x_{s_N}, \quad \widehat{b}_N = 1 - \delta^2 x_{s_N}.$$

Тогда набор $\widehat{b}$ допустим в (18), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\sum_{l=0}^{\infty} \widehat{b}_l - 1 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left(\sum_{l=0}^{N-1} \frac{\widehat{b}_l}{(l+1)^2} - \delta^2 \right) = 0$$

и доставляет минимум функции Лагранжа

$$\min_{b_l \ge 0} L(b, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = L(\widehat{b}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

Отсюда

$$E(Bh_2, K, \delta) \ge \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2}.$$

Для произвольного δ рассмотрим метод m_a, определенный в (16). При $\widehat{\lambda}_2 = 0$ из (7) следует, что $a = (0)$ и $m_0(g) = 0$. Тогда

$$\sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |Kf_{lk} - g_{lk}|^2 \le \delta^2}} \|m_0(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le \sup_{f \in Bh_2} \|f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} \le \widehat{\lambda}_1.$$

При $\widehat{\lambda}_2 > 0$ имеем

$$\|m_a(g) - f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)} = \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl} - f_{kl})^2}{2l + d} + \sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{f_{kl}^2}{2l + d} =$$

$$\sum_{l=N-1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{\left(a_{kl}(l+1)(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1})+f_{kl}(a_{kl}-1)\right)^2}{2l+d}+\sum_{l=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d}.$$

Аналогично теореме 1, применим неравенство Коши-Буняковского. Получим

$$\|m_a(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}A_{kl}\left(\widehat{\lambda}_2\left(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2+\widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\right)+\sum_{l=N}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d},$$

где A_{kl} определено в (13). Равенства (7) эквивалентны неравенствам $A_{kl}\le 1$. Заметим также, что $\frac{1}{2N+d}\le\widehat{\lambda}_1$ и потому $\frac{1}{2l+d}\le\widehat{\lambda}_1$, при $l\ge N$. Тогда

$$e(Bh_2,K,\delta,m_a)^2=\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}-g_{lk}|^2\le\delta^2}}\|m(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le$$

$$\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ \sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|Kf_{lk}-g_{lk}|^2\le\delta^2}}\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_2\left(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_1 f_{kl}^2\le$$

$$\widehat{\lambda}_2\delta^2+\widehat{\lambda}_1.$$

■

В рассмотренном выше случае мы располагали неточной информацией о конечном наборе первых коэффициентов Фурье функции Kf, причем отличие этой информации от точной мы измеряли в метрике l_2. Пусть теперь нам дан набор чисел $\{\delta_{kl}\ge 0|l=0,\dots,N-1,k=1,\dots,N(l,d)\}$, характеризующий неточность информации для каждого коэффициента g_{kl} в отдельности. Т.е. для каждой функции $f\in Bh_2$ нам известен набор $g\in\mathbb{R}^q$, $q=\sum_{l=0}^{N-1}N(l,d)$, такой что

$$|Kf_{kl}-g_{kl}|\le\delta_{kl},\quad l=0,\dots,N-1,\quad k=1,\dots,N(l,d).$$

В качестве методов восстановления рассмотрим отображения $m:\mathbb{R}^q\to L_2(\mathbb{B}^d)$. Определим погрешность метода

$$e(Bh_2,K,\delta,m)=\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ |Kf_{kl}-g_{kl}|\le\delta_{kl}}}\|m(g)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(Bh_2,K,\delta)=\inf_{m:\mathbb{R}^q\to L_2(\mathbb{B}^d)}e(Bh_2,K,\delta,m).$$

Теорема 3. *Положим*

$$p = \max\left\{0 \le p \le N-1 : \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2 \le 1\right\},$$

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{2(p+1)+d}, \quad \widehat{\lambda}_{kl} = \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \widehat{\lambda}(l+1)^2, \quad l = 0,\ldots,p, \quad k = 1,\ldots,N(l,d), \tag{19}$$

при $\delta_{10} \le 1$, *или*

$$\widehat{\lambda} = \frac{1}{d}, \quad \widehat{\lambda}_{kl} = 0, \quad l = 0,\ldots,p, \quad k = 1,\ldots,N(l,d), \tag{20}$$

при $\delta_{10} > 1$.

Тогда погрешность оптимального восстановления равна

$$E(Bh_2, K, \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda} + \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat{\lambda}_{kl}\delta_{kl}^2}.$$

Метод

$$m_a(g)(x) = \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)} a_{kl}(l+1) g_{kl} |x|^l Y_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right), \tag{21}$$

где

$$a_{kl} = \frac{\widehat{\lambda}_{kl}}{\widehat{\lambda}(l+1)^2 + \widehat{\lambda}_{kl}}, \tag{22}$$

является оптимальным.

Доказательство. Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)} \to \max, \quad f \in Bh_2, \quad |Kf_{kl}| \le \delta_{kl}, \tag{23}$$
$$l = 0,\ldots,N-1, \quad k = 1,\ldots,N(l,d).$$

Имеем оценку снизу

$$E(Bh_2, K, \delta) \ge \sup_{\substack{f \in Bh_2 \\ |Kf_{kl}| \le \delta_{kl}}} \|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}.$$

Переходя к квадратам функционала и ограничений и используя (9), перепишем задачу (23) в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{2l+d} \to \max, \quad \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)} |f_{kl}|^2 \le 1, \quad \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} \le \delta_{kl}^2, \tag{24}$$

$$l = 0, \dots, N-1, \quad k = 1, \dots, N(l,d).$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(f, \bar\lambda) = -\lambda - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl}\delta_{kl}^2 + \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} \left(\lambda(l+1)^2 + \lambda_{kl} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \right) +$$

$$\sum_{l=N}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} \left(\lambda(l+1)^2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \right),$$

где $\bar\lambda = \{\lambda, \lambda_{10}, \dots, \lambda_{N(l,d)N-1}\}$.

Пусть $\delta_{10} \le 1$, возьмем

$$\widehat\lambda = \frac{1}{2(p+1)+d}, \quad \widehat\lambda_{kl} = \begin{cases} \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \widehat\lambda(l+1)^2, & l \le p, \\ 0, & p < l \le N-1. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\widehat\lambda_{kl} = \frac{(l+1)^2}{2l+d} - \frac{(l+1)^2}{2(p+1)+d} \ge 0, \quad l \le p.$$

Тогда при $l \le p$

$$\widehat\lambda(l+1)^2 + \widehat\lambda_{kl} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} = 0.$$

При $l > p$

$$\widehat\lambda(l+1)^2 - \frac{(l+1)^2}{2l+d} = \frac{(l+1)^2}{2(p+1)+d} - \frac{(l+1)^2}{2l+d} \ge 0.$$

Таким образом,

$$L(b, \widehat{\bar\lambda}) \ge -\widehat\lambda - \sum_{l=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl}\delta_{kl}^2 = -\widehat\lambda - \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \lambda_{kl}\delta_{kl}^2.$$

Положим

$$\widehat f_{kl} = \begin{cases} \delta_{kl}(l+1), & l \le p, \\ \sqrt{1 - \sum_{l=0}^{p} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \delta_{kl}^2 (l+1)^2}, & l = p+1, \\ 0, & l > p+1. \end{cases}$$

Функция $\widehat f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} \widehat f_{kl} |x|^l Y_k^l \left(\frac{x}{|x|}\right)$ допустима в (24), т.к.

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{N(l,d)} |\widehat f_{kl}|^2 = 1, \quad \frac{|f_{kl}|^2}{(l+1)^2} - \delta_{kl}^2 = 0, \quad l \le p, \quad k = 1, ..., N(l,d).$$

Если $p < N-1$, то
$$\frac{|f_{kp+1}|^2}{(p+2)^2} \le \delta_{kp+1}^2,$$
т.к. в противном случае имели бы $\sum_{l=0}^{p+1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\delta_{kl}^2(l+1)^2 < 1$, что противоречит определению p. Тогда
$$\widehat{\lambda}\left(\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}|\widehat{f}_{kl}|^2-1\right)+\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_{kl}\left(\frac{|\widehat{f}_{kl}|}{(l+1)^2}-\delta_{kl}^2\right)=0$$
и
$$L(\widehat{f},\widehat{\widehat{\lambda}}) = -\widehat{\lambda}-\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_{kl}\delta_{kl}^2 = -\widehat{\lambda}-\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_{kl}\delta_{kl}^2.$$
Следовательно,
$$E(Bh_2,K,\delta) \ge \sqrt{\widehat{\lambda}+\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_{kl}\delta_{kl}^2}.$$

Пусть $\delta_{10} > 1$. Положим $\widehat{\widehat{\lambda}} = (\frac{1}{d},0,\ldots,0)$. Тогда, очевидно
$$L(f,\widehat{\widehat{\lambda}}) \ge -\frac{1}{d}.$$
Функция $\widehat{f}(x) = Y_1^0\left(\frac{x}{|x|}\right)$ допустима в (24), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости и $L(\widehat{f},\widehat{\widehat{\lambda}}) = -\frac{1}{d}$, откуда следует
$$E(Bh_2,K,\delta) \ge \sqrt{\frac{1}{d}}.$$

Для произвольного δ рассмотрим метод m_a, определенный в (21). При $\widehat{\lambda}_{kl} = 0$ из (22) следует, что $a_{kl}=0$. Тогда
$$\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ |Kf_{kl}-g_{kl}|\le\delta_{kl}}}\|m_0(g)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \le \sup_{f\in Bh_2}\|f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 \le \widehat{\lambda}.$$
В противном случае, имеем
$$\|m_a(g)-f\|_{L_2(\mathbb{B}^d)}^2 = \sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{(a_{kl}(l+1)g_{kl}-f_{kl})^2}{2l+d}+\sum_{l=p+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d} =$$

$$\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{\left(a_{kl}(l+1)(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1})+f_{kl}(a_{kl}-1)\right)^2}{2l+d}+\sum_{l=p+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d}.$$

Аналогично теореме 1, применим неравенство Коши-Буняковского. Получим

$$\|m_a(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)}A_{kl}\left(\widehat{\lambda}_{kl}\left(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2+\widehat{\lambda}f_{kl}^2\right)+\sum_{l=p+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\frac{f_{kl}^2}{2l+d},$$

где

$$A_{kl}=\frac{1}{2l+d}\left(\frac{a_{kl}^2(l+1)^2}{\widehat{\lambda}_{kl}}+\frac{(a_{kl}-1)^2}{\widehat{\lambda}}\right).$$

Равенства (22) эквивалентны равенствам $A_{kl}=1$. Заметим также, что $\frac{1}{2l+d}\le\widehat{\lambda}$, при $l\ge p+1$. Тогда

$$e(Bh_2,K,\delta,m_a)^2=\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ |Kf_{lk}|\le\delta_{kl}}}\|m(g)-f\|^2_{L_2(\mathbb{B}^d)}\le$$

$$\sup_{\substack{f\in Bh_2\\ |Kf_{lk}|\le\delta_{kl}}}\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_{kl}\left(g_{kl}-\frac{f_{kl}}{l+1}\right)^2+\sum_{l=p+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}f_{kl}^2\le\sum_{l=0}^{p}\sum_{k=1}^{N(l,d)}\widehat{\lambda}_{kl}\delta_{kl}^2+\widehat{\lambda}.$$

■

Если разложение функции f состоит только из гармоник степени не более $N-1$, то при стремлении $\max\delta_{kl}\to 0$ оптимальный метод $m_a(g)$ переходит в точную формулу

$$m_1(g)=\sum_{l=0}^{N-1}\sum_{k=1}^{N(l,d)}(l+1)g_{kl}|x|^lY_k^l\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Заметим, что величина p определяет, какое количество информации достаточно знать для оптимального восстановления, т.к. при $p<N-1$ мы не используем коэффициенты $\{g_{kl}\}$, $l=p,\dots,N-1$. Более того, исключение лишней информации и применение фильтра a позволяет существенно улучшить результат восстановления, по сравнению с методом $m_1(g)$.

Рассмотрим функцию $f(z)=\sqrt{\frac{4}{5\pi}}\operatorname{Re}z(z-\frac{1}{2})$, гармоническую в круге $\mathbb{B}^2$, для которой $\|f\|_{h_2}=1$(рис. (3)). Пусть $N=10$, т.е. известны $\sum_{l=0}^{9}N(l,2)=19$ первых коэффициентов Фурье функции Kf, заданных с погрешностями

$$(\delta_{kl})=\begin{pmatrix}0,02&0,01&0,001&0,02&0,01&0,01&0,01&0,2&0,2&0,01\\ &0,01&0,001&0,02&0,01&0,01&0,01&0,2&0,2&0,01\end{pmatrix}.$$

В этом случае, $p = 6$ и в оптимальном методе используются только 13 первых коэффициентов. Результаты восстановления представлены на рис. (4). Из рисунка видно, что оптимальный метод $m_a(g)$ восстанавливает функцию f значительно точнее метода $m_1(g)$.

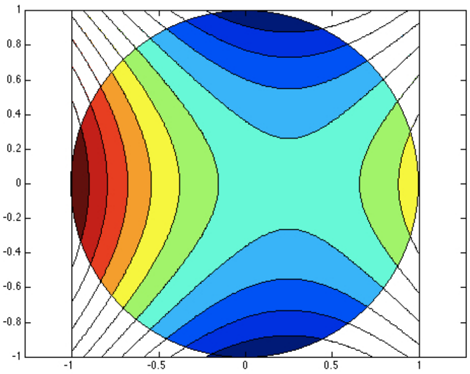

Рис. 3: На рисунке изображены линии уровня функция $f(z) = \sqrt{\frac{4}{5\pi}}\,\mathrm{Re}\, z(z-\frac{1}{2})$.

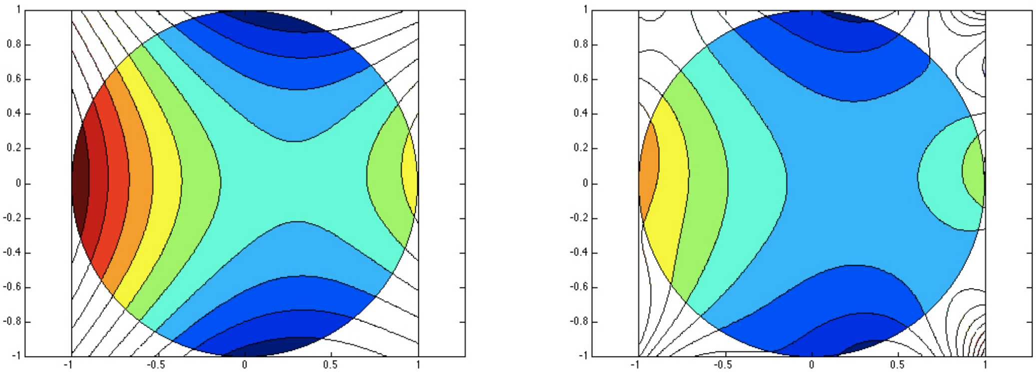

Рис. 4: Слева — результат восстановления оптимальным методом $m_a(g)$, справа — методом $m_1(g)$.

Список литературы

[1] *Michelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Michelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press. New York.—1977.—P. 1–54.

[2] *Michelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. Numerical Analysis Lancaster 1984. Springer Berlin/Hidelberg.—1984.—P. 21–93.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. "Исследования по выпуклому анализу". Владикавказ.—2009.—С. 158–192.

[4] *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки.—1972.—Т. 12, № 4.—С.465-476.

[5] *Osipenko K. Yu., Stessin M.* Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // Constr. Approx.—2010.—Vol. 31, № 1.—P. 37-67.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информаци // Тр. МИАН.—Т. 269.—М.: МАИК, 2010.—С. 181–192.

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функ. анал. и его прил.—2010.—Е. 44, № 3.—С. 76–79.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

[9] *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography.— Stuttgart: John Wiley & Sons. 1986.

[10] *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic function theory.—New York: Springer-Verlag New York, Inc. Second edition, 2001.