ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПО НЕТОЧНЫМ ДАННЫМ

Е. В. ВВЕДЕНСКАЯ (МОСКВА)

Пусть $x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$– числовая последовательность, принадлежащая классу

$$l_2^2 = \{x \in l_2, \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k+1} - 2x_k + x_{k-1})^2 \le 1\}.$$

Предположим, что вместо x известна последовательность

$$\widetilde{x} = \{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l_2,$$

такая, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_k - \widetilde{x}_k)^2 \le \delta^2.$$

Рассматривается задача восстановления значения x_0 по информации об $\widetilde{x}$. Под методами восстановления будем понимать всевозможные отображения

$$\varphi : l_2 \to \mathbb{R}.$$

Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(\delta, \varphi) = \sup_{\substack{x\in l_2^2,\\ \widetilde{x}\in l_2,\\ \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_k-\widetilde{x}_k)^2 \le \delta^2}} |x_0 - \varphi(\{\widetilde{x}_k\}_{k\in\mathbb{Z}})|,$$

а погрешностью оптимального восстановления — величину

$$E(\delta) = \inf_{\varphi : l_2 \to \mathbb{R}} e(\delta, \varphi).$$

Метод, на котором достигается нижняя грань, назовем оптимальным методом. Согласно общей теории, вычисление погрешности оптимального восстановления сводится к решению следующей экстремальной задачи

$$E(\delta) = \sup_{x\in l_2^2, \sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_k}^2 \le \delta^2} |x_0| \tag{1}$$

Эта задача на условный экстремум решается методом Лагранжа, а именно

$$L(x, \lambda_1, \lambda_2) = -x_0 + \lambda_1 \sum_{k\in\mathbb{Z}} {x_k}^2 + \lambda_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_{k+1} - 2x_k + x_{K-1})^2 \to \min. \tag{2}$$

Кроме того, должны выполняться следующие условия

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{x}_k^2 = \delta^2 \tag{3}$$

и

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\widehat{x}_{k+1} - 2\widehat{x}_k^2 + \widehat{x}_{k-1}\right)^2 = 1.$$

Будем искать решение (1),(2),(3) в виде

$$x_k = x_0 \mu^{|k|}, k \in \mathbb{Z}, \mu = r \exp(i\varphi). \tag{4}$$

Из необходимых условий экстремума функции Лагранжа, а также из (2) и (3), получим уравнение, которое решается численно и имеет единственное решение $0 < r < 1$ при условии $\delta > \frac{1}{\sqrt{6}}$. Кроме того,

$$\widehat{x}_0 = \delta\frac{1-r^2}{1+r^2)}, \tag{5}$$

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{2\delta r^2}\sqrt{(frac1-r^21+r^2)^5}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{\widehat{r}}{2\delta\sqrt{(1-\widehat{r}^2)^3(1+\widehat{r}^2)}}.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *При $\delta > \frac{1}{\sqrt{6}}$ погрешность оптимального восстановления вычисляется по формуле*

$$(\delta) = 2\widehat{\lambda}_1\delta^2 + 2\widehat{\lambda}_2, \tag{6}$$

а метод

$$\widehat{\varphi}(\widetilde{x}) = 2\widehat{\lambda}_2\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{x}_k\widehat{x}_k. \tag{7}$$

является оптимальным.