**Московский Государственный Университет**
**им. М. В. Ломоносова**
**Механико-Математический факультет**

**Кафедра Общих Проблем Управления**

Курсовая работа
студента 407 группы
Семочкина И. М.

# Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности на сфере

Научный руководитель:
профессор Осипенко К. Ю.

Москва, 2024г

**Введение**

В данной работе рассматривается задача восстановления решения уравнения теплопроводности, поставленная для оператора Лапласа-Бельтрами на единичной (d-1)-мерой сфере. Ведется поиск оптимального решения в некоторый момент времени по начальным данным, заданным со случайной погрешностью. Аналогичная задача для случая детерминированной погрешности была рассмотрена в [1]. Общую постановку подобных задач можно найти в [2].

**Уравнение теплопроводности на (d-1)-мерной сфере**

Определим в $\mathbb{R}^d$ единичный шар с центром в начале координат:

$$\mathbb{B}^d = \left\{ x = (x_1, ..., x_d) : |x|^2 = \sum_{j=1}^{d} x_j^2 < 1 \right\}$$

и его границу - (d-1)-мерную сферу

$$\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}.$$

Введем на $\mathbb{S}^{d-1}$ оператор Лапласа-Бельтрами.

Рассмотрим $\mathcal{P}_k$ - множество всех однородных многочленов степени k:
$P(x) = \sum\limits_{|\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha, \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_d), \alpha_j \in \mathbb{Z}_+$ для $j = 1, ..., d; |\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_d, x^\alpha = x_1^{\alpha_1} ... x_d^{\alpha_d}, c_\alpha \in \mathbb{R}$.
Это множество является линейным пространством. Пусть $D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_d^{\alpha_d}}$.
Для многочлена $P \in \mathcal{P}_k$ определим $P(D) = \sum\limits_{|\alpha|=k} c_\alpha D^\alpha$ - дифференциальный оператор. Если $P(x) = x_1^2 + ... + x_d^2$, то $P(D) = \Delta$ - оператор Лапласа. Множество однородных гармонических многочленов степени k состоит из многочленов $P \in \mathcal{P}_k : \Delta P = 0$. Обозначим его через $\mathcal{A}_k$.
Сферические гармоники порядка k - множество $\mathcal{H}_k$ - это сужение $\mathcal{A}_k$ на $\mathbb{S}^{d-1}$. Рассмотрим сужение Y многочлена $P \in \mathcal{A}_k$. $Y(x') = P(x')$ при $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$. Кроме того, $P(x) = x^k Y\left(\frac{x}{|x|}\right)$.
Поэтому такое сужение является изоморфизмом, и $\dim\mathcal{H}_k = \dim\mathcal{A}_k = a_k$.

Имеют место следующие утверждения (см. И. Стейн, Г. Вейс [3]).

Утверждение 1.

$$a_k = (d + 2k - 2)\frac{(d + k - 3)!}{(d - 2)!k!}, a_0 = 1, a_1 = d.$$

Утверждение 2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Введем на $\mathcal{H}_k$ как на подпространстве $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ скалярное произведение по формуле

$$(f, g)_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x')g(x')dx', x' \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

В каждом $\mathcal{H}_k$ существует ортонормированный базис $\left\{Y_j^{(k)}\right\}_{j=1,\dots,a_k}$. Из утверждения 2 следует, что система $\left\{Y_j^{(k)}\right\}_{j=1,\dots,a_k}^{k=0,1,2,\dots}$ является ортонормированным базисом $L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Поэтому $\forall f \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеет место разложение по этому базису: $f(x') = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x')$, (1) где $c_{kj}$ есть коэффициенты Фурье функции $f$:

$$c_{kj} = (f, Y_j^{(k)})_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} f(x') Y_j^{(k)}(x') dx', x' \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Теперь зададим оператор Лапласа-Бельтрами для функций на единичной сфере по правилу $\Delta_S Y(x') = \Delta Y(x/|x|)|_{x=x'}, x' \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Утверждение 3. (см. И. Стейн, Г. Вейс [3]). Пусть $Y^{(k)} \in \mathcal{H}_k$ на $\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда $\Delta_S Y^{(k)} = -\Lambda_k Y^{(k)}$, где $\Lambda_k = k(k+d-2)$.

Составим задачу для уравнения теплопроводности на единичной сфере для оператора $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0, \alpha > 0 \\ \mathrm{u}|_{t=0} = f(x') \\ \mathrm{x}' \in \mathbb{S}^{d-1}, f(x') \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \end{cases} \qquad (2)$$

где $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ из задачи (2) определяется равенством:

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y = \sum_{k=0}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)},$$

$$Y = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}.$$

Тогда для такого оператора и функции $f$, для которой имеем разложение (1), методом Фурье получаем решение задачи (2):

$$u(x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x'), x' \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (3)$$

**Постановка задачи для уравнения теплопроводности на единичной сфере**

Рассмотрим функцию $f(x')$ из задачи (2), $x' \in Q, Q = \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\mathcal{W}_2^\alpha(Q)$ - пространство функций $f(x')$, для которых выполнено $||(-\Delta_S)^{\alpha/2} f(x')||_{L_2(Q)} \leq \infty$.
Рассмотрим класс

$$W_2^\alpha(Q) = \{f(x') \in \mathcal{W}_2^\alpha(Q) : ||(-\Delta_S)^{\alpha/2} f(x')||_{L_2(Q)} \leq 1\}.$$

Условие принадлежности $f(x')$ классу $W_2^\alpha(Q)$:

$$\int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x') \right|^2 \mathrm{d}x' \leq 1.$$

Из ортонормированности системы $\left\{Y_j^{(k)}\right\}_{j=1,\dots,a_k}^{k=0,1,2,\dots}$ получаем, что это равносильно следующему неравенству:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha} \sum_{j=1}^{a_k} |c_{kj}|^2 \leq 1 \quad (4).$$

Предположим, что коэффициенты Фурье $c_{kj}$ функции $f(x')$ заданы со случайной ошибкой.
Определим линейный оператор $I : \mathcal{W}_2^\alpha(Q) \to \mathbb{R}^N$, где $N = a_0 + ... + a_n$.
Он задает коэффициенты Фурье: $If = (c_{01}(f), c_{11}(f)..., c_{1d}(f), ......, c_{n1}(f), ..., c_{na_n}(f))$.
Имеем линейный оператор $T : \mathcal{W}_2^\alpha(Q) \to L_2(Q)$, который каждой $f(x')$ в фиксированный момент времени $\tau$ ставит в соответствие функцию $u(x', \tau)$, полученную с помощью (3).
Задача состоит в оптимальном восстановлении значений оператора T на классе $W_2^\alpha(Q)$ по значениям линейного оператора I, заданным со случайной ошибкой.
А именно, зафиксируем $\delta > 0$ и для каждой функции $f(x') \in W_2^\alpha(Q)$ рассмотрим множество случайных векторов

$$Y_\delta(f) = \{y = (y_{01}, y_{11}..., y_{1d}, ......, y_{n1}, ..., y_{na_n}) : \mathbb{M}(y) = If; \mathbb{D}(y_{kj}) \leq \delta^2; j = 1, ..., a_k; k = 0, .., n)\}.$$

Пусть задан метод восстановления - отображение $\varphi : \mathbb{R}^N \to L_2(Q)$.
$\varphi$ сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(f)$ элемент из пространства $L_2(Q)$, являющийся приближением значения Tf.
Погрешность метода восстановления - это величина

$$e(T, W_2^\alpha(Q), I, \delta, \varphi) = \left( \sup_{f \in W_2^\alpha(Q), y \in Y_\delta(f)} \mathbb{M}(\|Tf - \varphi(y)\|^2_{L_2(Q)}) \right)^{1/2}.$$

Рассматриваем только те методы, для которых величина $e(T, W_2^\alpha(Q), I, \delta, \varphi)$ определена. Требуется найти погрешность оптимального восстановления

$$E(T, W_2^\alpha(Q), I, \delta) = \inf_{\varphi:\mathbb{R}^\mathbb{N} \to L_2(Q)} e(T, W_2^\alpha(Q), I, \delta, \varphi)$$

и метод $\varphi$, на котором достигается эта нижняя грань - оптимального метода восстановления.

**Общий случай**

Рассмотренную выше задачу можно обобщить на случай произвольного линейного пространства X над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть Z - линейное нормированное пространство. Рассмотрим линейный оператор $T : X \to Z$. Восстанавливаем значения T на классе $W \subset X$ по значениям линейного оператора $I : X \to K^{n+1}$. Значения I заданы со случайной ошибкой. А именно, для фиксированного $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ рассмотрим множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{y = (y_0, y_1, ..., y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix; \mathbb{D}(y_j) \leq \delta^2; j = 0, 1, ..., n\}$$

Имеем метод восстановления $\varphi : \mathbb{K}^{n+1} \to Z$, который задаётся по правилу $y \mapsto \varphi(y) \approx Tx$, $y \in Y_\delta(x)$, $\varphi(y) \in Z$.

Погрешность метода восстановления:

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \left( \sup_{f \in W, y \in Y_\delta(x)} \mathbb{M}(\|Tx - \varphi(y)\|_Z^2) \right)^{1/2}$$

Погрешность оптимального восстановления - E(T,W,I,$\delta$) $= \inf\limits_{\varphi} e(T, W, I, \delta, \varphi)$.

Рассмотрим

$$\mathcal{W} = \left\{ x \in l_2 : \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 < \infty \right\}, W = \left\{ x \in l_2 : \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \leq 1 \right\}, \nu_j > 0, j = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\mu_j \neq 0, j = 0, 1, 2, \ldots$ и удовлетворяют условию: $\exists C > 0 : |\mu_j|^2 \leq C\nu_j, j = 1, 2, \ldots$

Зададим линейные операторы $T : \mathcal{W} \to l_2$ и $I : \mathcal{W} \to K^{n+1}$ по правилу:

$$Tx = (\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \ldots), Ix = (x_0, x_1, ..., x_n).$$

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, j = 1, 2, \ldots; \xi_j = \left( \sum_{k=1}^{j} \nu_k \left( \frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, j = 1, ..., n + 1$$

Считаем, что последовательность $\{\gamma_j\}$ возрастает.

**Теорема 1 (общий случай)**

Следующий результат был получен в работе Кривошеева К. Ю. [4] (см. также Осипенко К. Ю. [2]):

Пусть j таково, что $1/\delta \in (\xi_j, \xi_{j+1}]$. Тогда

$$E(T,W,I,\delta) = \left(\delta^2|\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^{j} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{j} \nu_k},$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{j} \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right) \mu_k y_k e_k,$$

($\{e_k\}$ - стандартный базис $l_2$) - является оптимальным методом восстановления.

Если $1/\delta > \xi_{n+1}$, то

$$E(T,W,I,\delta) = \left(\delta^2|\mu_0|^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2\right)^{1/2},$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) \mu_k y_k e_k,$$

($\{e_k\}$ - стандартный базис $l_2$) - является оптимальным методом восстановления.

**Применение для случая уравнения на единичной сфере**

Получим аналогичный результат для задачи (2) и ее решения (3). Рассматриваем фиксированный момент времени $\tau$. Оператору T сопоставляем вектор

$$(c_{01}(f)e^{-\Lambda_0^{\alpha/2}\tau}, c_{11}(f)e^{-\Lambda_1^{\alpha/2}\tau}, ..., c_{1d}(f)e^{-\Lambda_1^{\alpha/2}\tau}, ......, c_{n1}(f)e^{-\Lambda_n^{\alpha/2}\tau}, ..., c_{na_n}(f)e^{-\Lambda_n^{\alpha/2}\tau}, ...),$$

что следует из (4). $If = (c_{01}(f), c_{11}(f)..., c_{1d}(f), ......, c_{n1}(f), ..., c_{na_n}(f))$ - вектор длины $N = a_0 + ... + a_n$. Напомним, что условием принадлежности $f(x')$ классу $W_2^\alpha(Q)$ является неравенство (4). Тогда получаем:

$(\mu_{11}, ..., \mu_{1d}, ......, \mu_{n1}, ..., \mu_{na_n}, ...) = (e^{-\Lambda_1^{\alpha/2}\tau}, ..., e^{-\Lambda_1^{\alpha/2}\tau}, ......, e^{-\Lambda_n^{\alpha/2}\tau}, ..., e^{-\Lambda_n^{\alpha/2}\tau}, ...)$,

$(\nu_{11}, ..., \nu_{1d}, ......, \nu_{n1}, ..., \nu_{na_n}, ...) = (\Lambda_1^\alpha, ..., \Lambda_1^\alpha, ......, \Lambda_n^\alpha, ..., \Lambda_n^\alpha, ...)$.

Причём $\exists C > 0 : e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \le C \cdot \Lambda_k^\alpha, k = 1, 2, ...$ .

Отсюда получаем, что

$(\gamma_{11},...,\gamma_{1d},......,\gamma_{n1},...,\gamma_{na_n},...) = (\Lambda_1^{\alpha/2} e^{\Lambda_1^{\alpha/2}\tau},...,\Lambda_1^{\alpha/2} e^{\Lambda_1^{\alpha/2}\tau},......,\Lambda_n^{\alpha/2} e^{\Lambda_n^{\alpha/2}\tau},...,\Lambda_n^{\alpha/2} e^{\Lambda_n^{\alpha/2}\tau},...)$

Составим вектор из $\{\xi_{lm} : l \in \{1,...,n\}, m \in \{1,...,a_l\}\} \cup \{\xi_{n+1,1}\}$ длины $N$.

$\xi_{11} = \left(\nu_{11}\left(\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{11}} - 1\right)\right)^{1/2}, ...,$

$\xi_{1d} = \left(\nu_{11}\left(\frac{\gamma_{1d}}{\gamma_{11}} - 1\right) + ... + \nu_{1d}\left(\frac{\gamma_{1d}}{\gamma_{1d}} - 1\right)\right)^{1/2}, ......,$

$\xi_{n1} = \left(\nu_{11}\left(\frac{\gamma_{n1}}{\gamma_{11}} - 1\right) + ... + \nu_{1d}\left(\frac{\gamma_{n1}}{\gamma_{1d}} - 1\right) + ...... + \nu_{n1}\left(\frac{\gamma_{n1}}{\gamma_{n1}} - 1\right)\right)^{1/2}, ...,$

$\xi_{na_n} = \left(\nu_{11}\left(\frac{\gamma_{na_n}}{\gamma_{11}} - 1\right) + ... + \nu_{1d}\left(\frac{\gamma_{na_n}}{\gamma_{1d}} - 1\right) + ...... + \nu_{n1}\left(\frac{\gamma_{na_n}}{\gamma_{n1}} - 1\right) + ... + \nu_{na_n}\left(\frac{\gamma_{na_n}}{\gamma_{na_n}} - 1\right)\right)^{1/2},$

$\xi_{n+1,1} = \Bigg(\nu_{11}\left(\frac{\gamma_{n+1,1}}{\gamma_{11}} - 1\right) + ... + \nu_{1d}\left(\frac{\gamma_{n+1,1}}{\gamma_{1d}} - 1\right) + ......+$

$+\nu_{n1}\left(\frac{\gamma_{n+1,1}}{\gamma_{n1}} - 1\right) + ... + \nu_{na_n}\left(\frac{\gamma_{n+1,1}}{\gamma_{na_n}} - 1\right) + \nu_{n+1,1}\left(\frac{\gamma_{n+1,1}}{\gamma_{n+1,1}} - 1\right)\Bigg)^{1/2}.$

Тогда

$$\xi_{lm} = \left(\sum_{k=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{a_k}\nu_{kj}\left(\frac{\gamma_{lm}}{\gamma_{kj}} - 1\right) + \nu_{l1}\left(\frac{\gamma_{lm}}{\gamma_{l1}} - 1\right) + ... + \nu_{lm}\left(\frac{\gamma_{lm}}{\gamma_{lm}} - 1\right)\right)^{1/2}. \quad (5)$$

Заметим что при фиксированном $k \in \{1,...,l\}$ ($l \in \{1,...,n+1\}$) значения $\gamma_{kj}, \nu_{kj}$ одинаковы $\forall j \in \{1,...,a_k\}$, поэтому последние m слагаемых в (5) будут нулевыми, и сумма (5) преобразуется к виду:

$$\xi_{lm} = \left(\sum_{k=1}^{l-1} a_k \nu_{ka_k}\left(\frac{\gamma_{lm}}{\gamma_{ka_k}} - 1\right)\right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{l-1} a_k \nu_{ka_k}\left(\frac{\gamma_{la_l}}{\gamma_{ka_k}} - 1\right)\right)^{1/2} =: \eta_l. \quad (6)$$

**Теорема 2 (задача на сфере)**

Пусть $\exists j \in \{1,...,n\}$: $1/\delta \in (\eta_j, \eta_{j+1}]$, тогда

$$E(T, W_2^\alpha(Q), I, \delta) = \delta\left[1 + \sum_{k=1}^{j} a_k e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}\left(1 - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_1}\right)^{\alpha/2} e^{(\Lambda_k^{\alpha/2} - \Lambda_1^{\alpha/2})\tau}(1 - c_1)\right)\right]^{1/2},$$

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \Lambda_1^{\alpha/2} e^{\Lambda_1^{\alpha/2}\tau} \left( \sum\limits_{k=1}^{j} a_k \frac{\Lambda_k^{\alpha/2}}{e^{\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}} \right)}{1 + \delta^2 \left( \sum\limits_{k=1}^{j} a_k \Lambda_k^{\alpha} \right)},$$

А метод

$$\varphi(y) = y_{01} Y_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{j} \sum_{m=1}^{a_k} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \left( 1 - \left( \frac{\Lambda_k}{\Lambda_1} \right)^{\alpha/2} e^{(\Lambda_k^{\alpha/2} - \Lambda_1^{\alpha/2})\tau} (1 - c_1) \right) y_{km} Y_m^{(k)}$$

- является оптимальным методом восстановления.

Пусть $1/\delta > \eta_{n+1}$, тогда

$$E(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \left[ \delta^2 + \frac{1}{\Lambda_{n+1}^{\alpha/2}} e^{-\Lambda_{n+1}^{\alpha/2}\tau} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \left( 1 - \left( \frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n+1}} \right)^{\alpha/2} e^{(\Lambda_k^{\alpha/2} - \Lambda_{n+1}^{\alpha/2})\tau} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

А метод

$$\varphi(y) = y_{01} Y_1^{(0)} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{a_k} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \left( 1 - \left( \frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n+1}} \right)^{\alpha/2} e^{(\Lambda_k^{\alpha/2} - \Lambda_{n+1}^{\alpha/2})\tau} \right) y_{km} Y_m^{(k)}$$

- является оптимальным методом восстановления.

**Доказательство**

В случае $1/\delta \in (\eta_j, \eta_{j+1}]$ применение Теоремы-1 дает:

$$E(T, W_2^{\alpha}(Q), I, \delta) = \left[ \delta^2 e^{-2\Lambda_0^{\alpha/2}\tau} + \delta^2 \sum_{k=1}^{j} a_k \mu_{k1}^2 \left( 1 - \frac{\gamma_{k1}(1 - c_1)}{\gamma_{11}} \right) \right]^{1/2} =$$

$$= \left[ \delta^2 + \delta^2 \left( \sum_{k=1}^{j} a_k e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \left( 1 - \left( \frac{\Lambda_k}{\Lambda_1} \right)^{\alpha/2} e^{(\Lambda_k^{\alpha/2} - \Lambda_1^{\alpha/2})\tau} (1 - c_1) \right) \right] \right]^{1/2}.$$

При этом

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_{11} \left( \sum\limits_{k=1}^{j} a_k \frac{\nu_{k1}}{\gamma_{k1}} \right)}{1 + \delta^2 \left( \sum\limits_{k=1}^{j} a_k \nu_{k1} \right)} = 1 - \frac{\delta^2 \Lambda_1^{\alpha/2} e^{\Lambda_1^{\alpha/2}\tau} \left( \sum\limits_{k=1}^{j} a_k \frac{\Lambda_k^{\alpha/2}}{e^{\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}} \right)}{1 + \delta^2 \left( \sum\limits_{k=1}^{j} a_k \Lambda_k^{\alpha} \right)},$$

Откуда следует утверждение. А в выражении метода используем разложение по всем сферическим гармоникам $\left\{ Y_j^{(k)} \right\}_{j=1,\dots,a_k}^{k=0,1,\dots,n}$.

В случае $1/\delta > \eta_{n+1}$ применение Теоремы-1 дает:

$$E(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \left[\delta^2 e^{-2\Lambda_0^{\alpha/2}\tau} + \frac{1}{\gamma_{n+1,1}} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} a_k \mu_{k1}^2 \left(1 - \frac{\gamma_{k1}}{\gamma_{n+1,1}}\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \left[\delta^2 + \frac{1}{\Lambda_{n+1}^{\alpha/2}} e^{-\Lambda_{n+1}^{\alpha/2}\tau} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} a_k e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \left(1 - \left(\frac{\Lambda_k}{\Lambda_{n+1}}\right)^{\alpha/2} e^{(\Lambda_k^{\alpha/2} - \Lambda_{n+1}^{\alpha/2})\tau}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Выражение для метода получается аналогично первому случаю.

**Список литературы**


[1] К. Ю. Осипенко "Сферические гармоники, собственные функции оператора Лапласа и задачи восстановления". ГОУ МАТИ, кафедра Высшей математики, Москва, 2006.

[2] К. Ю. Осипенко "Введение в теорию оптимального восстановления": учебное пособие для вузов — Санкт-Петербург : Лань, 2022

[3] И. Стейн, Г. Вейс "Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах". Мир, Москва, 1974, 336с.

[4] Кривошеев К. Ю. «Об оптимальном восстановлении линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой», Мат. сб., 2021.