Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-Математический факультет

Кафедра Общих Проблем Управления

Курсовая работа
студента 307 группы
Семочкина И. М.

Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности

Научный руководитель:
профессор Осипенко К. Ю.

Москва, 2022г

Введение

В данной работе рассматривается задача восстановления решения уравнения теплопроводности в некоторый момент времени по начальным данным, заданным со случайной погрешностью. Аналогичная задача для детерминированной погрешности была поставлена и решена у Осипенко К. Ю. [2], а также в сокращенном варианте - у Унучек С. А. [3].

Уравнение теплопроводности

Для однородного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \mathrm{u}_t = u_{xx}, t \in \mathbb{T}, \\ \mathrm{u(x,0)=f(x)} \end{cases} \qquad (1)$$

Решение ищем для $f(x) \in L_2(\mathbb{T}), \mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Функция f(x) разлагается в свой ряд Фурье на данном промежутке:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k cos(kx) + B_k sin(kx)) \quad (2),$$

где $A_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x, k = 0, 1, 2, ...$ и $B_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x, k = 1, 2, ...$ ыы

Чтобы получить функцию u(x,t), удовлетворяющую начальному условию, выразим ее через коэффициенты Фурье f(x). Решение ищем в виде ряда

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t}(A_k cos(kx) + B_k sin(kx))$$

Тогда при t=0 выполнено u(x,0)=f(x).

Вычисляем: $u_x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t}k(B_k cos(kx) - A_k sin(kx))$,

$u_{xx} = -\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{\alpha t}k^2(A_k cos(kx){+}B_k sin(kx)) = -k^2 u(x,t)$, также $u_t = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha e^{\alpha t}(A_k cos(kx){+}B_k sin(kx)) =$ $= \alpha u(x,t)$.

Значит имеем $\alpha = -k^2$, и решение (1) - это функция

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-k^2 t}(A_k cos(kx) + B_k sin(kx)) \quad (3)$$

Постановка задачи для уравнения теплопроводности

Рассмотрим функцию f(x) из задачи (1). Пусть $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}), \mathbb{T} = [-\pi, \pi]$ - пространство 2π-периодических функций с абсолютно непрерывной (r-1)-ой производной и r-ой производной лежащей в $L_2(\mathbb{T})$.

Рассмотрим класс

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \{f(x) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) : \|f^{(r)}(x)\|_{\mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})} \leq 1\}$$

Здесь

$$f^{(r)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^r (A_k cos(kx + \frac{\pi r}{2}) + B_k sin(kx + \frac{\pi r}{2}))$$

Условие принадлежности f(x) классу $W_2^r(\mathbb{T})$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}(A_k^2 + B_k^2) \leq 1 \quad (4)$$

Коэффициенты Фурье заданы со случайной ошибкой.

Определим линейный оператор $I : \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) \to \mathbb{R}^{2n+1}$.
Он задает коэффициенты Фурье: $If = (A_0(f), A_1(f), B_1(f), \ldots, A_n(f), B_n(f))$.
Имеем линейный оператор $T : \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) \to L_2(\mathbb{T})$, который каждой f(x) ставит в соответствие функцию u(x,t) (полученную с помощью (3)) из пространства $L_2(\mathbb{T})$.

Задача состоит в оптимальном восстановлении значений оператора T на классе $W_2^r(\mathbb{T}) \subset \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T})$ по значениям линейного оператора I, заданным со случайной ошибкой.
А именно, зафиксируем $\delta > 0$ и для каждой $f(x) \in W_2^r(\mathbb{T})$ рассмотрим множество случайных векторов

$$Y_\delta(f) = \{y = (y_0, y_1, y_2, ..., y_{2n}, y_{2n+1}) : \mathbb{M}(y) = If; \mathbb{D}(y_j) \leq \delta^2; j = 0, 1, ..., 2n + 1\}$$

Определим метод восстановления - линейное отображение $\varphi : \mathbb{R}^{2n+1} \to L_2(\mathbb{T})$.
φ сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta(f)$ элемент из пространства $L_2(\mathbb{T})$, являющийся приближением значения Tf.
Погрешность метода восстановления - это величина

$$e(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta, \varphi) = \left(\sup_{f \in W_2^r(\mathbb{T}), y \in Y_\delta(f)} \mathbb{M}(\|Tf - \varphi(y)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}) \right)^{1/2}$$

Рассматриваем только те методы, для которых величина $e(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta, \varphi)$ определена.

Требуется найти погрешность оптимального восстановления

$$E(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \inf_{\varphi} e(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta, \varphi)$$

и метода φ, на котором достигается эта нижняя грань - оптимального метода восстановления.

Общий случай

Рассмотренную выше задачу можно обобщить на случай произвольного линейного пространства X над полем $K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Пусть Z - линейное нормированное пространство. Рассмотрим линейный оператор $T : X \to Z$. Восстанавливаем значения T на классе $W \subset X$ по значениям линейного оператора $I : X \to K^{n+1}$. Значения I заданы со случайной ошибкой. А именно, для фиксированного $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ рассмотрим множество случайных векторов

$$Y_\delta(x) = \{y = (y_0, y_1, ..., y_n) : \mathbb{M}(y) = Ix; \mathbb{D}(y_j) \le \delta^2; j = 0, 1, ..., n\}$$

Имеем метод восстановления $\varphi : \mathbb{K}^{n+1} \to Z$, который задаётся по правилу $y \mapsto \varphi(y) \approx Tx$, $y \in Y_\delta(x)$, $\varphi(y) \in Z$.

Погрешность метода восстановления:

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \left(\sup_{f \in W, y \in Y_\delta(x)} \mathbb{M}(\|Tx - \varphi(y)\|_Z^2) \right)^{1/2}$$

Погрешность оптимального восстановления - E(T,W,I,δ) $= \inf_{\varphi} e(T, W, I, \delta, \varphi)$.

Рассмотрим

$$\mathcal{W} = \left\{ x \in l_2 : \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 < \infty \right\}, W = \left\{ x \in l_2 : \sum_{j=1}^{\infty} \nu_j |x_j|^2 \le 1 \right\}, \nu_j > 0, j = 1, 2, \dots$$

Пусть $\mu_j \ne 0, j = 0, 1, 2, \dots$ и удовлетворяют условию: $\exists C > 0 : |\mu_j|^2 \le C\nu_j, j = 1, 2, \dots$
Зададим линейные операторы $T : \mathcal{W} \to l_2$ и $I : \mathcal{W} \to K^{n+1}$ по правилу:

$$Tx = (\mu_0 x_0, \mu_1 x_1, \dots), Ix = (x_0, x_1, ..., x_n).$$

Обозначим

$$\gamma_j = \frac{\sqrt{\nu_j}}{|\mu_j|}, j = 1, 2, \dots; \xi_j = \left(\sum_{k=1}^{j} \nu_k \left(\frac{\gamma_j}{\gamma_k} - 1 \right) \right)^{1/2}, j = 1, ..., n+1 \quad (5)$$

Считаем, что последовательность $\{\gamma_j\}$ возрастает.

Теорема-1 (общий случай)

Следующий результат был получен в работе Кривошеева К. Ю. [3] (см. также Осипенко К. Ю. [2]):

Если $\exists j \in \{1, ..., n\} : 1/\delta \in (\xi_j, \xi_{j+1}]$, то

$$E(T, W, I, \delta) = \left(\delta^2|\mu_0|^2 + \delta^2 \sum_{k=1}^{j} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2\gamma_1 \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\nu_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum\limits_{k=1}^{j} \nu_k},$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{j} \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1}\right) \mu_k y_k e_k,$$

($\{e_k\}$ - стандартный базис l_2) - является оптимальным методом восстановления.

Если $1/\delta > \xi_{n+1}$, то

$$E(T, W, I, \delta) = \left(\delta^2|\mu_0|^2 + \frac{1}{\gamma_{n+1}^2} + \delta^2 \sum_{k=1}^{n} |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right)^2\right)^{1/2},$$

а метод

$$\varphi(y) = \mu_0 y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\gamma_k}{\gamma_{n+1}}\right) \mu_k y_k e_k,$$

($\{e_k\}$ - стандартный базис l_2) - является оптимальным методом восстановления.

Применение для уравнения теплопроводности

Теперь получим аналогичный результат для задачи (1) и её решения (3). Оператору T сопоставляем вектор

$$(A_0(f), e^{-t}A_1(f), e^{-t}B_1(f), ..., e^{-n^2t}A_n(f), e^{-n^2t}B_n(f), ...),$$

(что следует из (1.1) и (2)). $If = (A_0(f), A_1(f), B_1(f), \dots, A_n(f), B_n(f))$ - вектор длины 2n+1. Напомним, что

$$W_2^r(\mathbb{T}) = \left\{ f(x) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{T}) : \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r}(A_k^2 + B_k^2) \leq 1 \right\},$$

($\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$; A_0, A_k, B_k - коэффициенты разложения f(x) в ряд Фурье).
Тогда $(\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4 ..., \mu_{2n}, \mu_{2n+1}, ...) = (1, e^{-t}, e^{-t}, e^{-4t}, e^{-4t} ..., e^{-n^2t}, e^{-n^2t}, ...)$.

Также $(\nu_0, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, ..., \nu_{2n}, \nu_{2n+1}, ...) = (0, 1, 1, 2^{2r}, 2^{2r}, ..., n^{2r}, n^{2r}, ...)$.
Причём $\exists C > 0 : e^{-2j^2 t} \le C \cdot j^{2r}, j = 1, 2, ...$
Отсюда получаем, что $\gamma_{2j} = \frac{j^r}{e^{-j^2 t}} = j^r e^{j^2 t}$.
Также из $\mu_{2j} = \mu_{2j-1}, \nu_{2j} = \nu_{2j-1}$ имеем, что $\gamma_{2j} = \gamma_{2j-1} \quad (6)$

Тогда

$$\xi_{2j-1} = \left(\sum_{k=1}^{2j-1} \nu_k \left(\frac{\gamma_{2j-1}}{\gamma_{2j}} - 1\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \left[\nu_1 \left(\frac{\gamma_{2j-1}}{\gamma_1} - 1\right) + \nu_2 \left(\frac{\gamma_{2j-1}}{\gamma_2} - 1\right) + ... + \nu_{2j-3} \left(\frac{\gamma_{2j-1}}{\gamma_{2j-3}} - 1\right) + \nu_{2j-2} \left(\frac{\gamma_{2j-1}}{\gamma_{2j-2}} - 1\right)\right]^{1/2} =$$

$$= \left(2 \sum_{k=1}^{j} \nu_{2k-1} \left(\frac{\gamma_{2j-1}}{\gamma_{2k-1}} - 1\right)\right)^{1/2} = \left(2 \sum_{k=1}^{j} k^{2r} \left(\left(\frac{j}{k}\right)^r e^{(j^2-k^2)t} - 1\right)\right)^{1/2}, j = 1, ..., n \quad (7)$$

Более того, заметим что для j=1,2,..., n выполнено $\xi_{2j} = \xi_{2j-1}$ - что следует из выражения (5) и равенств (6) в нашей задаче.

Теорема-2 (уравнение теплопроводности)

Если $\exists j \in \{1, ..., n\} : 1/\delta \in (\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$, то

$$E(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \delta \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{j} e^{-k^2 t} \left(1 - k^r e^{t(k^2-1)} (1 - c_1)\right)\right)^{1/2},$$

где

$$c_1 = 1 - \frac{2\delta^2 e^t \sum\limits_{k=1}^{j} k^r e^{-k^2 t}}{1 + 2\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{j} k^{2r}},$$

а метод

$$\varphi(y) = y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{j} \left(1 - k^r e^{t(k^2-1)} (1 - c_1)\right) e^{-k^2 t} (y_{2k-1} e_{2k-1} + y_{2k} e_{2k}),$$

($\{e_k\}$ - стандартный базис $L_2(\mathbb{T})$) - является оптимальным методом восстановления.

Если $1/\delta > \xi_{2n+1}$, то

$$E(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \left(\delta^2 + \frac{1}{n^{2r} e^{2n^2 t}} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{n} e^{-2k^2 t} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^r e^{(k^2-n^2)t}\right)^2\right)^{1/2},$$

а метод

$$\varphi(y) = y_0 e_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^r e^{(k^2-n^2)t}\right) e^{-k^2 t} (y_{2k-1} e_{2k-1} + y_{2k} e_{2k}),$$

($\{e_k\}$ - стандартный базис $L_2(\mathbb{T})$) - является оптимальным методом восстановления.

Доказательство

В случае $1/\delta \in (\xi_{2j}, \xi_{2j+1}]$ применение Теоремы-1 дает:

$$E(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \left(\delta^2 + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{j} \mu_{2k} \left(1 - \frac{\gamma_{2k}(1-c_1)}{\gamma_1}\right)\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\delta^2 + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{j} e^{-k^2 t} \left(1 - \frac{k^r e^{k^2 t}(1-c_1)}{e^t}\right)\right)^{1/2},$$

$$c_1 = 1 - \frac{2\delta^2 \gamma_1 \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{\nu_{2k}}{\gamma_{2k}}}{1 + 2\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{j} \nu^{2k}} = 1 - \frac{2\delta^2 e^t \sum\limits_{k=1}^{j} \frac{k^{2r}}{k^r e^{k^2 t}}}{1 + 2\delta^2 \sum\limits_{k=1}^{j} k^{2r}},$$

откуда получаем требуемое. В выражении метода $\varphi(y)$ используем разложение по всем базисным векторам $\{e_k\}$.

В случае $1/\delta > \xi_{2n+1}$ применение Теоремы-1 дает:

$$E(T, W_2^r(\mathbb{T}), I, \delta) = \left(\delta^2 + \frac{1}{\gamma_{2n+1}^2} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{n} \mu_{2k}^2 \left(1 - \frac{\gamma_{2k}}{\gamma_{2n+1}}\right)^2\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\delta^2 + \frac{1}{(n^r e^{n^2 t})^2} + 2\delta^2 \sum_{k=1}^{n} e^{-2k^2 t} \left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^r e^{(k^2-n^2)t}\right)^2\right)^{1/2}.$$

В выражении метода $\varphi(y)$ используем разложение по всем базисным векторам $\{e_k\}$.

Список литературы

[1] Кривошеев К. Ю. «Об оптимальном восстановлении линейных операторов по информации, известной со случайной ошибкой», Мат. сб., 2021.

[2] Осипенко К. Ю. "Введение в теорию оптимального восстановления": учебное пособие для вузов — Санкт-Петербург : Лань, 2022.

[3] Унучек С. А. "Оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности, точные на тригонометрических полиномах": Матем. заметки, 2022.