УДК 517.51

Оптимальное восстановление функций по неточно заданному преобразованию Радона на классах, задаваемых степенью оператора Лапласа

Тигран Баграмян

23 ноября 2012 г.

Аннотация

В работе рассматривается задача оптимального восстановления функции из пространства Шварца по неточно заданному (в средне квадратичной метрике) преобразованию Радона. Получены явные выражения для погрешности оптимального восстановления и семейства оптимальных методов. В качестве следствия, приведено одно неравенство для функций из пространства Шварца.

Ключевые слова: Преобразование Радона, пространство Шварца, оптимальное восстановление.

В общем случае задача оптимального восстановления, исследуемая в работах [1]-[3], состоит в восстановлении значения линейного оператора на некотором множестве (классе) в линейном пространстве по значениям другого линейного оператора (называемого информационным), возможно заданным неточно, с погрешностью в той или иной метрике. В конкретных задачах (начиная с [4] и недавних [5]-[8]) в качестве информации обычно рассматриваются линейные функционалы и операторы, сопоставляющие функции ее значения на наборе точек, ее коэффициенты Фурье или преобразование Фурье. В данной работе рассматривается преобразование Радона - оператор, переводящий функцию на $\mathbb{R}^d$ в множество ее интегралов по гиперплоскостям в $\mathbb{R}^d$. Этот оператор подробно изучается в теории компьютерной томографии, которая занимается численным восстановлением функций по их линейным или плоскостным интегралам. Для функций из пространства Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ в случае, если преобразование Радона известно точно, существует формула обращения, позволяющая произвести однозначное восстановление (см. [9]). Мы рассматриваем случай, когда преобразование Радона измерено неточно, но с известной погрешностью δ в средне квадратичной метрике. В теории оптимального восстановления подобные операторы рассматривались ранее в [10] (пример 3.2), где для функции на $\mathbb{R}^2$ известны интегралы вдоль прямых, проходящих в некотором конечном числе направлений, а также в работе [11], где рассматривается оператор радиального интегрирования, значение которого известно с погрешностью.

Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^d)$ состоит из гладких функций, вместе со своими производными убывающих на бесконечности быстрее любой степени $|x|$,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right| < \infty, \quad \forall \alpha,\beta\in\mathbb{Z}^d_+.$$

Рассмотрим оператор $(-\Delta)^{\alpha/2} : S(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)$, $\alpha\ge 0$, задаваемый формулой

$$\widehat{(-\Delta)^{\alpha/2}}f(\xi) = |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi),$$

где $\widehat{f}$ - преобразование Фурье f,

$$\widehat{f}(\xi) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\xi} f(x)dx.$$

Определим класс W,

$$W = \{f\in S(\mathbb{R}^d) : \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1\}.$$

Преобразованием Радона называется интегральный оператор

$$Rf(\theta,s) = \int_{x\theta=s} f(x)dx, \quad \theta\in\mathbb{S}^{d-1}, \quad s\in\mathbb{R}.$$

Функция Rf определена на единичном цилиндре $Z=\mathbb{S}^{d-1}\times\mathbb{R}$. Гильбертово пространство $L_2(Z)$ задается скалярным произведением

$$(g,h)_{L_2(Z)} = \int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}} g(\theta,s)\overline{h}(\theta,s)dsd\theta.$$

Предположим, что функция Rf известна с погрешность δ, т.е. дана функция $g\in L_2(Z)$, такая что

$$||Rf-g||_{L_2(Z)} \le \delta, \quad \delta>0.$$

Задача состоит в нахождении оптимального метода восстановления функции $f\in W$ по информации g. Под методом восстановления понимается произвольное отображение $m : L_2(Z)\to L_2(\mathbb{R}^d)$, а погрешностью метода называется величина

$$e(\delta, m) = \sup_{\substack{f\in W, g\in L_2(Z)\\ \|Rf-g\|_{L_2(Z)}\le\delta}} ||f - m(g)||_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется наименьшая из погрешностей всех возможных методов

$$E(\delta) = \inf_{m: L_2(Z)\to L_2(\mathbb{R}^d)} e(\delta, m).$$

Метод, на котором достигается погрешность оптимального восстановления, называется оптимальным методом восстановления.

Рассмотрим функции

$$x(\sigma) = (2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1+2\alpha}\chi_{[0,\infty)}(\sigma), \quad y(\sigma) = (2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1}\chi_{[0,\infty)}(\sigma), \quad \sigma\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}}\frac{(d-1)}{d-1+2\alpha}\delta^{\frac{4\alpha}{d-1+2\alpha}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}}\frac{2\alpha}{d-1+2\alpha}\delta^{\frac{2(1-d)}{d-1+2\alpha}}. \quad (2)$$

Теорема 1. *Погрешность оптимального восстановления равна*

$$E(\delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2} = (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}}\delta^{\frac{2\alpha}{d-1+2\alpha}}.$$

Методы

$$\widehat{m_a(g)}(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-d)/2}a(\sigma)\widehat{g}_\theta(\sigma),$$

где

$$g_\theta(s) = g(\theta, s),$$

$$a(\sigma) = \left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon(\sigma)\frac{\sigma^\alpha\sqrt{\widehat{\lambda}_1\widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2}\sqrt{x(\sigma)\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma)}\right)\chi_{[0,\infty)}(\sigma), \quad (3)$$

$\epsilon(\sigma)\in L_\infty(\mathbb{R})$ *и принимает значения на отрезке* $[-1, 1]$, *являются оптимальными.*

Доказательство. Рассмотрим двойственную задачу

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|(-\Delta)^{\alpha/2}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le 1, \quad \|Rf\|^2_{L_2(Z)} \le \delta^2.$$

Ее решение дает оценку снизу для квадрата погрешности оптимального восстановления в силу следующей цепочки неравенств (в которой m — произвольный метод)

$$E(\delta) \ge \sup_{\substack{f\in W, g\in L_2(Z)\\ \|Rf-g\|_{L_2(Z)}\le\delta}} \|f - m(g)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ge \sup_{\substack{f\in W\\ \|Rf\|_{L_2(Z)}\le\delta}} \|f - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \ge$$

$$\sup_{\substack{f\in W\\ \|Rf\|_{L_2(Z)}\le\delta}} \frac{\|f-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\|-f-m(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}{2} \ge \sup_{\substack{f\in W\\ \|Rf\|_{L_2(Z)}\le\delta}} \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Найдем решение двойственной задачи. Известно следующее соотношение, связывающее преобразование Радона функции и ее преобразование Фурье ([9]).

$$\widehat{(R_\theta f)}(\sigma)=(2\pi)^{(d-1)/2}\widehat{f}(\sigma\theta), \quad \sigma\in\mathbb{R},$$

где $R_\vartheta f(s)=Rf(\vartheta,s)$. Используя его, перепишем двойственную задачу.

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\|\widehat{f}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\int_0^\infty \sigma^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\widehat{f}(\sigma\theta)|^2d\theta d\sigma.$$

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\|\widehat{(-\Delta)^{\alpha/2}}f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi$$
$$=\int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\widehat{f}(\sigma\theta)|^2d\theta d\sigma.$$

$$\|Rf\|^2_{L_2(Z)}=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}|Rf(\theta,s)|^2dsd\theta=\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{R_\theta f}(\sigma)|^2d\sigma d\theta$$
$$=(2\pi)^{d-1}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}\int_{\mathbb{R}}|\widehat{f}(\sigma\theta)|^2d\sigma d\theta=(2\pi)^{d-1}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\widehat{f}(\sigma\theta)|^2d\theta d\sigma.$$

Положим $\int_{\mathbb{S}^{d-1}}|\widehat{f}(\sigma\theta)|^2d\theta d\sigma=d\mu(\sigma)$ и рассмотрим следующую задачу на мерах

$$\int_0^\infty \sigma^{d-1}d\mu\to\max,\quad \int_0^\infty\sigma^{d-1+2\alpha}d\mu\le 1,\quad (2\pi)^{d-1}\int_{\mathbb{R}}d\mu\le\delta^2. \tag{4}$$

Запишем ее функцию Лагранжа,

$$L(\mu,\lambda_1,\lambda_2)=-\lambda_1-\lambda_2\delta^2+$$
$$(2\pi)^{d-1}\int_{\mathbb{R}}\left(\lambda_1(2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1+2\alpha}\chi_{[0,\infty)}(\sigma)+\lambda_2-(2\pi)^{1-d}\sigma^{d-1}\chi_{[0,\infty)}(\sigma)\right)d\mu.$$

Рассмотрим функцию, заданную параметрически уравнениями (1) или

$$y(x)=(2\pi)^{\frac{1-d+(d-1)^2}{(d-1+2\alpha)}}x^{\frac{(d-1)}{(d-1+2\alpha)}}.$$

Она является вогнутой при $\alpha\ge 0$. Уравнение касательной к графику функции $y(x)$ в точке $1/\delta^2$ (соответствующее значение σ равно $\sigma^*=[(2\pi)^{d-1}\delta^{-2}]^{1/(d-1+2\alpha)}$) имеет вид $y=\widehat{\lambda}_1x+\widehat{\lambda}_2$, где $\widehat{\lambda}_1$, $\widehat{\lambda}_2$ определены в (2). Отсюда имеем $\widehat{\lambda}_1x(\sigma)+\widehat{\lambda}_2-y(\sigma)\ge 0$ и $L(\mu,\widehat{\lambda}_1,\widehat{\lambda}_2)\ge-\widehat{\lambda}_1-\widehat{\lambda}_2\delta^2$. Рассмотрим меру

$$d\mu^*=\frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}}D\left(\sigma-(2\pi)^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}}(\delta^{-2})^{\frac{1}{d-1+2\alpha}}\right)d\sigma,$$

где D - дельта-функция. Она допустима в задаче (4), удовлетворяет условиям дополняющей нежесткости

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} d\mu^* - 1 \right) + \widehat{\lambda}_2 \left((2\pi)^{d-1} \int_{\mathbb{R}} d\mu^* - \delta^2 \right) = 0$$

и минимизирует функцию Лагранжа, т.к. $L(\mu^*, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = -\widehat{\lambda}_1 - \widehat{\lambda}_2\delta^2$. Отсюда следует, что она доставляет экстремум в задаче (4), решение которой равно $\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2$.

Рассмотрим дельта-образную последовательность функций из $S(\mathbb{R}^d)$: $\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(n\sigma)^2} \longrightarrow D(\sigma)$. Обозначим $g_n(\sigma) = \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-(n(\sigma-\sigma^*))^2}$, тогда $g_n(\sigma) \longrightarrow \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D(\sigma - \sigma^*)$. Обозначим $c_n = \max\left(1, \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} g_n(\sigma) d\sigma\right)$ и $u_n(\sigma) = \frac{g_n(\sigma)}{c_n}$. В силу того, что

$$\int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} g_n(\sigma) d\sigma \longrightarrow \int_{-\infty}^\infty \chi_{[0,\infty)}(\sigma) \sigma^{d-1+2\alpha} \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D(\sigma - \sigma^*) d\sigma = 1,$$

имеем $u_n(\sigma) \longrightarrow \frac{\delta^2}{(2\pi)^{d-1}} D(\sigma - \sigma^*)$. Положим $\widehat{f}_n(\sigma\theta) = \frac{u_n(\sigma)}{|\mathbb{S}^{d-1}|}$, тогда последовательность $\{f_n\}$ допустима в двойственной задаче, т.к.

$$\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} u_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{c_n} \int_0^\infty \sigma^{d-1+2\alpha} g_n(\sigma) d\sigma \leq 1,$$

$$\|Rf\|^2_{L_2(Z)} = (2\pi)^{d-1} \int_{-\infty}^\infty u_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{c_n} (2\pi)^{d-1} \int_{-\infty}^\infty g_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{c_n}\delta^2 \leq \delta^2.$$

Значение двойственной задачи на последовательности $\{f_n\}$ совпадает с решением задачи (4)

$$\|f\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int_0^\infty \sigma^{d-1} u_n(\sigma) d\sigma = \frac{1}{c_n} \int_0^\infty \sigma^{d-1} g_n(\sigma) d\sigma \longrightarrow (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{d-1+2\alpha}} \delta^{\frac{4\alpha}{d-1+2\alpha}} = \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2,$$

откуда следует, что на $\{f_n\}$ достигается решение двойственной задачи.

Рассмотрим метод

$$\widehat{m_a(g)}(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma) \widehat{g}_\theta(\sigma).$$

Запишем его погрешность

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|\widehat{f} - \widehat{m_a(g)}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \sigma^{d-1} |\widehat{f}(\sigma\theta) - (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma) \widehat{g}_\theta(\sigma)|^2 d\sigma d\theta$$

$$= \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty \sigma^{d-1} \left| a(\sigma)(2\pi)^{(1-d)/2} \left(\widehat{g}_\theta(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta) \right) + \widehat{f}(\sigma\theta)(a(\sigma)-1) \right|^2 d\sigma d\theta.$$

Применим неравенство Коши-Буняковского $|xy|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ к векторам

$$x = \left((2\pi)^{(1-d)/2} \frac{a(\sigma)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2}}, \sigma^{\frac{1-d-2\alpha}{2}} \frac{(a(\sigma)-1)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_1}} \right),$$

$$y = \left(\left(\widehat{g}_\theta(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta) \right) \sqrt{\widehat{\lambda}_2}, \sigma^{\frac{d-1+2\alpha}{2}} \sqrt{\widehat{\lambda}_1} \widehat{f}(\sigma\theta) \right).$$

Получим

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

$$\leq \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \int_0^\infty A(\sigma) \left(\sigma^{d-1+2\alpha} \widehat{\lambda}_1 |\widehat{f}(\sigma\theta)|^2 + \left| \widehat{g}_\theta(\sigma) - (2\pi)^{(d-1)/2} \widehat{f}(\sigma\theta) \right|^2 \widehat{\lambda}_2 \right) d\sigma d\theta,$$

где

$$A(\sigma) = \sigma^{d-1} \left((2\pi)^{(1-d)} \frac{a^2(\sigma)}{\widehat{\lambda}_2} + \sigma^{1-d-2\alpha} \frac{(a(\sigma)-1)^2}{\widehat{\lambda}_1} \right).$$

Условие (3) эквивалентно $A(\sigma) \leq 1$, $\sigma \in [0, \infty)$, откуда

$$\|f - m_a(g)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 \delta^2.$$

$\blacksquare$

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 методы*

$$\widehat{m_a(g)}(\sigma\theta) = (2\pi)^{(1-d)/2} a(\sigma) \widehat{g}_\theta(\sigma),$$

где

$$a(\sigma) = \begin{cases} 1 & , \sigma \in [0, 2\pi\widehat{\lambda}_2^{(1-d)}], \\ \left(\frac{\widehat{\lambda}_2}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} + \epsilon(\sigma) \frac{\sigma^\alpha \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_2}}{\widehat{\lambda}_1 x(\sigma) + \widehat{\lambda}_2} \sqrt{x(\sigma)\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2 - y(\sigma)} \right) & , \sigma \in (2\pi\widehat{\lambda}_2^{(1-d)}, \widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}), \\ 0 & , \sigma \in [\widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}, \infty). \end{cases}$$

$\epsilon(\sigma) \in L_\infty(\mathbb{R})$ *и принимает значения на отрезке* $[-1, 1]$, *являются оптимальными.*

Доказательство. Положим $a(\sigma) = 1$ в неравенстве $A(\sigma) \leq 1$, получим, что оно выполнено при $\sigma \leq 2\pi\widehat{\lambda}_2^{(1-d)}$. Аналогично, положим $a(\sigma) = 0$, тогда $A(\sigma) \leq 1$ выполнено при $\sigma \geq \widehat{\lambda}_1^{-1/2\alpha}$. ∎

Функция a выполняет роль фильтра, определяющего соотношение между объемом полезной информации и погрешностью, с которой она задана. Из следствия видно, что при достаточно малых σ информация $\hat{g}$ не нуждается в фильтрации, а при достаточно больших σ фильтр можно выбрать равным 0, т.е. соответствующий объем информации не влияет на погрешность оптимального восстановления. Таким образом, выбрав фильтр a как в следствии 1, получим, что восстановленная функция будет иметь ограниченный спектр.

Следствие 2. *Для функции $f \in S(\mathbb{R}^d)$ имеет место точное неравенство*

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \|Rf\|_{L_2(Z)}^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}}, \quad \alpha > 0.$$

Доказательство. Из доказательства теоремы 1 следует $\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \delta^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}}$, при ограничениях $\|Ru\|_{L_2(Z)} = \delta$ и $\|(-\Delta)^{\alpha/2} u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 1$. Положив $u(x) = \frac{f(x)}{\|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}}$, $f \neq 0$, получим

$$\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq (2\pi)^{\frac{(d-1)(d-2)}{2(d-1+2\alpha)}} \|Rf\|_{L_2(Z)}^{\frac{2\alpha}{2(d-1+2\alpha)}} \|(-\Delta)^{\alpha/2} f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{\frac{d-1}{d-1+2\alpha}}.$$

∎

Список литературы

[1] *Michelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Michelli and T. J. Rivlin, eds.). Plenum Press. New York.—1977.—P. 1–54.

[2] *Michelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on optimal recovery // Lecture Notes in Mathematics. Numerical Analysis Lancaster 1984. Springer Berlin/Hidelberg.—1984.—P. 21–93.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление операторов по неточной информации // Итоги науки. Южный федеральный округ. Математический форум. Том 2. "Исследования по выпуклому анализу". Владикавказ.—2009.—С. 158–192.

[4] *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки.—1972.—Т. 12, № 4.—С.465-476.

[5] *Osipenko K. Yu., Stessin M.* Hadamard and Schwarz type theorems and optimal recovery in spaces of analytic functions // Constr. Approx.—2010.—Vol. 31, № 1.—P. 37-67.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН.—Т. 269.—М.: МАИК, 2010.—С. 181–192.

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функ. анал. и его прил.—2010.—Е. 44, № 3.—С. 76–79.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди-Литтлвуда-Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН.—2011.—Т. 438, № 3.—С. 300–302.

[9] *Natterer F.* The mathematics of computerized tomography.— Stuttgart: John Wiley & Sons. 1986.

[10] *Logan B.F., Shepp L.A.* Optimal reconstruction of a function from its projections // Duke mathematical journal.—1975.—Vol. 42, № 4.—P. 645-659.

[11] *Баграмян Т. Э.* Оптимальное восстановление гармонической функции по неточно заданным значениям оператора радиального интегрирования // Владикавказский математический журнал.—2012.—Т. 14, № 1.—С. 22–36.