МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Курсовая работа
студента 332 группы
Караваева П.Н.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ МИНИМУМА ФУНКЦИИ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Научный руководитель:
профессор Осипенко К. Ю.

Москва – 2014

Содержание

1 Введение

Довольно естественный подход к решению многих задач (не только математических) основан на выборе из возможных способов решения того, которое имеет наилучшие в том или ином смысле свойства. При этом, имея некоторый способ сравнения различных методов решения, отыскиваемый наилучший метод решения называют *оптимальным методом.* Попытаемся уточнить это понятие.

Как правило, искомый метод решения предполагается использовать не для одной, а для целой серии задач схожего типа. Обозначим множество таких задач через $\mathcal{P}$. При решении конкретной задачи p из этого множества обычно используется некоторая исходная информация об этой задаче $I(p)$. Эта информация часто бывает неполной или неточно заданной, что не позволяет решить задачу точно. Поэтому располагая информацией $I(p)$ и применяя к ней какой-то метод решения m, мы получаем на выходе лишь приближенное решение задачи.

Для сравнения эффективности решения при использовании различных методов надо ввести некоторую числовую характеристику метода, отражающую качество решения задачи данным методом, учитывающую погрешность решения и затраты на реализацию данного алгоритма и т.п. Обозначим такую характеристику через $e(p, I, m)$.

Поскольку мы заранее не знаем какую задачу из множества $\mathcal{P}$ нам предстоит решать, то естественно оценивать применяемый алгоритм решения сразу на всем множестве $\mathcal{P}$ и рассматривать величину $e(\mathcal{P}, I, m) = \sup\limits_{p \in \mathcal{P}} e(p, I, m)$, называемую *погрешностью метода* на множестве $\mathcal{P}$.

Если имеется некоторое множество методов $\mathcal{M}$, из которого надо выбрать наилучший, то выбрать его следует так, чтобы его погрешность была минимальной, т.е. из условия $e(\mathcal{P}, I, \widehat{m}) = \inf\limits_{m \in \mathcal{M}} e(\mathcal{P}, I, m) = E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M})$. При этом метод $\widehat{m}$ называется *оптимальным* , а величина $E(\mathcal{P}, I, \mathcal{M})$ — *погрешностью оптимального решения.*

2 Постановка задачи

Перейдем к постановке задачи для соболевского класса функций $W^2_\infty([-1,1])$, множества функций определенных на отрезке $[-1,1]$, имеющих абсолютно непрерывную производную первого порядка и удовлетворяющих почти всюду на $[-1,1]$ условию $|\,x''(t)| \leqslant 1$. Будем рассматривать задачу оптимального восстановления минимума функции $x(\tau), \tau \in [-1,1]$, по значениям функции $x(t) \in W^2_\infty([-1,1])$ в системе двух различных точек $\overline{t} = (t_1, t_2)$ из отрезка $[-1,1]$. Таким образом, информация о функции, имеющаяся нашем распоряжении такова: $F_{\overline{t}}\, x(t) = (x(t_1), x(t_2))$. Иными словами, речь идет об оптимальном восстановлении нелинейного функционала

$$Lx(t) = \min_{t\in[-1,1]} x(t).$$

В качестве методов восстановления будем рассматривать всевозможные функции $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Погрешностью метода m называется величина

$$e(L, W^2_\infty([-1,1]), F_{\overline{t}}, m) = \sup_{x(t)\in W^2_\infty([-1,1])} |Lx(t) - m(F_{\overline{t}}\, x(t))|, \tag{1}$$

а задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(L, W^2_\infty([-1,1]), F_{\overline{t}}) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}} \sup_{x(t)\in W^2_\infty([-1,1])} |Lx(t) - m(F_{\overline{t}}\, x(t))| \tag{2}$$

и центрального(т. е. наилучшего среди всех возможных, при фиксированных значениях в точках) метода восстановления $\widehat{m}_L$, на котором достигается нижняя грань в этом равенстве.

3 Решение задачи

Построим оптимальный метод в этой задаче. Докажем лемму, из которой выделим важное для нас следствие.

Лемма 1 *Для всех* $x \in W^2_\infty([-1,1])$ *таких, что* $x(t_1) = y_1$, $x(t_2) = y_2$ *и* $t_1, t_2 \in [-1,1]$ *выполняется неравенство*

$$|x(t) - L(t)| \leqslant \frac{1}{2}|(t-t_1)(t-t_2)| \qquad \text{при } t \in [-1,1] \ , \tag{3}$$

где $L(t) = y_1\frac{t-t_2}{t_1-t_2} + y_2\frac{t-t_1}{t_2-t_1}$ *— интерполяционный многочлен Лагранжа первой степени.*

Доказательство. Доказательство леммы для интерполяционного многочлена Лагранжа n-ой степени, когда $x^{(n)}$ - непрерывная функция, можно найти в [1]. Здесь мы рассматриваем случай $n = 2$, но при условии, что x' - абсолютно непрерывна(у x'' в этом случае могут быть разрывы)

Положим $s(t) = \frac{1}{2}(t-t_1)(t_2-t)$. Очевидно, что $s \in W^2_\infty([-1,1])$ и $s''(t) \equiv 1$.

Докажем, что $x(t) - L(t) \leqslant s(t)$ для всех $t \in [t_1, t_2]$. Предположим противное, то есть существует точка $\xi \in (t_1, t_2)$ такая, что

$$x(\xi) - L(\xi) > s(\xi). \tag{4}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(t) = s(t) - \rho(x(t) - L^i(t))$, $\rho = \dfrac{s(\xi)}{x(\xi) - L(\xi)}$.

В силу (4) $0 < \rho < 1$, а из этого следует, что почти всюду $\varphi''(t) = 1 - \rho x''(t) > 0$. Поскольку $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = \varphi(\xi) = 0$, то существуют точки $t_1 < \xi_1 < \xi_2 < t_2$ такие, что $\varphi'(\xi_1) = \varphi'(\xi_2) = 0$. Тогда $0 = \varphi'(\xi_2) - \varphi'(\xi_1) = \int\limits_{\xi_1}^{\xi_2} \varphi''(t)dt > 0$. Пришли к противоречию.

Аналогично доказывается, что $x(\xi) - L(\xi) \leqslant -s(\xi)$.

Случаи $t \in [-1, t_1]$ и $t \in [t_2, 1]$ рассматриваются по той же схеме.

$\blacksquare$

Следствие 1 *При фиксированном* $y \in \mathbb{R}^n$ *таком, что* $W_y = \{x(t) \in W^2_\infty([-1,1])\colon F_{\bar t}x = y\} \neq \varnothing$, *все функции из множества* W_y *лежат между верхней параболой и нижней параболой, графики которых при* $t \in [t_1, t_2]$ *изображены на рис. 1 и равны* $\mp\frac{t^2}{2} + (\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1} \pm \frac{t_1+t_2}{2})\,t + \frac{y_1t_2-y_2t_1}{t_2-t_1} \mp \frac{t_1t_2}{2}$ *соответственно.*

Доказательство.

Из Леммы 1 понятно, что функция $x(t)$ при $t \in [t_1, t_2]$ удовлетворяет неравенству

$$L(t) - \frac{1}{2}(t - t_1)(t_2 - t) \leqslant x(t) \leqslant L(t) + \frac{1}{2}(t - t_1)(t_2 - t)$$

причем для нашей задачи $L(t) = y_1 \frac{t-t_2}{t_1-t_2} + y_2 \frac{t-t_1}{t_2-t_1}$. Далее подставляем данные, и после упрощения получим следующее неравенство

$$\tfrac{t^2}{2} + (\tfrac{y_2-y_1}{t_2-t_1} - \tfrac{t_1+t_2}{2})\,t + \tfrac{y_1t_2-y_2t_1}{t_2-t_1} + \tfrac{t_1t_2}{2} \leqslant x(t) \leqslant -\tfrac{t^2}{2} + (\tfrac{y_2-y_1}{t_2-t_1} + \tfrac{t_1+t_2}{2})\,t + \tfrac{y_1t_2-y_2t_1}{t_2-t_1} - \tfrac{t_1t_2}{2}$$

Получили, что $x(t)$ на отрезке $[t_1, t_2]$ ограничена параболами с первыми коэффициентами $\pm\frac{1}{2}$.

$\blacksquare$

Обозначим верхнюю и нижнюю огибающие линии $\underline{z}_{\,y}(t), \overline{z}_{\,y}(t)$, соответственно.

$$\underline{z}_{\,y}(t) = \frac{t^2}{2} + (\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} - \frac{t_1 + t_2}{2})\,t + \frac{y_1t_2 - y_2t_1}{t_2 - t_1} + \frac{t_1t_2}{2}.$$

$$\overline{z}_{\,y}(t) = -\frac{t^2}{2} + (\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \frac{t_1 + t_2}{2})\,t + \frac{y_1t_2 - y_2t_1}{t_2 - t_1} - \frac{t_1t_2}{2}.$$

Для любой функции из W_y

$$\min_{t\in[t_1,t_2]} \underline{z}_{\,y}(t) \leqslant \min_{t\in[t_1,t_2]} x(t) \leqslant \min_{t\in[t_1,t_2]} \overline{z}_y(t).$$

Поэтому при $t_1 = -1, t_2 = 1$ метод

$$\widehat{m}_L(F_{\bar{t}}\,x(t)) = \frac{1}{2}\min_{t\in[t_1,t_2]} \underline{z}_{\,y}(t) + \frac{1}{2}\min_{t\in[t_1,t_2]} \overline{z}_{\,y}(t)$$

является центральный и для его погрешности имеет место равенство

$$e(L, W^2_\infty([-1,1]), F_{\bar{t}}, m) = \frac{1}{2}\sup_{x(t)\in W^2_\infty([-1,1])} (\min_{t\in[t_1,t_2]} \overline{z}_{\,y}(t) - \min_{t\in[t_1,t_2]} \underline{z}_{\,y}(t)).$$

Найдем вершины двух парабол z_1, z_2. Для этого приравняем их производные к нулю.

$$\underline{z}'_{\,y}(t) = t + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} - \frac{t_1 + t_2}{2} = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{y_1 - y_2}{t_2 - t_1} + \frac{t_1 + t_2}{2};$$

$$\overline{z}'_{\,y}(t) = -t + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \frac{t_1 + t_2}{2} = 0 \Rightarrow z_2 = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} + \frac{t_1 + t_2}{2}.$$

Пусть $t_1 = -1$, $t_2 = 1$. Тогда

$$\underline{z}_{\,y}(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2}\,t + \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{1}{2}, \;\; \overline{z}_{\,y}(t) = -\frac{t^2}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2}\,t + \frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{1}{2};$$

$$z_1 = \frac{y_1 - y_2}{2}, \;\; z_2 = \frac{y_2 - y_1}{2}.$$

$$\underline{z}_{\,y}(z_1) = \frac{(y_1 - y_2)^2}{8} + \frac{y_2 - y_1}{2}\frac{y_1 - y_2}{2} + \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{1}{2} = -\frac{(y_1 - y_2)^2}{8} + \frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{1}{2}$$

В зависимости от расположения этих вершин могут возникать разные случаи. И так как $z_1, z_2 \in [-1, 1]$ получаем условие на y_1, y_2 $\frac{|y_1 - y_2|}{2} \leqslant 1 \Rightarrow |y_1 - y_2| \leqslant 2$

1) Если $z_1 \leqslant -1$ и $z_2 \geqslant 1$, тогда $\min\limits_{t\in[-1,1]} \underline{z}_{\,y}(t) = y_1$ и $\min\limits_{t\in[-1,1]} \overline{z}_{\,y}(t) = y_1$;

2) Если $-1 \leqslant z_1 \leqslant 1$ и $-1 \leqslant z_2 \leqslant 1$, тогда $\min\limits_{t\in[-1,1]} \underline{z}_{\,y}(t) = \underline{z}_{\,y}(z_1)$ и $\min\limits_{t\in[-1,1]} \overline{z}_{\,y}(t) =$ $= \min\limits_{t\in[-1,1]}\{y_1, y_2\}$;

3) Если $z_1 \geqslant 1$ и $z_2 \leqslant -1$, тогда $\min\limits_{t\in[-1,1]} \underline{z}_{\,y}(t) = y_2$ и $\min\limits_{t\in[-1,1]} \overline{z}_{\,y}(t) = y_2$;

В 1) и 3), очевидно $\min\limits_{[-1,1]} x(t) = y_1$ и y_2.

Для случаев 1)-3) имеем

$$1)\widehat{m}_L(F_{\overline{t}}\, x(t)) = y_1;$$

$$2)\widehat{m}_L(F_{\overline{t}}\, x(t)) = \frac{1}{2}\,\underline{z}_{\,y}(z_1) + \frac{1}{2}\min\{y_1, y_2\};$$

$$3)\widehat{m}_L(F_{\overline{t}}\, x(t)) = y_2.$$

Найдем погрешность оптимального восстановления. Погрешность метода

$$e(L, W^2_\infty([-1, 1]), F_{\overline{t}}, \widehat{m}_L) = \frac{1}{2} \sup_{\substack{y_1, y_2 \in \mathbb{R} \\ |y_1 - y_2| \leqslant 2}} (\min\{y_1, y_2\} - \underline{z}_{\,y}(z_1)).$$

Пусть $\min\{y_1, y_2\} = c$. Сперва рассмотрим случай, когда $y_1 \neq y_2$ и пусть $y_2 = c, y_1 = c + \varepsilon, \varepsilon \geqslant 0$. В этом случае $z_1 = \frac{c+\varepsilon-c}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$, $\underline{z}_{\,y}(z_1) = -\frac{(c+\varepsilon-c)^2}{8} + \frac{c+\varepsilon+c}{2} - \frac{1}{2} = c - \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{8}$. Случай $y_1 = c, y_2 = c + \varepsilon$ аналогичен.

Если же $y_1 = y_2 = c$, то $\tilde{z}_1 = 0$ и $\tilde{\underline{z}}_{\,y}(\tilde{z}_1) = c - \frac{1}{2}$.

Из условия $|y_1 - y_2| \leqslant 2$ вытекает, что $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$. Следовательно, $\tilde{\underline{z}}_{\,y}(\tilde{z}_1) \leqslant \underline{z}_{\,y}(z_1)$.

Поэтому

$$e(L, W^2_\infty([-1, 1]), F_{\overline{t}}, \widehat{m}_L) = |\frac{1}{2}\,c - \frac{1}{2}\,(c - \frac{1}{2})| = \frac{1}{4}\,.$$

Данное значение достигается на функции $x(t) \equiv 0$. Следовательно

$$E(L, W^2_\infty([-1, 1]), F_{\overline{t}}) = \frac{1}{4}\,.$$

Подводя итог, оформим полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1 *Для восстановления минимума функции* $x(t), t \in [-1,1]$ *из класса* $W^2_\infty([-1,1])$ *с информационным оператором* $F_{\bar{t}}\,x(t) = (x(t_1), x(t_2)),\ t_1 = -1,\, t_2 = 1$ *центральным методом восстановления является*

$$\widehat{m}_L(F_{\bar{t}}\,x(t)) = \frac{1}{2}\underline{z}_{\,y}(z_1) + \frac{1}{2}\min\{y_1, y_2\}$$

и его погрешность $E(L, W^2_\infty([-1,1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{4}$.

4 Список литературы

[1] Е. А. Волков, "Численные методы".

[2] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, "Выпуклый анализ и его приложения".