ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННЫМ КОЭФФИЦИЕНТАМ ФУРЬЕ

К.Ю. Осипенко

МАТИ-РГТУ им. К.Э. Циолковского

Пусть с фиксированной погрешностью известен конечный набор коэффициентов Фурье некоторой периодической функции. Что можно сказать о самой функции и о ее производных на основании этой информации? Вопрос достаточно естественный и далеко не новый. Как поступают на практике? Высокочастотные коэффициенты Фурье отбрасывают, а остальные фильтруют, т.е. умножают на некоторые сглаживающие коэффициенты. С математической точки зрения эта задача может быть решена с помощью метода регуляризации. Однако при этом возникает ряд вопросов, которые не решаются при использовании этого метода.

Мы будем использовать другой подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности функции некоторому множеству (классу), мы будем искать в определенном смысле самый лучший метод, перебирая все возможные методы. На первый взгляд эта задача кажется очень сложной - как же перебрать все методы? Наша цель - показать, что во многих случаях и, в частности, в задаче восстановления функции по неточно заданным коэффициентам Фурье, такая постановка позволяет дойти до конкретных методов.

Перейдем к точным формулировкам. Положим

$$X_p = \left\{ x = (x_0, x_1, \ldots) : \sum_{j=0}^{\infty} n_j \left| x_j \right|^p < \infty \right\}, \quad 1 \le p < \infty,$$

где $x_j \in K$, $K = R$ или $K = C$, а $n_j \ge 0$, причем лишь конечное число n_j обращается в ноль. Если $n_0 = n_1 = \ldots = 1$, то соответствующее пространство X_p обычно обозначают через l_p, при этом

$$\| x \|_p = \Big(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \Big)^{1/p}. \tag{1}$$

Пусть задан оператор $T : X_p \to l_p$

$$Tx = (m_0 x_0, m_1 x_1, \ldots),$$

где $m_j \in K$, а последовательность $|m_j|^p / n_j$ для достаточно больших j ограничена (из этого условия вытекает, что $Tx \in l_p$ для всех $x \in X$).

Рассматривается задача об оптимальном восстановлении значений оператора T на множестве

$$W_p = \Big\{ x \in X_p : \sum_{j=0}^{\infty} n_j \, |x_j|^p \le 1 \Big\}$$

по неточно заданным координатам $x_0, \ldots, x_N$. Точнее, предполагается, что для любого $x \in W_p$ известен вектор $y = (y_0, \ldots, y_N)$, $y_j \in K$, $j = 0, \ldots, N$, такой, что

$\| \mathrm{I}^N x - y \|_{l_p^N} \le d$, где $I^N x = (x_0, \ldots, x_N)$, а $\| \cdot \|_{l_p^N}$ определяется равенством (1), в котором суммирование ведется до N. По вектору y надо восстановить наиболее точно значение Tx.

Под методами восстановления понимаются всевозможные отображения $m : K^N \to l_p$. Для данного метода m его погрешностью называется величина

$$e_N(T, W_p, d, m) = \sup_{\substack{x \in W_p,\, y \in K^N \\ \| \mathrm{I}^N x - y \|_{l_p^N} \le d}} \| Tx - m(y) \|_p .$$

Величина

$$E_N(T, W_p, d) = \inf_{m : K^N \to l_p} e_N(T, W_p, d, m)$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя, – оптимальным.

Будем предполагать, что $n_j > 0$ для всех $j \ge N+1$. Положим

$$A = \sup_{j \ge N+1} \frac{| m_j |^p}{n_j},$$

$$M = co\{(0,0) \cup \{(| m_j |^p, n_j)\}_{j \in \mathbb{Z}_+}\} + \{(t, tA) \,|\, t \ge 0\},$$

где где $co\Omega$ --- выпуклая оболочка множества Ω. Определим функцию $q(\cdot)$ на $[0, \infty)$ по правилу: $q(t) = \max\{x \,|\, (t, x) \in M\}$. Ясно, что $q(\cdot)$ – вогнутая ломаная.

Теорема. *При всех* $d > 0$

$$E_N(T, W_p, d) = d q^{1/p}(d^{-p}).$$

Пусть d^{-p} *принадлежит тому промежутку на* $\mathbb{R}_+$, *где* $q(\cdot)$ *задается уравнением* $q(t) = \hat{l}_1 + \hat{l}_2 t$. *Если* $\hat{l}_1, \hat{l}_2 > 0$, *то для всех* a_j, $0 \le j \le N$, *удовлетворяющих условию*

$$\begin{cases} \dfrac{| m_j - a_j |^q}{n_j^{q/p} \hat{l}_2^{q/p}} + \dfrac{| a_j |^q}{\hat{l}_1^{q/p}} \le 1, \quad 1 < p < \infty, 1/p + 1/q = 1, \\ \dfrac{| m_j - a_j |}{n_j \hat{l}_2} \le 1, \quad \dfrac{| a_j |}{\hat{l}_1} \le 1, \quad p = 1, \end{cases} \tag{2}$$

методы

$$\hat{m}(y) = \sum_{j=0}^{N} a_j y_j e_j, \tag{3}$$

где $\{e_j\}_{j \in Z_+}$ *– стандартный базис, являются оптимальными. Если* $\hat{l}_1 = 0$, *то*

$\hat{m}(y) = 0$ *– оптимальный метод, а если* $\hat{l}_2 = 0$ *, то*

$$\hat{m}(y) = \sum_{j=0}^{N} m_j y_j e_j$$

– оптимальный метод.

Частный случай приведенного здесь результата рассмотрен в работе [1], а его непрерывный аналог, т.е. для функций, заданных на прямой, исследован в [2].

1. *Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко*. Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью. // Матем. сб. – 2002.– Т. 193, вып.3 – С.79–100.

2. *Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко*. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных. // Функц. анализ и его прилож. – 2003. – Т. 37. – С. 51–64.