УДК 517.98

К. Ю. Осипенко

Оптимальное восстановление в весовых пространствах с однородными весами

В работе рассматриваются задачи восстановления операторов по неточно заданной информации в весовых пространствах L_q с однородными весами. Доказан ряд общих теорем, которые применяются к задачам восстановления дифференциальных операторов по неточно заданному преобразованию Фурье. В частности, получены оптимальные методы восстановления степеней оператора Лапласа по неточно заданному преобразованию Фурье в L_p-метрике.

Библиография: 11 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, линейные операторы, преобразование Фурье, неравенство Карлсона.

§ 1. Общая постановка

Пусть T — некоторое непустое множество, Σ — σ-алгебра подмножеств T и μ — неотрицательная σ-аддитивная мера на Σ. Через $L_p(T,\mu)$ обозначим совокупность всех Σ-измеримых функций со значениями в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_T |x(t)|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \operatorname*{vraisup}_{t\in T} |x(t)| < \infty, & p = \infty. \end{cases}$$

Положим

$$\mathcal{W} = \{\, x(\cdot) \in L_p(T,\mu) : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} < \infty \,\},$$
$$W = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W} : \|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|_{L_r(T,\mu)} \leqslant 1 \,\},$$

где $1 \leqslant p, r \leqslant \infty$, а $\varphi(\cdot)$ — некоторая функция на T.

Рассмотрим задачу восстановления оператора $\Lambda\colon \mathcal{W} \to L_q(T,\mu)$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, задаваемого равенством $\Lambda x(\cdot) = \psi(\cdot)x(\cdot)$, где $\psi(\cdot)$ — некоторая функция на T, на классе W по функции $x(\cdot) \in W$, известной с погрешностью на T (будем считать, что функции $\varphi(\cdot)$ и $\psi(\cdot)$ таковы, что оператор Λ отображает пространство $\mathcal{W}$ в $L_q(T,\mu)$).

Предполагается, что для каждой функции $x(\cdot) \in W$ известна функция $y(\cdot) \in L_p(T,\mu)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)} \leqslant \delta$, $\delta > 0$. Требуется по функции

$y(\cdot)$ восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon L_p(T,\mu)\to L_q(T,\mu)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{pqr}(m)=\sup_{\substack{x(\cdot)\in W,\ y(\cdot)\in L_p(T,\mu)\\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\leqslant\delta}}\|\Lambda x(\cdot)-m(y)(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}.$$

Величина

$$E_{pqr}=\inf_{m\colon L_p(T,\mu)\to L_q(T,\mu)}e_{pqr}(m) \tag{1.1}$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Случай, когда два из трех параметров p, q и r совпадают, изучался в работе [1]. Ситуация, когда все три параметра могут быть различными, рассматривалась в работе [2]. Эта задача оказалась тесно связанной с обобщенными неравенствами Карлсона (см. [3]). В данной работе уточняются результаты из работы [1] для однородных весов. Получены также общие теоремы для восстановления с однородными весами, которые применяются для построения оптимальных методов восстановления дифференциальных операторов в многомерном случае по неточно заданному преобразованию Фурье.

§ 2. Оптимальное восстановление с однородными весами при совпадении двух метрик

Пусть T — конус в линейном пространстве, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков $k\geqslant 0$ и $n>0$ (k и n — не обязательно целые), а $\mu(\cdot)$ — однородная мера порядка $d>0$.

Рассмотрим сначала случай, когда $q=r$. Будем использовать следующее обозначение

$$a_+=\begin{cases}a, & a\geqslant 0,\\ 0, & a<0.\end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть $1\leqslant q=r<p<\infty$ $k\geqslant 0$, $n>k$ и*

$$I_1=\int_T(|\psi(\xi)|^q-|\varphi(\xi)|^q)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(\xi)<\infty,$$
$$I_2=\int_T|\varphi(\xi)|^q(|\psi(\xi)|^q-|\varphi(\xi)|^q)_+^{\frac{q}{p-q}}\,d\mu(\xi)<\infty.$$

Тогда

$$E_{pqq}=I_1^{-\frac1p\frac{n-k}{n+d(1/q-1/p)}}I_2^{-\frac1q\frac{k+d(1/q-1/p)}{n+d(1/q-1/p)}}(I_1+I_2)^{1/q}\delta^{\frac{n-k}{n+d(1/q-1/p)}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t)=\left(1-\left(\delta\frac{I_2^{1/q}}{I_1^{1/p}}\right)^{\frac{(n-k)q}{n+d(1/q-1/p)}}\frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+\psi(t)y(t) \tag{2.1}$$

является оптимальным.

Доказательство. В работе [1; теорема 1] было доказано, что

$$E_{pqq}=\left(\frac{p}{q}\widehat{\lambda}_1\delta^p+\widehat{\lambda}_2\right)^{1/q},$$

если $\widehat{\lambda}_2$ является решением уравнения

$$\left(\int_T\left(|\psi(t)|^q-\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\right)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{1/p}\\ =\delta\left(\int_T|\varphi(t)|^q\left(|\psi(t)|^q-\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\right)_+^{\frac{q}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{1/q}>0, \quad (2.2)$$

а

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{q}{p}\delta^{q-p}\left(\int_T\left(|\psi(t)|^q-\widehat{\lambda}_2|\varphi(t)|^q\right)_+^{\frac{p}{p-q}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{p-q}{p}}.$$

При этом метод

$$\widehat{m}(y)(t)=\left(1-\widehat{\lambda}_2\frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+\psi(t)y(t) \quad (2.3)$$

является оптимальным.

Будем искать $\widehat{\lambda}_2$ в виде $\widehat{\lambda}_2=a^{(k-n)q}$, $a>0$. Сделав в уравнении (2.2) замену $t=a\xi$, получаем

$$a^{\frac{kq}{p-q}+\frac{d}{p}}I_1^{1/p}=\delta a^{n+\frac{kq}{p-q}+\frac{d}{q}}I_2^{1/q}.$$

Отсюда

$$a=\left(\frac{I_1^{1/p}}{\delta I_2^{1/q}}\right)^{\frac{1}{n+d(1/q-1/p)}}.$$

После той же замены имеем

$$\widehat{\lambda}_1=\frac{q}{p}\delta^{q-p}a^{q(k+d(1/q-1/p))}I_1^{\frac{p-q}{p}}.$$

Остается подставить полученные величины в выражения для погрешности оптимального восстановления и для оптимального метода.

Рассмотрим теперь случай, когда $q=p$.

Теорема 2. *Пусть* $1\leqslant p=q<r<\infty$, $k>0$, $n>k+d(1/p-1/r)$ *и*

$$J_1=\int_T|\varphi(\xi)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(\xi)|^p-1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\mu(\xi)<\infty,$$
$$J_2=\int_T|\varphi(\xi)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(\xi)|^p-1\right)_+^{\frac{r}{r-p}}\,d\mu(\xi)<\infty.$$

Тогда

$$E_{ppr}=J_1^{-\frac{1}{p}\frac{n-k-d(1/p-1/r)}{n-d(1/p-1/r)}}J_2^{-\frac{1}{r}\frac{k}{n-d(1/p-1/r)}}(J_1+J_2)^{1/p}\delta^{\frac{n-k-d(1/p-1/r)}{n-d(1/p-1/r)}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t)=\min\left\{1,\left(\frac{J_1^{1/p}}{\delta J_2^{1/r}}\right)^{\frac{kp}{n-d(1/p-1/r)}}\frac{1}{|\psi(t)|^p}\right\}\psi(t)y(t) \quad (2.4)$$

является оптимальным.

Доказательство. В работе [1; теорема 2] было доказано, что

$$E_{ppr}=\left(\widehat{\lambda}_1\delta^p+\frac{r}{p}\widehat{\lambda}_2\right)^{1/p},$$

если $\widehat{\lambda}_1$ является решением уравнения

$$\left(\int_T|\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(t)|^p-\widehat{\lambda}_1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\mu(t)\right)^{1/p}$$
$$=\delta\left(\int_T|\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(t)|^p-\widehat{\lambda}_1\right)_+^{\frac{r}{r-p}}\,d\mu(t)\right)^{1/r}>0,\quad(2.5)$$

а

$$\widehat{\lambda}_2=\frac{p}{r}\delta^{p-r}\left(\int_T|\varphi(t)|^{\frac{pr}{p-r}}\left(|\psi(t)|^p-\widehat{\lambda}_1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\mu(t)\right)^{\frac{r-p}{p}},$$

при этом метод

$$\widehat{m}(y)(t)=\alpha(t)\psi(t)y(t),$$

где

$$\alpha(t)=\min\left\{1,\frac{\widehat{\lambda}_1}{|\psi(t)|^p}\right\},$$

является оптимальным.

Будем искать $\widehat{\lambda}_1$ в виде $\widehat{\lambda}_1=a^{kp}$, $a>0$. Сделав в уравнении (2.5) замену $t=a\xi$, получаем

$$a^{\frac{nr}{p-r}+\frac{d}{p}}J_1^{1/p}=\delta a^{\frac{np}{p-r}+\frac{d}{r}}J_2^{1/r}.$$

Отсюда

$$a=\left(\frac{J_1^{1/p}}{\delta J_2^{1/r}}\right)^{\frac{1}{n+d(1/r-1/p)}}.$$

После той же замены имеем

$$\widehat{\lambda}_2=\frac{p}{r}\delta^{p-r}a^{r(-n+kp/r+d(1/p-1/r))}J_1^{\frac{r-p}{p}}.$$

Остается подставить полученные величины в выражения для погрешности оптимального восстановления и для оптимального метода.

Мы не рассматриваем здесь случай, когда $p=r$, так как он является непосредственным следствием более общего результата, полученного в работе [2; теорема 2].

§ 3. Однородные веса в $\mathbb{R}^d$

Пусть T — конус в $\mathbb{R}^d$, $d\mu(t)=dt$, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$ — однородные функции порядков $k\geqslant 0$ и $n>0$, $\varphi(t)\neq 0$ и $\psi(t)\neq 0$ для почти всех $t\in T$. Рассмотрим сферическую систему координат

$$\begin{aligned}
t_1&=\rho\cos\omega_1,\\
t_2&=\rho\sin\omega_1\cos\omega_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
t_{d-1}&=\rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\cos\omega_{d-1},\\
t_d&=\rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}.
\end{aligned}$$

Положим $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_{d-1})$,

$$\begin{aligned}\widetilde{\psi}(\omega) &= \rho^{-k}|\psi(\rho\cos\omega_1, \dots, \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1})|,\\ \widetilde{\varphi}(\omega) &= \rho^{-n}|\varphi(\rho\cos\omega_1, \dots, \rho\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1})|.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Обозначим через Ω область изменения ω, когда $t \in T$. Из того, что T — конус, следует, что Ω не зависит от ρ. Положим

$$J(\omega) = \sin^{d-2}\omega_1 \sin^{d-3}\omega_2 \dots \sin\omega_{d-2}.$$

Если $1 \leqslant q < p, r$ функция $k^{r-q}(1-k)^{-(p-q)}$ при $k \in [0,1)$ монотонно возрастает от 0 до $+\infty$. Поэтому для всех $t \in T$ можно определить функцию $k(t)$ равенством

$$\frac{k^{r-q}(t)}{(1-k(t))^{p-q}} = \frac{|\psi(t)|^{q(p-r)}}{|\varphi(t)|^{r(p-q)}}.$$

При $q = r$ положим

$$k(t) = \left(1 - \frac{|\varphi(t)|^q}{|\psi(t)|^q}\right)_+,$$

а при $q = p$

$$k(t) = \min\left\{1, |\psi(t)|^{-p}\right\}.$$

Положим

$$\gamma = \frac{n-k-d(1/q-1/r)}{n+d(1/r-1/p)}.$$

Если $\gamma \in (0,1)$, положим

$$\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{\gamma}{p} - \frac{1-\gamma}{r}.$$

Теорема 3. *Пусть $\gamma \in (0,1)$, $1 \leqslant q < p, r < \infty$ или $1 \leqslant q = r < p < \infty$ или $1 \leqslant q = p < r < \infty$. Предположим, что*

$$I = \int_\Omega \frac{\widetilde{\psi}^{q^*}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{q^*(1-\gamma)}(\omega)} J(\omega)\, d\omega < \infty.$$

Тогда $E_{pqr} = C\delta^\gamma$, где

$$C = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}} \left(\frac{B\left(q^*\gamma/p+1, q^*(1-\gamma)/r\right) I}{r(n-k-d(1/q-1/r))}\right)^{1/q^*},$$

а $B(\cdot,\cdot)$ — B-функция Эйлера. Кроме того, метод

$$\widehat{m}(y)(t) = k\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/r-1/p)}} t\right)\psi(t)y(t),$$

где

$$\xi_1 = \delta\left(\gamma^{q-r}(1-\gamma)^{p-q}C^{(p-r)q}\right)^{\frac{q^*}{pqr}}$$

является оптимальным.

Доказательство. Случай $1 \leqslant q < p, r < \infty$ доказан в работе [2; теорема 3] (в этой работе ответ дается в терминах B-функции с аргументами $q^*\gamma/p$ и $q^*(1-\gamma)/r$, но нам удобнее перейти к аргументам $q^*\gamma/p+1$ и $q^*(1-\gamma)/r$, что легко сделать, пользуясь свойствами B-функции). Остается рассмотреть два случая: $1 \leqslant q = r < p < \infty$ и $1 \leqslant q = p < r < \infty$.

1. Пусть $1 \leqslant q = r < p < \infty$. Воспользуемся теоремой 1. Перейдем в интеграле I_1 к сферической системе координат

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty} \rho^{d-1}\,d\rho \int_\Omega (\rho^{kq}\widetilde{\psi}^q(\omega) - \rho^{nq}\widetilde{\varphi}^q(\omega))_+^{\frac{p}{p-q}} J(\omega)\,d\omega \\
&= \int_\Omega \widetilde{\psi}^{\frac{qp}{p-q}}(\omega)J(\omega)\,d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{\frac{kqp}{p-q}+d-1}\left(1-\rho^{(n-k)q}\frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)}\right)_+^{\frac{p}{p-q}} d\rho.
\end{aligned}
$$

Зафиксируем ω и сделаем во втором интеграле замену

$$
t = \rho^{(n-k)q}\frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)}. \tag{3.2}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{(n-k)q}\int_\Omega \widetilde{\psi}^{\frac{qp}{p-q}}(\omega)\left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\widetilde{\varphi}(\omega)}\right)^{\frac{kqp}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{n-k}} J(\omega)\,d\omega \\
&\times \int_0^1 t^{\frac{kp}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{(n-k)q}-1}(1-t)^{\frac{p}{p-q}}\,dt = \frac{I}{(n-k)q}B\left(q^*\gamma/p+2, q^*(1-\gamma)/q\right).
\end{aligned}
$$

Проведем аналогичные вычисления для I_2

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{+\infty} \rho^{nq+d-1}\,d\rho \int_\Omega \widetilde{\varphi}^q(\omega)(\rho^{kq}\widetilde{\psi}^q(\omega) - \rho^{nq}\widetilde{\varphi}^q(\omega))_+^{\frac{q}{p-q}} J(\omega)\,d\omega \\
&= \int_\Omega \widetilde{\varphi}^q(\omega)\widetilde{\psi}^{\frac{q^2}{p-q}}(\omega)J(\omega)\,d\omega \int_0^{+\infty} \rho^{nq+\frac{kq^2}{p-q}+d-1}\left(1-\rho^{(n-k)q}\frac{\widetilde{\varphi}^q(\omega)}{\widetilde{\psi}^q(\omega)}\right)_+^{\frac{q}{p-q}} d\rho.
\end{aligned}
$$

Сделав ту же замену (3.2), получим

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{(n-k)q}\int_\Omega \widetilde{\varphi}^q(\omega)\widetilde{\psi}^{\frac{q^2}{p-q}}(\omega)\left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\widetilde{\varphi}(\omega)}\right)^{\frac{nq}{n-k}+\frac{kq^2}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{n-k}} J(\omega)\,d\omega \\
&\qquad \times \int_0^1 t^{\frac{n}{n-k}+\frac{kp}{(p-q)(n-k)}+\frac{d}{(n-k)q}-1}(1-t)^{\frac{q}{p-q}}\,d\rho \\
&\qquad = \frac{I}{(n-k)q}B\left(q^*\gamma/p+1, q^*(1-\gamma)/q+1\right).
\end{aligned}
$$

Положим

$$
B_1 = B\left(q^*\gamma/p+1, q^*(1-\gamma)/r\right).
$$

Тогда, пользуясь свойствами B-функции, будем иметь

$$I_1=\frac{q^*\gamma/p+1}{q(n-k)(q^*\gamma/p+1+q^*(1-\gamma)/q)}B_1I,$$
$$I_2=\frac{q^*(1-\gamma)/q}{q(n-k)(q^*\gamma/p+1+q^*(1-\gamma)/q)}B_1I.$$

В рассматриваемом случае (когда $r=q$)

$$\frac{1}{q^*}=\gamma\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right),\quad \gamma=\frac{n-k}{n+d(1/q-1/p)}.$$

Поэтому $q^*\gamma/p+1=q^*\gamma/q$. Отсюда

$$I_1=\gamma\frac{B_1I}{q(n-k)},\quad I_2=(1-\gamma)\frac{B_1I}{q(n-k)}.$$

Из теоремы 1 получаем

$$E_{pqq}=I_1^{-\frac{\gamma}{p}}I_2^{-\frac{1-\gamma}{q}}(I_1+I_2)^{1/q}\delta^\gamma$$
$$=\gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{q}}\left(\frac{B_1I}{q(n-k)}\right)^{\gamma(1/q-1/p)}\delta^\gamma=C\delta^\gamma.$$

Метод (2.1) может быть записан в виде

$$\widehat{m}(y)(t)=k\left(b^{\frac{1}{n+d(1/r-1/p)}}t\right)\psi(t)y(t),$$

где

$$b=\delta\frac{I_2^{1/q}}{I_1^{1/p}}=\delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{q}}\left(\frac{B_1I}{q(n-k)}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}=\delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{q}}C^{\frac{1}{\gamma}}\gamma^{\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1-\gamma}{q\gamma}}$$
$$=\delta(1-\gamma)^{\frac{1}{q\gamma}}C^{\frac{1}{\gamma}}=\delta\left((1-\gamma)C^q\right)^{\frac{1}{q\gamma}}=\delta\left((1-\gamma)C^q\right)^{\frac{q^*}{q}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}$$
$$=\delta\left((1-\gamma)C^q\right)^{\frac{q^*(p-q)}{pq^2}}=\xi_1.$$

2. Пусть $1\leqslant q=p<r<\infty$. Воспользуемся теоремой 2. Перейдем в интеграле J_1 к сферической системе координат

$$J_1=\int_0^{+\infty}\rho^{d-1}\,d\rho\int_\Omega\rho^{\frac{npr}{p-r}}\widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}J(\omega)\,d\omega$$
$$=\int_\Omega\widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{+\infty}\rho^{\frac{npr}{p-r}+d-1}\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{p}{r-p}}\,d\rho.$$

Зафиксируем ω и сделаем во втором интеграле замену

$$t=\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega).\tag{3.3}$$

Тогда

$$J_1=\frac{1}{kp}\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\widetilde{\psi}^{-\frac{npr}{(p-r)k}-\frac{d}{k}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_1^{+\infty}t^{\frac{nr}{(p-r)k}+\frac{d}{kp}-1}(t-1)^{\frac{p}{r-p}}\,dt$$
$$=\frac{I}{kp}\int_0^1 s^{\frac{nr}{(r-p)k}-\frac{p}{r-p}-\frac{d}{kp}-1}(1-s)^{\frac{p}{r-p}}\,ds=\frac{I}{kp}B\left(q^*\gamma/p+1,q^*(1-\gamma)/r+1\right).$$

Проведем аналогичные вычисления для J_2

$$J_2=\int_0^{+\infty}\rho^{d-1}\,d\rho\int_\Omega \rho^{\frac{npr}{p-r}}\widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{r}{r-p}}J(\omega)\,d\omega$$
$$=\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{+\infty}\rho^{\frac{npr}{p-r}+d-1}\left(\rho^{kp}\widetilde{\psi}^p(\omega)-1\right)_+^{\frac{r}{r-p}}\,d\rho.$$

Сделав ту же замену (3.3), получим

$$J_2=\frac{1}{kp}\int_\Omega \widetilde{\varphi}^{\frac{pr}{p-r}}(\omega)\widetilde{\psi}^{-\frac{npr}{(p-r)k}-\frac{d}{k}}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_1^{+\infty}t^{\frac{nr}{(p-r)k}+\frac{d}{kp}-1}(t-1)^{\frac{r}{r-p}}\,dt$$
$$=\frac{I}{kp}B\int_0^1 s^{\frac{nr}{(r-p)k}-\frac{r}{r-p}-\frac{d}{kp}-1}(1-s)^{\frac{r}{r-p}}\,ds=\frac{I}{kp}B\left(q^*\gamma/p,q^*(1-\gamma)/r+2\right).$$

Положим

$$B_2=B\left(q^*\gamma/p,q^*(1-\gamma)/r+1\right).$$

Тогда, пользуясь свойствами B-функции, будем иметь

$$J_1=\frac{q^*\gamma/p}{kp(q^*\gamma/p+q^*(1-\gamma)/r+1)}B_2I,$$
$$J_2=\frac{q^*(1-\gamma)/r+1}{kp(q^*\gamma/p+q^*(1-\gamma)/r+1)}B_2I.$$

В рассматриваемом случае (когда $q=p$)

$$\frac{1}{q^*}=(1-\gamma)\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right),\quad \gamma=\frac{n-k-d(1/p-1/r)}{n-d(1/p-1/r)}.$$

Поэтому $q^*(1-\gamma)/r+1=q^*(1-\gamma)/p$. Отсюда

$$J_1=\gamma\frac{B_2I}{kp},\quad J_2=(1-\gamma)\frac{B_2I}{kp}.$$

Из теоремы 2 получаем

$$E_{ppr}=J_1^{-\frac{\gamma}{p}}J_2^{-\frac{1-\gamma}{r}}(J_1+J_2)^{1/p}\delta^\gamma=\gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}}\left(\frac{B_2I}{kp}\right)^{(1-\gamma)(1/p-1/r)}\delta^\gamma.$$

Из свойств B-функции вытекает, что

$$B_2=\frac{q^*(1-\gamma)/r}{q^*\gamma/p}B_1=\frac{kpB_1}{r(n-k-d(1/q-1/r))}.$$

Следовательно,

$$E_{ppr} = \gamma^{-\frac{\gamma}{p}}(1-\gamma)^{-\frac{1-\gamma}{r}}\left(\frac{B_1 I}{r(n-k-d(1/q-1/r))}\right)^{1/q^*}\delta^\gamma = C\delta^\gamma.$$

Метод (2.4) может быть записан в виде

$$\widehat{m}(y)(t) = k\left(c^{\frac{1}{n-d(1/p-1/r)}}t\right)\psi(t)y(t),$$

где

$$c = \delta\frac{J_2^{1/r}}{J_1^{1/p}} = \delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{B_2 I}{kp}\right)^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}} = \delta\gamma^{-\frac{1}{p}}(1-\gamma)^{\frac{1}{r}}C^{-\frac{1}{1-\gamma}}\gamma^{-\frac{\gamma}{p(1-\gamma)}}(1-\gamma)^{-\frac{1}{r}}$$
$$= \delta\gamma^{-\frac{1}{p(1-\gamma)}}C^{-\frac{1}{1-\gamma}} = \delta\left(\gamma C^p\right)^{-\frac{1}{p(1-\gamma)}} = \delta\left(\gamma C^p\right)^{(p-r)\frac{q^*}{p^2 r}} = \xi_1.$$

Из работ [1], [2] вытекает, что во всех рассмотренных случаях справедливо равенство

$$E_{pqr} = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W\\ \|x(\cdot)\|_{L_p(T,\mu)}\leqslant\delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)}. \tag{3.4}$$

Отсюда легко получить, что имеет место точное неравенство

$$\|\Lambda x(\cdot)\|_{L_q(T,\mu)} \leqslant C\|x(\cdot)\|^\gamma_{L_p(T,\mu)}\|\varphi(\cdot)x(\cdot)\|^{1-\gamma}_{L_r(T,\mu)}. \tag{3.5}$$

§ 4. Восстановление дифференциальных операторов по неточно заданному преобразованию Фурье

Пусть $T=\mathbb{R}^d$, $d\mu(t)=dt$, $|\psi(\cdot)|$ и $|\varphi(\cdot)|$, как и ранее, — однородные функции порядков $k\geqslant 0$ и $n>0$, $\varphi(t)\neq 0$ и $\psi(t)\neq 0$ для почти всех $t\in\mathbb{R}^d$. Положим

$$X_p = \{\, x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d) : \varphi(\cdot)Fx(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\ Fx(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}^d)\,\},$$

где $Fx(\cdot)$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$. Определим оператор D следующим образом

$$Dx(\cdot) = F^{-1}(\varphi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot).$$

Предположим, что $\psi(\cdot)x(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ для всех $x(\cdot)\in X_p$. Положим

$$\Lambda x(\cdot) = F^{-1}(\psi(\cdot)Fx(\cdot))(\cdot).$$

Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении значений оператора Λ по неточно заданному преобразованию Фурье функции $x(\cdot)$ на классе

$$W_p = \{\, x(\cdot)\in X_p : \|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1\,\}.$$

Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot)\in W_p$ известна функция $y(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}^d)$ такая, что $\|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta$, $\delta>0$. Требуется по функции $y(\cdot)$ восстановить функцию $\Lambda x(\cdot)$. Предположим, что $\Lambda x(\cdot)\in L_q(\mathbb{R}^d)$ для всех

$x(\cdot) \in X_p$. В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon L_p(\mathbb{R}^d) \to L_q(\mathbb{R}^d)$. Погрешностью метода m называется величина

$$e_{pq}(\Lambda, D, m) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_p,\ y(\cdot)\in L_p(\mathbb{R}^d)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta}} \|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R}^d)}.$$

Величина

$$E_{pq}(\Lambda, D) = \inf_{m\colon L_p(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} e_{pq}(\Lambda, D, m) \tag{4.1}$$

называется погрешностью оптимального восстановления, а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

4.1. Восстановление в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$. В силу теоремы Планшереля

$$\|\Lambda x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\widetilde{\Lambda} x(\cdot) - F(m(y))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где

$$\widetilde{\Lambda} x(\cdot) = \psi(\cdot)Fx(\cdot).$$

Кроме того,

$$\|Dx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|\varphi(\cdot)Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Таким образом, рассматриваемая задача с точностью до множителя $(2\pi)^{-d/2}$ совпадает с задачей (1.1) при $q = r = 2$ с заменой $\varphi(\cdot)$ на $(2\pi)^{-d/2}\varphi(\cdot)$.

Положим

$$\widetilde{\gamma} = \frac{n-k}{n + d(1/2 - 1/p)}, \quad \widetilde{q} = \frac{1}{\widetilde{\gamma}(1/2 - 1/p)},$$

$$C_p(n,k) = \widetilde{\gamma}^{-\frac{\widetilde{\gamma}}{p}}(1-\widetilde{\gamma})^{-\frac{1-\widetilde{\gamma}}{2}}\left(\frac{B\left(\widetilde{q}\widetilde{\gamma}/p + 1, \widetilde{q}(1-\widetilde{\gamma})/2\right)}{2(n-k)}\right)^{1/\widetilde{q}}.$$

Теорема 4. *Пусть $k \geqslant 0$, $n > k$, $2 < p \leqslant \infty$,*

$$I = \int_{\Pi_{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^{\widetilde{q}}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{\widetilde{q}(1-\widetilde{\gamma})}(\omega)} J(\omega)\, d\omega < \infty, \quad \Pi_{d-1} = [0,\pi]^{d-2} \times [0, 2\pi].$$

Тогда

$$E_{p2}(\Lambda, D) = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}/2}} C_p(n,k) I^{1/\widetilde{q}}\delta^{\widetilde{\gamma}}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1}\left(\left(1 - \beta\left|\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}\right|^2\right)_+ \psi(t)y(t)\right), \tag{4.2}$$

где

$$\beta = \frac{k + d(1/2 - 1/p)}{n + d(1/2 - 1/p)} C_p^2(n,k)\left(\frac{\delta I^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{d/2}}\right)^{\frac{2(n-k)}{n+d(1/2-1/p)}},$$

является оптимальным.

Доказательство. Случай $2 < p < \infty$ вытекает из теоремы 3. Рассмотрим случай $p = \infty$. Из хорошо известной оценки снизу (см., например, [1]) имеем

$$E_{\infty 2}(\Lambda, D) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_\infty \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \tag{4.3}$$

Определим $\widehat{x}(\cdot)$ так, чтобы

$$F\widehat{x}(\xi) = \begin{cases} \delta, & |\psi(\xi)| > \lambda|\varphi(\xi)|, \\ 0, & |\psi(\xi)| \leqslant \lambda|\varphi(\xi)|, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$ выбрано из условия

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi(\xi)|^2 |F\widehat{x}(\xi)|^2\, d\xi = 1.$$

Тем самым $\lambda > 0$ надо выбрать из условия

$$\delta^2 \int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|} |\varphi(\xi)|^2\, d\xi = (2\pi)^d.$$

Переходя к сферической системе координат, получаем

$$\delta^2 \int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\varphi}^2(\omega) J(\omega)\, d\omega \int_0^{\Phi_1(\omega)} \rho^{2n+d-1}\, d\rho = (2\pi)^d,$$

где

$$\Phi_1(\omega) = \left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\lambda\widetilde{\varphi}(\omega)}\right)^{\frac{1}{n-k}}.$$

Отсюда

$$\frac{\delta^2}{2n+d}\lambda^{-\frac{2n+d}{n-k}} I = (2\pi)^d.$$

Следовательно,

$$\lambda = \left(\frac{\delta^2 I}{(2\pi)^d(2n+d)}\right)^{\frac{n-k}{2n+d}}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$C_\infty^2(n,k) = \frac{1}{2k+d}(2n+d)^{\frac{k+d/2}{n+d/2}}.$$

Поэтому $\lambda^2 = \beta$. Итак, в силу (4.3)

$$\begin{aligned} E_{\infty 2}^2(\Lambda, D) \geqslant \|\Lambda\widehat{x}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|} |\psi(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}} \widetilde{\psi}^2(\omega) J(\omega)\, d\omega \int_0^{\Phi_1(\omega)} \rho^{2k+d-1}\, d\rho \\ &= \frac{\delta^2}{(2k+d)(2\pi)^d}\lambda^{-\frac{2k+d}{n-k}} I = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}}} C_\infty^2(n,k) I^{2/\widetilde{q}} \delta^{2\widetilde{\gamma}}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оценим погрешность метода (4.2). Положим

$$\lambda(\xi)=\left(1-\beta\frac{|\varphi(\xi)|^2}{|\psi(\xi)|^2}\right)_+.$$

Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\|\Lambda x(\cdot)-\widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)|^2\left|Fx(\xi)-\lambda(\xi)y(\xi)\right|^2\,d\xi.$$

Положим $z(\cdot)=Fx(\cdot)-y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\|z(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta,\quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1.$$

Тогда

$$\|\Lambda x(\cdot)-\widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)|^2\left|(1-\lambda(\xi))\,Fx(\xi)+\lambda(\xi)z(\xi)\right|^2\,d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$\left|\frac{|\psi(\xi)|(1-\lambda(\xi))\sqrt{\beta}|\varphi(\xi)|Fx(\xi)}{\sqrt{\beta}|\varphi(\xi)|}+\sqrt{\lambda(\xi)}\sqrt{\lambda(\xi)}|\psi(\xi)|z(\xi)\right|^2.$$

Воспользуемся неравенством Коши–Буняковского

$$|ab+cd|^2\leqslant(|a|^2+|c|^2)(|b|^2+|d|^2).$$

Получаем следующую оценку

$$\begin{aligned}&\|\Lambda x(\cdot)-\widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\qquad\leqslant\operatorname*{vraisup}_{\xi\in\mathbb{R}^d}S(\xi)\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\beta|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2+\lambda(\xi)|\psi(\xi)|^2|z(\xi)|^2\right)\,d\xi,\end{aligned}$$

где

$$S(\xi)=\frac{|\psi(\xi)|^2|(1-\lambda(\xi))^2}{\beta|\varphi(\xi)|^2}+\lambda(\xi).$$

Если $|\psi(\xi)|^2\leqslant\beta|\varphi(\xi)|^2$, то $\lambda(\xi)=0$ и $S(\xi)\leqslant 1$. Если $|\psi(\xi)|^2>\beta|\varphi(\xi)|^2$, то $S(\xi)=1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}e^2_{\infty 2}(\Lambda,D,\widehat{m})&\leqslant\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\beta|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2+\lambda(\xi)|\psi(\xi)|^2|z(\xi)|^2\right)\,d\xi\\&\leqslant\beta+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}\left(|\psi(\xi)|^2-\beta|\varphi(\xi)|^2\right)\,d\xi\\&=\beta+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}|\psi(\xi)|^2\,d\xi-\beta\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|F\widehat{x}(\xi)|^2\,d\xi\\&=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}|\psi(\xi)|^2\,d\xi\leqslant E^2_{\infty 2}(\Lambda,D).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что метод $\widehat{m}(y)(\cdot)$ является оптимальным и (с учетом (4.4))

$$E^2_{\infty 2}(\Lambda,D)=\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|>\lambda|\varphi(\xi)|}|\psi(\xi)|^2\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}}}C^2_\infty(n,k)I^{2/\widetilde{q}}\delta^{2\widetilde{\gamma}}.$$

При $d = 1$ (в этом случае $I = 2$), $D = \dfrac{d^n}{dt^n}$ и $\Lambda = \dfrac{d^k}{dt^k}$ утверждение следствия 4 было получено в работе [4].

Определим оператор $(-\Delta)^{n/2}$, $n \geqslant 0$, следующим образом

$$(-\Delta)^{n/2}x(\cdot) = F^{-1}(|\xi|^n Fx(\xi))(\cdot), \quad |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_d^2}.$$

Положим

$$I_0 = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}.$$

Следствие 1. *Пусть $k \geqslant 0$, $n > k$, $2 < p \leqslant \infty$, Тогда*

$$E_{p2}((-\Delta)^{k/2}, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}/2}} C_p(n,k) I_0^{1/\widetilde{q}} \delta^{\widetilde{\gamma}}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1}\left(\left(1 - \beta|t|^{2(n-k)}\right)_+ |t|^k y(t)\right), \tag{4.5}$$

где

$$\beta = \frac{k + d(1/2 - 1/p)}{n + d(1/2 - 1/p)} C_p^2(n,k) \left(\frac{\delta I_0^{1/2 - 1/p}}{(2\pi)^{d/2}}\right)^{\frac{2(n-k)}{n + d(1/2-1/p)}},$$

является оптимальным.

Доказательство. В силу того, что в рассматриваемом случае $\widetilde{\psi}(\omega) = \widetilde{\varphi}(\omega) = 1$, имеем

$$I = \int_{\Pi_{d-1}} J(\omega)\, d\omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = I_0.$$

Далее, применяется теорема 4.

При $p = \infty$ утверждение следствия было получено в работе [5].

Выражение для $E_{22}((-\Delta)^{k/2}, (-\Delta)^{n/2})$ и соответствующий оптимальный метод были получены в работе [6].

Отметим, что оптимальный метод (4.5) использует информацию о неточном преобразовании Фурье функции $x(\cdot)$, измеренном только в шаре

$$|\xi| < \beta^{-\frac{1}{2(n-k)}}.$$

Причем, чем с большей погрешностью δ известна исходная информация, тем меньше шар, где содержится "полезная" информация.

Рассмотрим еще один пример. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Определим оператор D^α (производная порядка α) следующим образом

$$D^\alpha x(\cdot) = F^{-1}((i\xi)^\alpha Fx(\xi))(\cdot),$$

где $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1} \ldots (i\xi_d)^{\alpha_d}$. Функция $|(i\xi)^\alpha|$ является однородной функцией порядка $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d$. Рассмотрим задачу (4.1) при $\Lambda = D^\alpha$ и $D = (-\Delta)^{n/2}$.

Теорема 5. *Пусть $n > k$, $2 < p \leqslant \infty$. Тогда*

$$E_{p2}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{1}{(2\pi)^{d\widetilde{\gamma}/2}} C_p(n,k) I^{1/\widetilde{q}} \delta^{\widetilde{\gamma}},$$

где

$$I = 2\frac{\Gamma((\alpha_1\widetilde{q}+1)/2)\dots\Gamma((\alpha_d\widetilde{q}+1)/2)}{\Gamma((k\widetilde{q}+d)/2)}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1}\left(\left(1-\beta\frac{|t|^{2n}}{|t^{2\alpha}|}\right)_+ (it)^\alpha y(t)\right), \tag{4.6}$$

где

$$\beta = \frac{k+d(1/2-1/p)}{n+d(1/2-1/p)} C_p^2(n,k)\left(\frac{\delta I^{1/2-1/p}}{(2\pi)^{d/2}}\right)^{\frac{2(n-k)}{n+d(1/2-1/p)}},$$

является оптимальным.

Доказательство. По известной формуле Дирихле

$$\int_{\substack{\xi_1\geqslant 0,\dots,\xi_d\geqslant 0\\ \xi_1^2+\dots+\xi_d^2\leqslant 1}} \xi_1^{p_1-1}\dots\xi_d^{p_d-1}\,d\xi_1\dots d\xi_d = \frac{\Gamma(p_1/2)\dots\Gamma(p_d/2)}{2^d\Gamma(p_1/2+\dots+p_d/2+1)},$$

$p_1,\dots,p_d > 0$. Следовательно,

$$\int_{\xi_1^2+\dots+\xi_d^2\leqslant 1} |\xi_1|^{p_1-1}\dots|\xi_d|^{p_d-1}\,d\xi_1\dots d\xi_d = \frac{\Gamma(p_1/2)\dots\Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2+\dots+p_d/2+1)}.$$

Перейдем к сферическим координатам

$$\int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega,p_1,\dots,p_d)J(\omega)\,d\omega\int_0^1 \rho^{p_1+\dots+p_d-1}\,d\rho = \frac{\Gamma(p_1/2)\dots\Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2+\dots+p_d/2+1)}.$$

где

$$\Phi(\omega,p_1,\dots,p_d) = |\cos\omega_1|^{p_1-1}\dots|\sin\omega_1\sin\omega_2\cdots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}|^{p_d-1}.$$

Отсюда

$$\int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega,p_1,\dots,p_d)J(\omega)\,d\omega = 2\frac{\Gamma(p_1/2)\dots\Gamma(p_d/2)}{\Gamma(p_1/2+\dots+p_d/2)}.$$

Таким образом, для величины I из теоремы 4 имеем

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Pi_{d-1}} |\cos\omega_1|^{\alpha_1\widetilde{q}}\dots|\sin\omega_1\sin\omega_2\dots\sin\omega_{d-2}\sin\omega_{d-1}|^{\alpha_d\widetilde{q}}J(\omega)\,d\omega \\ &= \int_{\Pi_{d-1}} \Phi(\omega,\alpha_1\widetilde{q}+1,\dots,\alpha_d\widetilde{q}+1)J(\omega)\,d\omega = 2\frac{\Gamma((\alpha_1\widetilde{q}+1)/2)\dots\Gamma((\alpha_d\widetilde{q}+1)/2)}{\Gamma((k\widetilde{q}+d)/2)}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Теперь утверждение теоремы вытекает из теоремы 4.

Рассмотрим случай $p=2$. Он довольно близок к исследованиям, проведенным в работах [7], [8], хотя класс, на котором восстанавливался оператор D^α, здесь другой.

Теорема 6. *Пусть $n>k$. Тогда*

$$E_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{\alpha^{\alpha/2}}{k^{k/2}} \left(\frac{\delta}{(2\pi)^{d/2}}\right)^{1-k/n}, \tag{4.8}$$

а все методы

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1}(a(t)(it)^\alpha y(t)), \tag{4.9}$$

где $a(\cdot)$ — измеримые функции, удовлетворяющие условию

$$|\xi^{2\alpha}| \left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2n}} + \frac{|a(\xi)|^2}{(2\pi)^d\lambda_1}\right) \leqslant 1, \tag{4.10}$$

в котором

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^\alpha(n-k)}{(2\pi)^d k^k n}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-k/n}, \quad \lambda_2 = \lambda_1\frac{k}{n-k}\delta^2,$$

являются оптимальными.

Доказательство. Положим для $\varepsilon>0$

$$\widehat{\xi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\left(\frac{(2\pi)^d}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2n}}(\sqrt{\alpha_1},\dots,\sqrt{\alpha_d}), \quad \widehat{\xi}_\varepsilon = \widehat{\xi}\left(1-\frac{\varepsilon}{|\widehat{\xi}|}\right),$$

$$B_\varepsilon = \{\xi\in\mathbb{R}^d : |\xi-\widehat{\xi}_\varepsilon|<\varepsilon\}.$$

Определим функцию $x_\varepsilon(\cdot)$ так, чтобы

$$Fx_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\delta}{\sqrt{\operatorname{mes} B_\varepsilon}}, & \xi\in B_\varepsilon,\\ 0, & \xi\notin B_\varepsilon.\end{cases}$$

Тогда $\|Fx_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \delta^2$,

$$\|(-\Delta)^{n/2}x_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d\operatorname{mes}B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}|\xi|^{2n}\,d\xi \leqslant \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\widehat{\xi}|^{2n} = 1.$$

Пользуясь оценкой, аналогичной (4.3), получаем

$$\begin{aligned} E^2_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) &\geqslant \sup_{\substack{\|(-\Delta)^{n/2}x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1\\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta}} \|D^\alpha x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\geqslant \|D^\alpha x_\varepsilon(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d\operatorname{mes}B_\varepsilon}\int_{B_\varepsilon}|\xi^{2\alpha}|\,d\xi = \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\xi_0^{2\alpha}|,\end{aligned}$$

где ξ_0 — некоторая точка из B_ε. Устремляя ε к нулю, получаем оценку

$$E^2_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) \geqslant \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}|\widehat{\xi}^{2\alpha}| = \frac{\alpha^\alpha}{k^k}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-k/n}. \tag{4.11}$$

Будем искать оптимальные методы среди методов, имеющих вид (4.9). Переходя к преобразованию Фурье, получаем

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi^{2\alpha}|\,|Fx(\xi) - a(\xi)y(\xi)|^2\,d\xi.$$

Положим $z(\cdot) = Fx(\cdot) - y(\cdot)$ и будем учитывать, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |z(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \delta^2, \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|Fx(\xi)|^2\,d\xi \leqslant 1.$$

Тогда

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi^{2\alpha}|\,|(1-a(\xi))\,Fx(\xi) + a(\xi)z(\xi)|^2\,d\xi.$$

Запишем подынтегральное выражение в виде

$$|\xi^{2\alpha}|\left|\frac{(1-a(\xi))\sqrt{\lambda_2}|\xi|^n Fx(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}|\xi|^n} + \frac{a(\xi)}{(2\pi)^{d/2}\sqrt{\lambda_1}}(2\pi)^{d/2}\sqrt{\lambda_1}z(\xi)\right|^2.$$

Применяя неравенство Коши–Буняковского, получим следующую оценку

$$\|D^\alpha x(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \operatorname*{vraisup}_{\xi\in\mathbb{R}^d} S(\xi)\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\lambda_2|\xi|^{2n}|Fx(\xi)|^2 + (2\pi)^d\lambda_1|z(\xi)|^2\right)d\xi,$$

где

$$S(\xi) = |\xi^{2\alpha}|\left(\frac{|1-a(\xi)|^2}{\lambda_2|\xi|^{2n}} + \frac{|a(\xi)|^2}{(2\pi)^d\lambda_1}\right).$$

Если предположить, что $S(\xi) \leqslant 1$ для почти всех ξ, то, учитывая (4.11), получаем

$$\begin{aligned} e^2_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}, \widehat{m}) &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\lambda_2|\xi|^{2n}|Fx(\xi)|^2 + (2\pi)^d\lambda_1|z(\xi)|^2\right)d\xi \\ &\leqslant \lambda_2 + \lambda_1\delta^2 = \frac{\alpha^\alpha}{k^k}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{1-k/n} \leqslant E^2_{22}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Отсюда вытекает оптимальность рассматриваемых методов и равенство (4.8).

Остается доказать, что множество функций $a(\cdot)$, удовлетворяющих условию (4.10) не пусто. Условие (4.10) можно переписать в эквивалентной форме

$$\left|a(\xi) - \frac{(2\pi)^d\lambda_1}{(2\pi)^d\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2n}}\right|^2 \leqslant \frac{(2\pi)^d\lambda_1\lambda_2|\xi|^{2n}}{|\xi^{2\alpha}|((2\pi)^d\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2n})^2}(-|\xi^{2\alpha}| + (2\pi)^d\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2n}).$$

Поэтому достаточно показать, что при всех $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$-|\xi^{2\alpha}| + (2\pi)^d\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2n} \geqslant 0. \tag{4.13}$$

Из теоремы о среднем арифметическом и среднем геометрическом (см. [9; стр. 29]) следует, что

$$|\xi^{2\alpha}| \leqslant \frac{\alpha^\alpha}{k^k}|\xi|^{2k}.$$

Рассмотрим функцию $y(s) = s^{k/n}$, $s \geqslant 0$. Касательная к этой функции в любой точке $s_0 > 0$ имеет вид

$$y = \frac{k}{n}s_0^{k/n-1}s + \frac{n-k}{n}s_0^{k/n}.$$

Функция $y(\cdot)$ — вогнутая, поэтому при всех $s \geqslant 0$

$$s^{k/n} \leqslant \frac{k}{n}s_0^{k/n-1}s + \frac{n-k}{n}s_0^{k/n}.$$

Положив $s_0 = |\widehat{\xi}|^{2n}$, $s = |\xi|^{2n}$, получаем

$$|\xi^{2\alpha}| \leqslant \frac{\alpha^\alpha}{k^k}|\xi|^{2k} \leqslant \frac{\alpha^\alpha}{k^k}\left(\frac{k}{n}|\widehat{\xi}|^{2(k-n)}|\xi|^{2n} + \frac{n-k}{n}|\widehat{\xi}|^{2k}\right).$$

Легко проверить, что

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^\alpha(n-k)}{(2\pi)^d k^k n}|\widehat{\xi}|^{2k}, \quad \lambda_2 = \frac{\alpha^\alpha}{k^{k-1}n}|\widehat{\xi}|^{2(k-n)}.$$

Тогда получаем

$$|\xi^{2\alpha}| \leqslant (2\pi)^d\lambda_1 + \lambda_2|\xi|^{2n},$$

что эквивалентно неравенству (4.13).

4.2. Восстановление в метрике $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Положим

$$\begin{gathered}\gamma_1 = \frac{n-k-d/2}{n+d(1/2-1/p)}, \quad q_1 = \frac{1}{1/2+\gamma_1(1/2-1/p)},\\ \widetilde{C}_p(n,k) = \gamma_1^{-\frac{\gamma_1}{p}}(1-\gamma_1)^{-\frac{1-\gamma_1}{2}}\left(\frac{B\left(q_1\gamma_1/p+1, q_1(1-\gamma_1)/2\right)}{2(n-k-d/2)}\right)^{1/q_1}.\end{gathered} \tag{4.14}$$

Пусть функция $k(t)$ при $1 < p < \infty$ определена равенством

$$\frac{k(t)}{(1-k(t))^{p-1}} = \frac{|\psi(t)|^{p-2}}{|\varphi(t)|^{2(p-1)}},$$

при $p = 1$

$$k(t) = \min\{1, |\psi(t)|^{-1}\},$$

а при $p = \infty$

$$k(t) = \left(1 - \frac{|\varphi(t)|^2}{|\psi(t)|}\right)_+.$$

Теорема 7. *Пусть* $k \geqslant 0$, $n > k + d/2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k + p > 1$,

$$I = \int_{\Pi_{d-1}} \frac{\widetilde{\psi}^{q_1}(\omega)}{\widetilde{\varphi}^{q_1(1-\gamma_1)}(\omega)} J(\omega)\, d\omega < \infty, \quad \Pi_{d-1} = [0,\pi]^{d-2} \times [0, 2\pi].$$

Тогда

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) = \frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \widetilde{C}_p(n,k) I^{1/q_1} \delta^{\gamma_1}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1}\left(k\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}} t\right) \psi(t) y(t)\right),$$

где

$$\xi_1 = \delta \left(\frac{(1-\gamma_1)^{p-1}}{\gamma_1}\right)^{\frac{q_1}{2p}} \left(\frac{\widetilde{C}_p(n.k) I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},$$

является оптимальным.

Доказательство. В силу оценки, аналогичной (4.3), имеем

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta}} \|\Lambda x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Предположим, что $x(\cdot) \in W_p$ и $\|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$. Если взять $\widehat{x}(\cdot)$ так, чтобы

$$F\widehat{x}(\xi) = \varepsilon(\xi) e^{-i\langle t,\xi\rangle} Fx(\xi),$$

где

$$\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\psi(\xi)Fx(\xi)}}{|\psi(\xi)Fx(\xi)|}, & \psi(\xi)Fx(\xi) \neq 0, \\ 0, & \psi(\xi)Fx(\xi) = 0, \end{cases}$$

то $\widehat{x}(\cdot) \in W_p$, $\|F\widehat{x}(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$ и

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} \psi(\xi) F\widehat{x}(\xi) e^{i\langle t,\xi\rangle}\, d\xi\right| = \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi) Fx(\xi)|\, d\xi.$$

Поэтому

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geqslant \frac{1}{(2\pi)^d} \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_p \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta}} \int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\xi) Fx(\xi)|\, d\xi. \tag{4.15}$$

Пусть $1 \leqslant p < \infty$. Из (3.4) вытекает, что

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geqslant E_{p12},$$

где в задаче о нахождении E_{p12} функцию $\varphi(\cdot)$ следует заменить на $(2\pi)^{-d/2}\varphi(\cdot)$, а функцию $\psi(\cdot)$ на $(2\pi)^{-d}\psi(\cdot)$. Применяя теорему 3, получаем

$$E_{p\infty}(\Lambda, D) \geqslant E_{p12} = \frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \widetilde{C}_p(n,k) I^{1/q_1} \delta^{\gamma_1}.$$

Кроме того, из той же теоремы 3 вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\psi(\xi)F(\xi)-m(y)(\xi)\right|d\xi\leqslant E_{p12},$$

где

$$m(y)(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}k\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}}t\right)\psi(t)y(t).$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)F(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi-\int_{\mathbb{R}^d}m(y)(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\right| \\ \leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\left|\frac{1}{(2\pi)^d}\psi(\xi)F(\xi)-m(y)(\xi)\right|d\xi\leqslant E_{p12}\leqslant E_{p\infty}(\Lambda,D).$$

Отсюда вытекает, что метод $\widehat{m}(y)(\cdot)$ является оптимальным, а погрешность оптимального восстановления совпадает с величиной E_{p12}.

Теперь рассмотрим случай, когда $p=\infty$. Положим

$$s(\xi)=\begin{cases}\dfrac{\psi(\xi)}{|\psi(\xi)|}, & \psi(\xi)\neq 0,\\ 1, & \psi(\xi)=0.\end{cases}$$

Пусть функция $\widehat{x}(\cdot)$ такова, что

$$F\widehat{x}(\xi)=\begin{cases}\delta\overline{s(\xi)}, & |\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2,\\ \dfrac{\delta}{\lambda}\dfrac{\overline{\psi(\xi)}}{|\varphi(\xi)|^2}, & |\psi(\xi)|<\lambda|\varphi(\xi)|^2.\end{cases}$$

Выберем $\lambda>0$ так, чтобы $\|D\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=1$. Тогда для нахождения λ получаем уравнение

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\varphi(\xi)|^2\,d\xi+\frac{\delta^2\lambda^{-2}}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|<\lambda|\varphi(\xi)|^2}\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\varphi(\xi)|^2}\,d\xi=1.$$

Переходя к сферическим координатам, получаем

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\widetilde{\varphi}^2(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_2(\omega)}\rho^{2n+d-1}\,d\rho \\ +\frac{\delta^2\lambda^{-2}}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\frac{\widetilde{\psi}^2(\omega)}{\widetilde{\varphi}^2(\omega)}J(\omega)\,d\omega\int_{\Phi_2(\omega)}^{+\infty}\rho^{-2n+2k+d-1}\,d\rho=1,$$

где

$$\Phi_2(\omega)=\left(\frac{\widetilde{\psi}(\omega)}{\lambda\widetilde{\varphi}^2(\omega)}\right)^{\frac{1}{2n-k}}.$$

Тем самым получаем уравнение

$$\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\lambda^{-\frac{2n+d}{2n-k}}\frac{4n-2k}{(2n+d)(2n-2k-d)}I=1.$$

Отсюда
$$\lambda=\left(\frac{\delta^2(4n-2k)}{(2\pi)^d(2n+d)(2n-2k-d)}I\right)^{\frac{2n-k}{2n+d}}.$$

Из (4.15) вытекает, что

$$E_{\infty\infty}(\Lambda,D)\geqslant\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\psi(\xi)||F\widehat{x}(\xi)|\,d\xi=\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\psi(\xi)|\,d\xi$$
$$+\frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|<\lambda|\varphi(\xi)|^2}\frac{|\psi(\xi)|^2}{|\varphi(\xi)|^2}\,d\xi=\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\widetilde{\psi}(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_2(\omega)}\rho^{k+d-1}\,d\rho$$
$$+\frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\frac{\widetilde{\psi}^(\omega)}{\widetilde{\varphi}^2(\omega)}J(\omega)\,d\omega\int_{\Phi_2(\omega)}^{+\infty}\rho^{-2n+2k+d-1}\,d\rho=\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}}{(2\pi)^d(k+d)}I$$
$$+\frac{\delta}{\lambda(2\pi)^d(2n-2k-d)}\lambda^{\frac{2n-2k-d}{2n-k}}I=\frac{\delta(2n-k)\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}I}{(2\pi)^d(k+d)(2n-2k-d)}=\nu,$$

где
$$\nu=\frac{(n+d/2)^{\frac{k+d}{2n+d}}}{k+d}\left(\frac{(2n-k)I}{(2\pi)^d(2n-2k-d)}\right)^{\frac{2n-k}{2n+d}}\delta^{\frac{2n-2k-d}{2n+d}}.$$

Докажем, что для всех $x(\cdot)\in X_\infty$ выполнено равенство

$$\Lambda x(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{\lambda}{\delta(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2Fx(\xi)\overline{F\widehat{x}(\xi)}e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi. \quad (4.16)$$

Действительно,

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{\lambda}{\delta(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2Fx(\xi)\overline{F\widehat{x}(\xi)}e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$+\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|<\lambda|\varphi(\xi)|^2}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi$$
$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi=\Lambda x(t).$$

Оценим погрешность метода

$$m(y)(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)y(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi.$$

Имеем

$$\begin{aligned}|\Lambda x(t)-m(y)(t)| = \Bigg|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi \\ -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)y(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\Bigg| \\ \leqslant \Bigg|\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi \\ -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}(\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2)Fx(\xi)e^{i\langle t,\xi\rangle}\,d\xi\Bigg| \\ +\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\psi(\xi)-\lambda s(\xi)|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)-y(\xi)|\,d\xi.\end{aligned}$$

Для $x(\cdot)$ таких, что

$$\|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta,\quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1,$$

учитывая (4.16), получаем

$$|\Lambda x(t)-m(y)(t)|\leqslant\frac{\lambda}{\delta(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi(\xi)|^2|Fx(\xi)||F\widehat{x}(\xi)|\,d\xi+\mu\leqslant\frac{\lambda}{\delta}+\mu,$$

где

$$\mu=\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}(|\psi(\xi)-\lambda|\varphi(\xi)|^2)\,d\xi.$$

Выше было вычислено

$$\frac{\delta}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\psi(\xi)|\,d\xi=\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}}{(2\pi)^d(k+d)}I.$$

Далее,

$$\begin{aligned}\frac{\delta\lambda}{(2\pi)^d}\int_{|\psi(\xi)|\geqslant\lambda|\varphi(\xi)|^2}|\varphi(\xi)|^2\,d\xi=\frac{\delta\lambda}{(2\pi)^d}\int_{\Pi_{d-1}}\widetilde{\varphi}^2(\omega)J(\omega)\,d\omega\int_0^{\Phi_2(\omega)}\rho^{2n+d-1}\,d\rho \\ =\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}}{(2\pi)^d(2n+d)}I.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mu=\frac{\delta\lambda^{-\frac{k+d}{2n-k}}(2n-k)}{(2\pi)^d(k+d)(2n+d)}I.$$

Нетрудно убедиться, что $\lambda/\delta+\mu=\nu$, поэтому

$$e_{\infty\infty}(\Lambda,D,m)\leqslant\nu\leqslant E_{\infty\infty}(\Lambda,D).$$

Отсюда вытекает, что $m(y)(\cdot)$ — оптимальный метод, а погрешность оптимального восстановления равна ν. Несложная проверка показывает, что при $p=\infty$

$$\frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\widetilde{C}_\infty(n,k)I^{1/q_1}\delta^{\gamma_1}=\nu.$$

Вычислим ξ_1 при $p=\infty$. Имеем

$$\xi_1=\delta(1-\gamma_1)^{\frac{q_1}{2}}\left(\frac{\widetilde{C}_\infty(n.k)I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1/2}=\lambda^{\frac{n+d/2}{2n-k}}. \qquad (4.17)$$

Метод $m(y)(\cdot)$ может быть записан в виде

$$m(y)(t)=F^{-1}\left(\left(1-\lambda\frac{|\varphi(t)|^2}{|\psi(t)|}\right)_+\psi(t)y(t)\right).$$

В силу равенства (4.17)

$$m(y)(t)=F^{-1}\left(k\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d/2}}t\right)\psi(t)y(t)\right)=\widehat{m}(y)(t).$$

Следствие 2. *Пусть $k\geqslant 0$, $n>k$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $k+p>1$. Тогда*

$$E_{p\infty}\left(\frac{d^k}{dt^k},\frac{d^n}{dt^n}\right)=\frac{1}{(2\pi)^{(1+\gamma_1)/2}}\widetilde{C}_p(n,k)2^{1/q_1}\delta^{\gamma_1},$$

где γ_1, q_1 и $\widetilde{C}_p(n,k)$ определены равенствами (4.14) при $d=1$. Метод

$$\widehat{m}(y)(t)=F^{-1}\left(k\left(\xi_1^{\frac{1}{n+1/2-1/p}}t\right)(it)^ky(t)\right),$$

где

$$\xi_1=\delta\left(\frac{(1-\gamma_1)^{p-1}}{\gamma_1}\right)^{\frac{q_1}{2p}}\left(\frac{\widetilde{C}_p(n.k)2^{1/q_1}}{(2\pi)^{(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},$$

является оптимальным.

Утверждения следствия 2 для $p=1,2,\infty$ были получены в работе [10]. Там же рассмотрен случай, когда $p=1$, а $k=0$.

Следствие 3. *Пусть $k\geqslant 0$, $n>k+d/2$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $k+p>1$. Тогда*

$$E_{p\infty}((-\Delta)^{k/2},(-\Delta)^{n/2})=\frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\widetilde{C}_p(n,k)I_0^{1/q_1}\delta^{\gamma_1}.$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t)=F^{-1}\left(k\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}}t\right)\psi(t)y(t)\right),$$

где

$$\xi_1=\delta\left(\frac{(1-\gamma_1)^{p-1}}{\gamma_1}\right)^{\frac{q_1}{2p}}\left(\frac{\widetilde{C}_p(n.k)I_0^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},$$

является оптимальным.

Утверждения следствия 3 для $p=\infty$ были получено в работе [11].

Рассмотрим теперь применение теоремы 7 к операторам $\Lambda=D^\alpha$ и $D=(-\Delta)^{n/2}$.

Следствие 4. *Пусть* $k = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d > 0$, $n > k + d/2$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$E_{p\infty}(D^\alpha, (-\Delta)^{n/2}) = \frac{1}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}} \widetilde{C}_p(n, k) I^{1/q_1} \delta^{\gamma_1},$$

где

$$I = 2\frac{\Gamma((\alpha_1 q_1 + 1)/2) \ldots \Gamma((\alpha_d q_1 + 1)/2)}{\Gamma((kq_1 + d)/2)}. \tag{4.18}$$

Метод

$$\widehat{m}(y)(t) = F^{-1}\left(k\left(\xi_1^{\frac{1}{n+d(1/2-1/p)}} t\right)(it)^\alpha y(t)\right),$$

где

$$\xi_1 = \delta\gamma_1^{-\frac{q_1}{2p}} (1-\gamma_1)^{\frac{q_1}{2}(1-1/p)} \left(\frac{\widetilde{C}_p(n.k) I^{1/q_1}}{(2\pi)^{d(1+\gamma_1)/2}}\right)^{q_1(1/2-1/p)},$$

является оптимальным.

Доказательство. Величина I из теоремы 7 в рассматриваемом случае имеет вид

$$I = \int_{\Pi_{d-1}} |\cos\omega_1|^{\alpha_1 q_1} \ldots |\sin\omega_1 \sin\omega_2 \ldots \sin\omega_{d-2} \sin\omega_{d-1}|^{\alpha_d q_1} J(\omega)\, d\omega.$$

Учитывая (4.7), получаем равенство (4.18). Теперь утверждение следствия непосредственно вытекает из теоремы 7.

Список литературы

[1] Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106.

[2] Osipenko K. Yu. “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.

[3] Barza S., Burenkov V., Pečarić J., Persson L.-E. “Sharp multidimentional multiplicative inequalities for weighted L_p spaces with homogeneous weights”, *Math. Ineq. Appl.*, **1** (1998), 53–67.

[4] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?”, *Матем. заметки*, **92**:1 (2012), 59–67.

[5] Сивкова Е. О. “Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье”, *Владикавк. матем. журн.*, **14**:4 (2012), 63–72.

[6] Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О. “Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру”, *Матем. сб.*, **203**:4 (2012), 119–130.

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “Оптимальное восстановление производных на соболевских классах”, *Владикавк. матем. журн.*, **5**:1 (2003), 39–47.

[8] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. “О наилучших методах восстановления производных на соболевских классах”, *Изв. РАН. Сер. мат.*, **78**:6 (2014), 83–102.

[9] Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа. Г. *Неравенства*, М.: Иностранная литература, 1948.

[10] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление значений функций и их производных на прямой по неточно заданному преобразованию Фурье", *Матем. сб.*, **195**:10 (2004), 67–82.

[11] Сивкова Е. О. "Наилучшее восстановление лапласиана функции и точные неравенства", *Фундамент. и прикл. матем.*, **18**:5 (2013), 175–185.

К. Ю. Осипенко (K. Yu. Osipenko)
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступила в редакцию
28.06.2020