МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В. Ломоносова
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра общих проблем управления

КУРСОВАЯ РАБОТА

**"Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по двум неточно заданным измерениям"**

Выполнила студентка 3 курса
Смирнова А.А.

Научный руководитель
Осипенко К.Ю.

Москва 2011

1. Постановка задачи.

Распределение температуры бесконечного стержня в $\mathbb{R}$ описывается, как известно, уравнением теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

( $u(\cdot,\cdot)$ — функция на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$)с заданным начальным распределением температуры

$$u(0,\cdot) = u_0(\cdot). \tag{2}$$

Предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Единственным решением задачи (1)-(2) является интеграл Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x;u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4t}} u_0(\xi) d\xi,$$

где $u(t,\cdot) \to u_0(t)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Ставится следующая задача. Пусть в моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1,\cdot),\ldots,u(t_n,\cdot)$, т. е. известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что

$$\|u(t_j,\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \delta_j, j = 1,\ldots,n,$$

где $\delta_j > 0, j = 1,\ldots,n$.

Мы хотим каждому такому набору функций сопоставить набор функций из $L_2(\mathbb{R})$ который бы в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировал истинное распределение температур стержня в фиксированные моменты времени $\tau_1 < \ldots < \tau_k$.

Под этим понимается следующее. Любое отображение m из $(L_2(\mathbb{R}))^n = L_2(\mathbb{R})\times\ldots L_2(\mathbb{R})$ в $(L_2(\mathbb{R}))^k$ назовем методом восстановления ( температуры в $\mathbb{R}$ в моменты времени $(\tau_1,\ldots,\tau_k)$ по данной информации). Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(\tau,\overline{\delta},m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\overline{y}(\cdot)\in(L_2(\mathbb{R}))^n,\\ \|u(t_j,\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}<\delta_j, j=1,\ldots,n}} \sqrt{\sum_{i=1}^{k} p_j \|u(\tau_j,\cdot) - m_j(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}$$

где $m = (m_1 \ldots m_k), \overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot)), \overline{\delta} = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$, а $p_j$ — некоторые положительные весовые коэффициенты (предполагается, что все $p_j$ не могут одновременно обратиться в ноль).

Нас интересует величина

$$E(\tau, \overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2(\mathbb{R}))^n \to (L_2(\mathbb{R}))^k} e(\tau, \overline{\delta}, m),$$

которую назовем погрешностью оптимального восстановления и метод $\hat{m}$, на котором нижняя грань достигается, т. е. для которого

$$E(\tau, \overline{\delta}) = e(\tau, \overline{\delta}, \hat{m});$$

$\hat{m}$ называется оптимальным методом восстановления.

Свяжем с задачей оптимального восстановления следующую экстремальную задачу

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \to \max,\ \ \|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j,\ \ j = 1, \ldots, n,$$

которую назовем двойственной.

Докажем, что $E(\tau, \overline{\delta}) \ge \sup\limits_{\|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}$.

Действительно, пусть $u_0(\cdot)$ таково, что $\|u(t_j, \cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j, j = 1, \ldots, n$ и $m = (m_1, \ldots, m_k)$ - произвольный метод восстановления. Тогда

$$2\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| 2u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}} =$$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot) - (-u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot)) \|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \le$$

$$\le \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot) \|^2_{L_2(\mathbb{R})}} + \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| u\,(\tau_j, \cdot) - m_j(\cdot) \|^2_{L_2(\mathbb{R})}} \le 2e(\tau, \overline{\delta}, m).$$

Переходя к верхней грани по всем указанным $u_0(\cdot)$, получаем, что для всех $m$ справедливо неравенство

$$2e(\tau, \overline{\delta}, m) \ge \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \\ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j}} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \| u\,(\tau_j, \cdot)\,\|^2_{L_2(\mathbb{R})}}.$$

Следовательно

$$E(\tau,\overline{\delta}) = \inf_{m:(L_2(\mathbb{R}))^n \to (L_2(\mathbb{R}))^k} e(\tau,\overline{\delta},m) \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}) \\ \|u(t_j,\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta_j \\ j=1,\dots,n}} \sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}},$$

что и требовалось доказать.

2. Случай $n = 2$.

**Теорема 1.**

Пусть в поставленной задаче $n = 2, t_1 = 0, t_2 = T$, $\delta_0 > \delta_T$ и $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < T$. Тогда:

$$E^2(\tau, \delta_0, \delta_T) = \widehat{\lambda_0}\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2,$$

где $\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^{\tau_{j/T}} \left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right), \widehat{\lambda_T} = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_j}{T} \left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^{\left(\frac{\tau_j}{T}-1\right)}$.

Причем все методы $m = (m_1, \ldots, m_k)$ вида $Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_T^j(\xi)Fy_T(\xi)$, для которых выполнено:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T}\right) \leq 1, \end{cases}$$

являются оптимальными.

$\lhd$ Доказательство.

Найдем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления. Для этого рассмотрим двойственную задачу. В этом случае двойственная задача примет вид:

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{k} p_j \|u\left(\tau_j, \cdot\right)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2} \to \max,$$

$$\|u_0(\cdot)\| \leq \delta_0,$$
$$\|u(T, \cdot)\| \leq \delta_T.$$

Решение уравнения теплопроводности в образах Фурье имеет вид:

$$Fu(t, \xi) = e^{-\xi^2 t} Fu_0(\xi).$$

Для удобства будем рассматривать квадрат максимизируемого значения. Переходя к образам Фурье, в силу теоремы Планшереля получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{k} p_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 \tau_j} |Fu_0(\xi)|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}|Fu_0|^2 d\xi \le \delta_0^2, \quad \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T}|Fu_0|^2 d\xi \le \delta_T^2.$$

Рассмотрим расширенную задачу:

$$\sum_{j=1}^{k} p_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2\tau_j} d\mu \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} d\mu \le \delta_0^2, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T} d\mu \le \ \delta_T^2, \quad d\mu \ge 0, \ (3)$$

где $d\mu(\cdot)$ - мера на $\mathbb{R}$.

Пусть $f_i : A \to \mathbb{R}$, где $A$ - некоторое множество. Рассмотрим задачу:

$$f_0(x) \to \max, \ f_i \le 0, i = 1, \dots, n, \ x \in A$$

Положим $\mathcal{L}(x,\lambda) = -f_0(x) + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x), \quad \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

**Лемма.** Если $\exists \widehat{\lambda}_i \ge 0, \quad i = 1, \dots, n$ и $\widehat{x} \in A$, что:
1) $\min\limits_{x \in A} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda})$, 2) $\sum\limits_{i=1}^{n} \widehat{\lambda}_i f_i(\widehat{x}) = 0$

Тогда $\widehat{x}$ - решение задачи.

Положим

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_T) = \int_{\mathbb{R}} \left( -\sum_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j} + \lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T} \right) d\mu, \ \ \lambda_0 \ge 0, \lambda_T \ge 0.$$

Рассмотрим кривую в плоскости $(x, y)$, заданную параметрически:

$$\begin{cases} y = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j}, \\ x = e^{-2\xi^2 T}, \end{cases}$$

где $\xi$ - параметр.

Выражая $\xi$ через $x$ и подставляя полученное выражение в первое уравнение системы, получаем:

$$y = \sum_{j=1}^{k} p_j x^{\tau_j / T}.$$

По условию $0 < \tau_1 \ldots < \tau_k < T$, тогда $\frac{\tau_j}{T} < 1 \quad \forall j$.

Таким образом $y = f(x)$ - вогнутая возрастающая функция. Пусть $y = \lambda_0 + \lambda_T x$, - касательная к данной кривой в точке $(x_0, y_0)$.Так как $y = f(x)$ - вогнутая возрастающая функция, то для всех точек заданной кривой выполнено $(-y)+\lambda_0+\lambda_T x \geq 0$ Касательная задается уравнением:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

$$y = \lambda_0 + \lambda_T x,$$

$$y - y_0 = \left( \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \frac{\tau_j}{T} \cdot x_0^{(\tau_j/T-1)} \right) (x - x_0)$$

Получаем:

$$\lambda_T = \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_j}{T} x_0^{(\tau_j/T-1)}$$

Таким образом, $\lambda_T > 0 \quad \forall x_0$.

$$\lambda_0 = y_0 - x_0 \cdot \sum_{j=1}^{k} p_j \frac{\tau_j}{T} x_0^{(\tau_j/T-1)} = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_0^{\tau_j/T} - \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot \frac{\tau_j}{T} \cdot x_0^{\tau_j/T}$$

$$\lambda_0 = \sum_{j=1}^{k} p_j \cdot x_0^{\tau_j/T} \left( 1 - \frac{\tau_j}{T} \right)$$

Так как $\tau_j < T$ , то $1 - \frac{\tau_j}{T} > 0 \quad \forall j = 1, \ldots, k$. Таким образом, $\lambda_0 > 0 \quad \forall x_0$.

Положим $\widehat{d\mu} = A\delta\left(\xi - \xi_0\right)$, где $\delta(\cdot)$ - дельта-функция в точке 0, а $A$ и $\xi_0$ выбраны так, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$\lambda_0 \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{d\mu} - \delta_0^2 \right) = 0, \quad \lambda_T \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-2\xi^2 T} \widehat{d\mu} - \delta_T^2 \right) = 0.$$

Подставляя выражение для $\widehat{d\mu}$, получаем:

$$\begin{cases} A - \delta_0^2 = 0, \\ A e^{-2\xi_0^2 T} - \delta_T^2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $A = \delta_0^2, \quad \xi_0 = \sqrt{\frac{1}{T} \ln\left(\frac{\delta_0}{\delta_T}\right)}, \quad x_0 = \frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}$

Тогда

$$\widehat{d\mu} = \delta_0^2\delta\left(\xi - \sqrt{\frac{1}{T}\ln\left(\frac{\delta_0}{\delta_T}\right)}\right)$$

$$\widehat{\lambda_0} = \sum_{j=1}^{k} p_j\left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^{\tau_{j/T}}\left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right)$$

$$\widehat{\lambda_T} = \sum_{j=1}^{k} p_j\frac{\tau_j}{T}\left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^{\left(\frac{\tau_j}{T}-1\right)}$$

Для таких $\widehat{d\mu}$, $\widehat{\lambda_0}$, $\widehat{\lambda_T}$ выполнены условия дополняющей нежесткости и $\min\limits_{d\mu\geq 0}\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T}) = \mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T})$, тогда по лемме $\widehat{d\mu}$ является решением двойственной задачи и

$$\sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta_0,\\ \|u(T,\cdot)\|\leq\delta_T}} \sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \widehat{\lambda_0}\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2$$

$$\sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta_0,\\ \|u(T,\cdot)\|\leq\delta_T}} \sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$\delta_0^2\left(\sum_{j=1}^{k} p_j\left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^{\frac{\tau_j}{T}}\left(1 - \frac{\tau_j}{T}\right)\right) + \delta_T^2\left(\sum_{j=1}^{k} p_j\frac{\tau_j}{T}\left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^{\left(\frac{\tau_j}{T}-1\right)}\right)$$

$$\sup_{\substack{u_0(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\leq\delta_0,\\ \|u(T,\cdot)\|\leq\delta_T}} \sum_{j=1}^{k} p_j\|u\left(\tau_j,\cdot\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} = \sum_{j=1}^{k} p_j\delta_0^2\left(\frac{\delta_T^2}{\delta_0^2}\right)^{\frac{\tau_j}{T}}$$

Таким образом получаем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления:

$$E^2(\tau_1, \ldots \tau_k, \delta_0, \delta_T) \geq \widehat{\lambda_0}\delta_0^2 + \widehat{\lambda_T}\delta_T^2.$$

Найдем теперь оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и докажем, что она совпадает с оценкой снизу.

Погрешность метода:

$$e^2(m) = \sup_{\substack{u_0(\cdot),\ y_0,\ y_T \in L_2(\mathbb{R}),\\ \|u_0(\cdot)-y_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_0,\\ \|u(T,\cdot)-y_T(\cdot)\|\le\delta_T}} \sum_{j=1}^{k} p_j \|u(\tau_j,\cdot) - m_j(y_0(\cdot), y_T(\cdot))(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}$$

Будем рассматривать такие методы, которые в образах Фурье имеют вид: $Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_T^j(\xi)Fy_T(\xi)$ Имеем следующую задачу:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} p_j \int_{\mathbb{R}} \left| e^{-\xi^2\tau_j} Fu_0(\xi) - \alpha_0^j Fy_0(\xi) - \alpha_T^j Fy_T(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |Fu_0(\xi) - Fy_0(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-\xi^2 T} Fu_0(\xi) - Fy_T(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta_T^2.$$

Положим $z_0(\xi) = Fu_0(\xi) - Fy_0(\xi)$ и $z_T = e^{-\xi^2 T}Fu_0(\xi) - Fy_T(\xi)$. Тогда задача перепишется в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} p_j \int_{\mathbb{R}} \left|\left(e^{-\xi^2\tau_j} - \alpha_0^j - \alpha_T^j e^{-\xi^2 T}\right) Fu_0(\xi) + \alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_T^j z_T(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_T(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_T^2.$$

Будем оценивать методы, удовлетворяющие условию:

$$\alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2\tau_j}, j = 1, \ldots, k$$

Можно показать, что для методов, которые не удовлетворяют этому условию, погрешность восстановления равна $\infty$. Тогда задача сводится к следующей:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} p_j \int_{\mathbb{R}} \left|\ \alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_T^j z_T(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_T(\xi)|^2\, d\xi \le \delta_T^2.$$

По неравенству Коши - Буняковского имеем:

$$\left|\alpha_0^j z_0(\xi) + \alpha_T^j z_T(\xi)\right|^2 = \left|\frac{\alpha_0^j(\xi)}{\sqrt{\lambda_0}}\sqrt{\lambda_0} z_0 + \frac{\alpha_T^j(\xi)}{\sqrt{\lambda_T}}\sqrt{\lambda_T} z_T\right|^2 \le$$

$$\le \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T}\right)\left(\lambda_0 |z_0(\xi)|^2 + \lambda_T |z_T(\xi)|^2\right)$$

Тем самым рассматриваемая экстремальная задача оценивается следующим образом:

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T}\right) \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left(\lambda_0 |z_0(\xi)|^2 + \lambda_T |z_T(\xi)|^2\right) d\xi \le$$

$$\le (\lambda_0\delta_0^2 + \lambda_T\delta_T^2) \sup_{\xi\in\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T}\right)$$

Если при всех $\xi \in \mathbb{R}$

$$S(\xi) = \sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T}\right) \le 1,$$

то оценка сверху совпадает с оценкой снизу, соответствующий метод является оптимальным и система для нахождения $\alpha_0 = (\alpha_0^1, \dots, \alpha_0^k)$ и $\alpha_T = (\alpha_T^1, \dots, \alpha_T^k)$ запишется в виде:

$$\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{k} p_j \left(\frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T}\right) \le 1. \end{cases}$$

Таким образом теорема доказана.

►

**Теорема 2**(вырожденный случай).

Пусть в поставленной задаче $n = 2, t_1 = 0, t_2 = T$, $\delta_0 \le \delta_T$ и $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_k < T$. Тогда:

$$E^2(\tau, \delta_0, \delta_T) = \widehat{\lambda_0}\delta_0^2,$$

где $\widehat{\lambda_0} = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j$, причем преобразование Фурье оптимального метода восстановления имеет вид $Fm_j(\overline{y})(\xi) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j}}{\sum\limits_{j=1}^{k} p_j} Fy_0(\xi)$.

$\lhd$ Доказательство.

Аналогично теореме 1, найдем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления, используя расширенную двойственную задачу (3).

Пусть $\widehat{\lambda_T} \equiv 0$, тогда функция Лагранжа перепишется в виде:

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_T) = \int_{\mathbb{R}} \left( -\sum_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j} + \lambda_0 \right) d\mu.$$

Положим $\widehat{\lambda_0} = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j$ ( $\lambda_0 > 0$, т.к. все $p_j$ не могут одновременно обратиться в 0)

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T}) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{k} p_j \left(1 - e^{-2\xi^2\tau_j}\right) d\mu$$

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T}) \ge 0 \ \ \forall \ d\mu(\cdot) \ge 0$$

Положим $\widehat{d\mu(\xi)} = A\delta(\xi)$, где $A = \delta_0^2$ (следует из условий дополняющей нежесткости)

Таким образом получаем: $\widehat{\lambda_0} = \sum\limits_{j=1}^{k} p_j$, $\widehat{\lambda_T} = 0$, $\widehat{d\mu(\xi)} = \delta_0^2\delta(\xi)$ и $\mathcal{L}(\widehat{d\mu(\cdot)}, \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T}) = \min\limits_{d\mu(\cdot)\ge 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda_0}, \widehat{\lambda_T}) = 0$. Тогда по лемме $\widehat{d\mu(\cdot)}$ является решением задачи. Тогда:

$$E^2 \ge \delta_0^2\widehat{\lambda_0} = \delta_0^2 \sum_{j=1}^{k} p_j$$

Найдем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления. Будем рассматривать такие методы, которые в образах Фурье имеют вид: $Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi)$ Положим $z_0(\xi) = Fu_0(\xi) - Fy_0(\xi)$. Тогда задача перепишется в виде:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} p_j \int_{\mathbb{R}} \left|\left(e^{-\xi^2\tau_j} - \alpha_0^j\right) Fu_0(\xi) + \alpha_0^j z_0(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2 \, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \left|e^{-\xi^2 T} Fu_0(\xi) - Fy_T(\xi)\right|^2 d\xi \le \delta_T^2.$$

Рассмотрим метод: $\alpha_0^j = e^{-\xi^2\tau_j}, j = 1, \ldots, k$ (можно показать, что в этом случае для методов, не удовлетворяющих этому условию, погрешность восстановления равна $\infty$ ) Тогда задача сводится к следующей:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{k} p_j \int_{\mathbb{R}} \left| \ \alpha_0^j z_0(\xi)\right|^2 d\xi \to \max,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2 \, d\xi \le \delta_0^2,$$

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}}\sum_{j=1}^{k} p_j \left| \ \alpha_0^j\right|^2 \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} |z_0(\xi)|^2 \, d\xi \le \delta_0^2 \sup_{\xi\in\mathbb{R}}\sum_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j} \le \delta_0^2 \sum_{j=1}^{k} p_j$$

. Таким образом, верхняя грань равна нижней и метод $Fm_j(\overline{y})(\xi) = \frac{\sum_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j}}{\sum_{j=1}^{k} p_j} Fy_0(\xi)$ оптимален.

▶

3. Следствия.

**Следствие 1.** Множество оптимальных методов в невырожденном случае непусто.

$\lhd$ Доказательство. Как было показано в теореме1, оптимальный метод $Fm_j(\overline{y}) = \alpha_0^j(\xi)Fy_0(\xi) + \alpha_T^j(\xi)Fy_T(\xi), j = 1, \ldots, k$ можно задать с помощью системы

$$(*)\begin{cases} \alpha_0^j + \alpha_T^j e^{-\xi^2 T} = e^{-\xi^2 \tau_j}, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} p_j \left( \dfrac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \dfrac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right) \leq 1. \end{cases}$$

Положим:

$$\alpha_0^j = e^{-\xi^2\tau_j} - \alpha_T^j e^{-\xi^2 T},$$

$$\alpha_T^j = \frac{\lambda_T e^{-\xi^2(T+\tau_j)}}{\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T}}.$$

$$S(\xi) = \sum_{j=1}^{k} p_j \left( \frac{\left|\alpha_0^j(\xi)\right|^2}{\lambda_0} + \frac{\left|\alpha_T^j(\xi)\right|^2}{\lambda_T} \right)$$

Подставляя полученные выражения для $\alpha_0^j$ и $\alpha_T^j$ в $S(\xi)$ , получаем:

$$S(\xi) = \sum_{j=1}^{k} p_j \left( \frac{1}{\lambda_0} \left( e^{-\xi^2\tau_j} - \frac{\lambda_T e^{-\xi^2(T+\tau_j)}}{\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T}} e^{-\xi^2 T} \right)^2 + \frac{1}{\lambda_T} \left( \frac{\lambda_T e^{-\xi^2(T+\tau_j)}}{\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T}} \right)^2 \right)$$

Преобразуем полученное выражение:

$$S_\xi = \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j e^{-2\xi^2\tau_j}}{\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T}} \times \frac{1}{(\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T})} \left( \frac{\left(\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T} - \lambda_T e^{-2\xi^2 T}\right)^2}{\lambda_0} + \lambda_T e^{-2\xi^2 T} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{p_j e^{-2\xi^2\tau_j}}{\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T}}$$

Так как при $\hat{\lambda_0}$ и $\hat{\lambda_T}$ функция Лагранжа

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_0, \lambda_T) = \int_{\mathbb{R}} \left( -\sum_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j} + \lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T} \right) d\mu$$

неотрицательна, то $S(\xi) \leq 1$ и метод

$$Fm_j(\overline{y}) = \frac{\lambda_0 e^{-\xi^2\tau_j}}{\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T}} Fy_0(\xi) + \frac{\lambda_T e^{-\xi^2(T+\tau_j)}}{\lambda_0 + \lambda_T e^{-2\xi^2 T}} Fy_T(\xi)$$

является оптимальным.

►

**Следствие 2.** Пусть

$$\begin{cases} y = \sum_{j=1}^{k} p_j e^{-2\xi^2\tau_j}, \\ x = e^{-2\xi^2 T}. \end{cases}$$

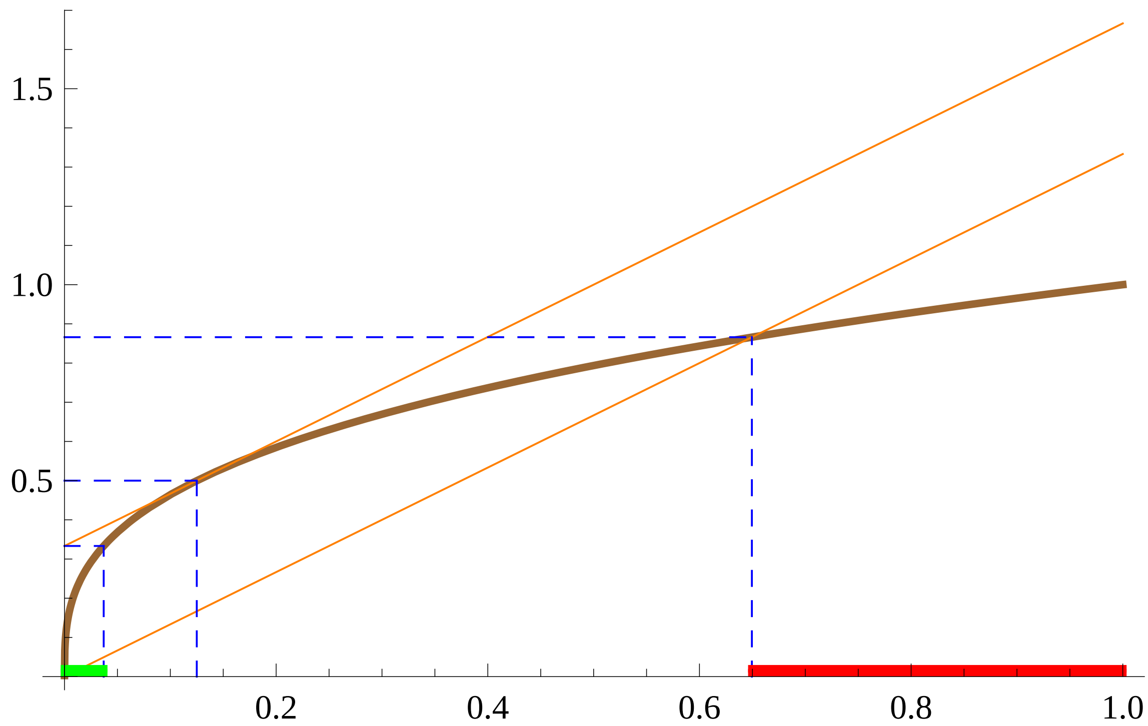
Тогда:

1) Для $\xi$ таких, что $x \in [x_2, 1]$ можно положить $\alpha_0^j = 0 \forall j$, где $x_2$ - это решение уравнения $y = \widehat{\lambda_T} x$;

2) Для $\xi$ таких, что $x \in (0, x_1]$ можно положить $\alpha_T^j = 0 \forall j$, где $x_1$ - это решение уравнения $y = \widehat{\lambda_0}$; причем $\widehat{\lambda_0}$ и $\widehat{\lambda_T}$ - коэффициенты касательной из теоремы 1.

Доказательство следует из системы $(*)$ для $\alpha_0^j$ и $\alpha_T^j$ и теоремы1.

На приведенном ниже графике зеленым отмечена область $x$ , для которых можно положить $\alpha_T^j = 0 \forall j$; красным отмечена область $x$ , для которых можно положить $\alpha_0^j = 0 \forall j$



1.5
1.0
0.5
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0