# ПРИНЦИП ЛАГРАНЖА В ТЕОРИИ ЭКСТРЕМУМА И ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ

**Г. Г. Магарил-Ильяев**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН*

magaril@mirea.ru

### Введение

В середине $XVIII$ века Лагранж сформулировал необходимые условия экстремума в задачах с ограничениями, задаваемыми системой равенств. Они заключаются в том, что надо составить функцию (функцию Лагранжа), которая есть сумма минимизируемого (или максимизируемого) функционала и функций, задающих равенства с неопределенными множителями, и тогда решение исходной задачи удовлетворяет необходимым условиям экстремума (т. е. минимума или максимума) в более простой задаче — в задаче на экстремум функции Лагранжа. Эта идея оказалась универсальной. Если рекомендации Лагранжа понимать чуть более расширительно, то легко заметить, что необходимые условия экстремума практически во всех задачах согласованы с этим принципом. При решении многих экстремальных задач достаточно владеть только принципом Лагранжа — точные формулировки не нужны (их может и не быть для рассматриваемой задачи). Данный подход здесь демонстрируется на типичном примере, связанным с одной задачей оптимального восстановления.

### Постановка задачи и формулировка результата

Пусть $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ — соболевское пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ ($\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$), абсолютно непрерывных на каждом отрезке из $\mathbb{R}_+$ и $\dot x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Соболевский класс — это множество $W_2^1(\mathbb{R}_+) = \{x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+) \mid \|\dot x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le 1\}$. Мы хотим восстановить значения линейного функционала $l\colon \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$, $lx(\cdot) = x(0)$ (т. е. значение функции в нуле) на классе $W_2^1(\mathbb{R}_+)$ по следующей информации: о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ нам известна функция

$y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такая, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le \delta$, где $\delta > 0$. Под задачей оптимального восстановления функционала $l$ на классе $W_2^1(\mathbb{R}_+)$ по данной информации понимается нахождение величины

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{R}_+),\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}_+) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le\delta}} |x(0) - m(y(\cdot))|$$

(где нижняя грань берется по всем отображениям $m\colon L_2(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$) называемая *погрешностью оптимального восстановления*, и отображений $\widehat{m}$, на которых эта нижняя грань достигается, называемых *оптимальными методами восстановления.*

Наша цель — доказать следующий результат.

**Теорема 1**

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) = \sqrt{2\delta}$$

*и линейный функционал* $\widehat{m}\colon L_2(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$,

$$\widehat{m}(y(\cdot)) = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta} y(t)\, dt$$

*оптимальный метод восстановления.*

### Доказательство

Покажем прежде всего, что величина $E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta)$ не меньше значения задачи

$$x(0) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\, dt \le \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\, dt \le 1. \tag{1}$$

Действительно, пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в (1) (т. е. $x(\cdot)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-x(\cdot)$ также допустима и мы имеем для любого $m\colon L_2(\mathbb{R}_+) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 2|x(0)| &\le |x(0) - m(0)| + |-x(0) - m(0)| \le \\ &2 \sup_{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le\delta,\ \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le 1} |x(0) - m(0)| \le \\ &\qquad 2 \sup_{\substack{\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le\delta \\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}_+),\ \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le 1}} |x(0) - m(y(\cdot))|. \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (1), а справа к нижней грани по всем отображениям $m$, получаем требуемое (учитывая еще, что в силу симметричности ограничений, вместо $|x(0)|$ можно писать $x(0)$).

Найдем теперь решение задачи (1), опираясь на принцип Лагранжа. Сначала рассуждаем эвристически. Сопоставим (1) следующую функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda) = -x(0) + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} x^2(t)\,dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(t)\,dt.$$

Согласно принципу Лагранжа, если функция $\widehat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1), то $\widehat{x}(\cdot)$ должна удовлетворять необходимым условиям минимума в задаче минимизации функции Лагранжа:

$$\mathcal{L}(x(\cdot),\lambda) \to \min.$$

Эти условия, очевидно, состоят в том, что, что производная функции Лагранжа в точке $\widehat{x}(\cdot)$ равняется нулю, т. е. (при разумных предположениях) должно выполняться тождество

$$-x(0) + 2\lambda_1 \int_{\mathbb{R}_+} \widehat{x}(t)x(t)\,dt + 2\lambda_2 \int_{\mathbb{R}_+} \dot{\widehat{x}}(t)\dot{x}(t)\,dt = 0, \quad \forall\ x(\cdot). \tag{2}$$

Если во втором интеграле проинтегрировать по частям (считая, что функции на бесконечности стремятся к нулю), то тождество перепишется так

$$-(2\lambda_2\dot{\widehat{x}}(0)+1)x(0) + \int_{\mathbb{R}_+} (2\lambda_1\widehat{x}(t) - 2\lambda_2\ddot{\widehat{x}}(t))x(t)\,dt = 0, \quad \forall\ x(\cdot).$$

Так как это верно для любого $x(\cdot)$, то $\widehat{x}(\cdot)$ есть решение такой задачи

$$\lambda_2\ddot{x} - \lambda_1 x = 0, \quad 2\lambda_2\dot{x}(0) = -1. \tag{3}$$

Общее решение дифференциального уравнения (считая, что $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$) имеет вид

$$x(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}\,t} + C_2 e^{\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}\,t}.$$

Но $\widehat{x}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ и поэтому $C_2 = 0$.

Теперь потребуем, чтобы функция $\widehat{x}(t) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda_1/\lambda_2}\,t}$ была допустима в задаче (1), а именно, потребуем, чтобы

$$\int_{\mathbb{R}_+} \widehat{x}^2(t)\,dt = \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}_+} \dot{\widehat{x}}^2(t)\,dt = 1.$$

Эти соотношения вместе со вторым условием в (3) приводят к тому, что

$$\widehat{x}(t) = \sqrt{2\delta}e^{-t/\delta}, \quad \lambda_1 = \frac{1}{2\delta\sqrt{2\delta}}, \quad \lambda_2 = \frac{\sqrt{\delta}}{2\sqrt{2}}.$$

Подставляя все это в (2), приходим к равенству

$$x(0) = \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}x(t)\,dt - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}\dot{x}(t)\,dt. \tag{4}$$

Теперь начинаем рассуждать точно. Легко проверить, что (4) имеет место для всех функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$. Действительно, ясно, что $\widehat{x}(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ и интегрируя во втором интеграле по частям с учетом того, что функции из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}_+)$ ограничены,[1] доказываем справедливость (4).

Пусть $x(\cdot)$ — допустимая функция в задаче (1). Тогда из (4) по неравенству Коши-Буняковского будем иметь

$$x(0) \le \frac{1}{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta}\,dt\right)^{1/2} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} + \\ \left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta}\,dt\right)^{1/2} \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le \frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{\delta}{2}}\,\delta + \sqrt{\frac{\delta}{2}} = \sqrt{2\delta}. \tag{5}$$

Но $\widehat{x}(0) = \sqrt{2\delta}$ и следовательно, $\widehat{x}(\cdot)$ — решение задачи (1). Отсюда и из доказанной оценки снизу вытекает, что

$$E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta) \ge \sqrt{2\delta}. \tag{6}$$

Покажем теперь, что линейный функционал на $L_2(\mathbb{R}_+)$

$$\widehat{m}\colon y(\cdot) \to \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-t/\delta}y(t)\,dt$$

[1]Так как $\int_0^t x(\tau)\dot{x}(\tau)\,d\tau = x^2(\tau)|_0^t - \int_0^t x(\tau)\dot{x}(\tau)\,d\tau$, то $2\int_0^t x(\tau)\dot{x}(\tau)\,d\tau = x^2(t) - x^2(0)$. Отсюда, по неравенству Коши-Буняковского $x^2(t) \le x^2(0) + 2\left(\int_{\mathbb{R}_+} x^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}_+} \dot{x}^2(\tau)\,d\tau\right)^{1/2}$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

есть оптимальный метод восстановления. Действительно, пусть $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}_+)$ и функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}_+)$ такова, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le \delta$. Тогда, используя (4), а затем делая такие же оценки как в (5), будем иметь

$$|x(0) - \widehat{m}(y(\cdot))| = \left|x(0) - \frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta} y(t)\,dt\right| =$$
$$\left|\frac{1}{\delta}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta}(x(t) - y(t))\,dt - \int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta}\dot{x}(t)\,dt\right| \le$$
$$\frac{1}{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta}\,dt\right)^{1/2} \|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} +$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}_+} e^{-2t/\delta}\,dt\right)^{1/2} \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)} \le \sqrt{2\delta}.$$

Так как это верно для всех указанных $x(\cdot)$ и $y(\cdot)$, то отсюда и (6) следует, что

$$\sup_{\substack{\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le\delta \\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}_+),\ \|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}_+)}\le 1}} |x(0) - \widehat{m}(y(\cdot))| \le \sqrt{2\delta} \le E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta).$$

Но левая часть этого неравенства, очевидно, не меньше $E(l, W_2^1(\mathbb{R}_+), \delta)$, и мы получаем все утверждения теоремы.