УДК 517.518.1

Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова

Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру

В работе решается задача о наилучшем восстановлении дробной степени оператора Лапласа гладкой функции на $\mathbb{R}^d$ по точно или приближенно известному ее преобразованию Фурье на некотором выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^d$. Построена серия оптимальных методов восстановления. Информация о преобразовании Фурье за пределами некоторого шара с центром в нуле оказывается лишней – оптимальные методы ее не используют. Сами методы различаются способом "обработки" полезной информации.

Библиография: 12 названий.

Ключевые слова: оператор Лапласа, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье.

§ 1. Постановка задачи и формулировка результата

Пусть Δ – оператор Лапласа на $\mathbb{R}^d$, т.е. для гладкой функции $f(\,\cdot\,)$

$$\Delta f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_d^2}(x),$$

где $x=(x_1,\dots,x_d)$. Если F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$, то (по крайней мере формально) $(F\Delta f)(\xi) = -|\xi|^2\, Ff(\xi)$, где $|\xi|^2 = \xi_1^2+\dots+\xi_d^2$. Пусть F^{-1} – обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Для любого $\alpha>0$ оператор $(-\Delta)^{\alpha/2}$, действующий по правилу $(-\Delta)^{\alpha/2} f(x) = F^{-1}(|\xi|^\alpha Ff(\xi))(x)$, называется *$\alpha$-й степенью оператора Лапласа.*

Рассмотрим следующее пространство функций в $L_2(\mathbb{R}^d)$:

$$\mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) = \bigl\{f(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{R}^d) \mid (-\Delta)^{\alpha/2} f(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{R}^d)\bigr\},$$

и положим $W_2^\alpha(\mathbb{R}^d) = \bigl\{f(\,\cdot\,)\in \mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d) \bigm| \|(-\Delta)^{\alpha/2} f(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1\bigr\}$.

Пусть A – непустое измеримое собственное подмножество $\mathbb{R}^d$, $0<\beta<\alpha$ и $\delta\geqslant 0$. Мы хотим восстановить β-ю степень оператора Лапласа функции $f(\,\cdot\,)\in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$ по следующей информации: известна с точностью до δ в метрике $L_2(A)$ функция $Ff(\,\cdot\,)|_A$ (сужение преобразования Фурье $f(\,\cdot\,)$ на множество A), т.е. известна (наблюдается) функция $g(\,\cdot\,)\in L_2(A)$ такая, что $\|Ff(\,\cdot\,) - g(\,\cdot\,)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta$ (при $\delta=0$ это означает, что наблюдается сама функция $Ff(\,\cdot\,)|_A$).

Под задачей оптимального восстановления β-й степени оператора Лапласа функции $f(\,\cdot\,)$ по данной информации понимается нахождение величины

$$E\bigl((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr) = \inf_m \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),\, g(\cdot)\in L_2(A)\\ \|Ff(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(A)}\leqslant\delta}} \bigl\|(-\Delta)^{\beta/2} f(\,\cdot\,) - m(g(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)\bigr\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 10-01-00188 и № 11-01-00529).

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам восстановления) $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, а также нахождение тех m, на которых эта грань достигается. Величину $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$ будем называть *погрешностью оптимального восстановления*, а отображения m, на которых нижняя грань достигается – *оптимальными методами восстановления*.

Оптимальные методы, как видно из постановки, ищутся сразу для всех функций из данного класса и в этом смысле задача оптимального восстановления идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о наилучших методах приближения классов функций. Заметим, что с точки зрения приложений вполне естественно считать, что мы имеем дело не с индивидуальным элементом, а (в силу неизбежных погрешностей измерения) лишь с представителем некоторого семейства. Общая постановка задачи оптимального восстановления (но в значительно более простой ситуации) принадлежит С. А. Смоляку [1]. Представление о дальнейшем развитии тематики, связанной с задачами оптимального восстановления линейных функционалов и операторов по неточной информации можно получить из работ [2]–[8]. Задачи, близкие к той, которая изучается здесь, но для функций одного переменного (периодических и на прямой) рассматривались в работах [9]–[11].

Перед формулировкой теоремы введем некоторые обозначения. Всюду далее $B(x,r)$ – замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в точке x радиуса $r>0$, а (x,y) – скалярное произведение векторов $x,y\in\mathbb{R}^d$.

Пусть A – собственное подмножество $\mathbb{R}^d$ и $0\in\operatorname{int}A$. Положим

$$r_A=\sup\{r>0 \mid B(0,r)\subset A\}.$$

Ясно, что $0<r_A<\infty$.

Пусть $0<\beta<\alpha$ и $\delta>0$. Обозначим

$$\widehat{r}=\widehat{r}(\alpha,\beta,\delta)=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))}\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{-1/(2\alpha)}.$$

Теорема. *Пусть $0<\beta<\alpha$, $\delta\geqslant 0$, A – выпуклое замкнутое собственное подмножество $\mathbb{R}^d$ и $\operatorname{int}A\neq\varnothing$. Тогда*

1) *если $0\notin\operatorname{int}A$, то*

$$E\bigl((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr)=+\infty;$$

2) *если $0\in\operatorname{int}A$ и $\delta=0$, то*

$$E\bigl((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0\bigr)=\frac{1}{r_A^{\alpha-\beta}}$$

и метод

$$\widehat{m}\bigl(Ff(\,\cdot\,)|_A\bigr)(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\leqslant r_A}|\xi|^\beta Ff(\xi)e^{i(\xi,t)}\,d\xi$$

является оптимальным;

3) *если $0\in\operatorname{int}A$ и $\delta>0$, то*

$$E\bigl((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta\bigr)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)}\dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d}r_A^{2\beta}+\dfrac{1}{r_A^{2(\alpha-\beta)}}}, & r_A\leqslant\widehat{r},\\[2ex] \left(\dfrac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{(\alpha-\beta)/(2\alpha)}, & r_A\geqslant\widehat{r},\end{cases}$$

и для каждого r такого, что

$$0 \leqslant r \leqslant \left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2\beta)}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_0,$$

где $r_0=\min(r_A,\widehat{r})$, метод

$$\widehat{m}_r(g(\,\cdot\,))(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\leqslant r}|\xi|^\beta g(\xi)e^{i(\xi,t)}\,d\xi \\ +\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{r\leqslant|\xi|\leqslant r_0}|\xi|^\beta\left(1+\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/(\alpha-\beta)}\left(\frac{|\xi|}{r_0}\right)^{2\alpha}\right)^{-1} g(\xi)e^{i(\xi,t)}\,d\xi,$$

является оптимальным.

Сделаем несколько замечаний по поводу сформулированной теоремы. Если фиксирован метод восстановления, то величину под знаком нижней грани в определении $E((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),A,\delta)$ естественно считать погрешностью данного метода. Тогда первое утверждение теоремы означает, что если $0\notin\operatorname{int}A$, то погрешность любого метода бесконечна и значит, никаким способом нельзя восстановить соответствующий оператор на всем классе.

Если $0\in\operatorname{int}A$ и преобразование Фурье функции $f(\,\cdot\,)$ на A известно точно ($\delta=0$), то чем больше радиус шара с центром в нуле, который можно вписать в A, тем погрешность оптимального восстановления меньше. Но знание преобразования Фурье за пределами этого шара оказывается лишним – оптимальный метод эту информацию не использует. Заметим, что сам оптимальный метод есть β-я степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой совпадает с преобразованием Фурье функции f на шаре $B(0,r_A)$ и равно нулю вне этого шара.

Если $0\in\operatorname{int}A$ и преобразование Фурье функции $f(\,\cdot\,)$ на A известно с точностью до $\delta>0$, то погрешность оптимального восстановления также уменьшается с ростом радиуса вписанного в A шара, но лишь до определенного предела: при $r_A\geqslant\widehat{r}$ эта погрешность постоянна, т.е. за пределами шара $B(0,\widehat{r})$ информация о преобразовании Фурье функции из данного класса не нужна. Оптимальный метод использует информацию о преобразовании Фурье только на шаре $B(0,r_0)$. При этом, если $r>0$, то на шаре $B(0,r)$ информация не "обрабатывается" (подставляется то, что наблюдается), а на шаровом слое $\{\xi\mid r<|\xi|\leqslant r_0\}$ наблюдаемая информация "сглаживается". Сам оптимальный метод, как и в предыдущем случае, есть β-я степень оператора Лапласа функции, преобразование Фурье которой совпадает с наблюдаемой функцией $g(\,\cdot\,)$ на шаре $B(0,r)$ и со сглаженным наблюдением на слое $\{\xi\mid r<|\xi|\leqslant r_0\}$. Заметим еще, что неравенство $r_0\leqslant\widehat{r}$, равносильное соотношению

$$\delta^2 r_0^{2\alpha}\leqslant(2\pi)^d\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\alpha/(\alpha-\beta)},$$

можно трактовать как своеобразный "принцип неопределенности", связывающий объем полезной информации (преобразование Фурье на шаре $B(0,r_0)$) и погрешность ее измерения.

§ 2. Доказательство теоремы

2.1. Начнем с оценки снизу величины погрешности оптимального восстановления $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. Покажем, что она не меньше значения задачи

$$\begin{gathered}\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \qquad \|Ff(\,\cdot\,)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \qquad f(\,\cdot\,) \in \mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d),\end{gathered} \tag{2.1}$$

т.е. верхней грани максимизируемого функционала в (2.1).

Пусть $f_0(\,\cdot\,)$ – допустимая функция в (2.1) (т.е. $f_0(\,\cdot\,)$ удовлетворяет ограничениям задачи), тогда, очевидно, функция $-f_0(\,\cdot\,)$ также допустима и мы имеем для любого $m\colon L_2(A) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ ($m(0)(\,\cdot\,)$ – образ нулевой функции при отображении m)

$$\begin{aligned}2\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f_0(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \big\|(-\Delta)^{\beta/2}f_0(\,\cdot\,) - m(0)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad + \big\|(-\Delta)^{\beta/2}(-f_0)(\,\cdot\,) - m(0)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{\|Ff(\,\cdot\,)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1}} \big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\,\cdot\,) - m(0)(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{\|Ff(\,\cdot\,) - g(\,\cdot\,)\|_{L_2(A)} \leqslant \delta, \\ \|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1}} \big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\,\cdot\,) - m(g(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в (2.1), а справа к нижней грани по всем методам m, получаем требуемое.

Заметим, что в образах Фурье согласно теореме Планшереля квадрат значения задачи (2.1) равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi \to \max, \qquad \int_A |Ff(\xi)|^2\,d\xi \leqslant \delta^2, \\ \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi \leqslant 1, \qquad f(\,\cdot\,) \in \mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).\end{gathered} \tag{2.2}$$

2.2. Докажем первое утверждение теоремы. Для этого в силу полученной выше оценки снизу для погрешности оптимального восстановления достаточно показать, что значение задачи (2.2) равно $+\infty$. Так как $0 \notin \operatorname{int} A$, то согласно конечномерной теореме отделимости (см., например, [12]) можно отделить нуль от выпуклого множества $\operatorname{int} A$, т.е. существует такой вектор $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = \sqrt{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_d^2} = 1$, что

$$\sup_{\xi \in A}(\lambda, \xi) \leqslant 0. \tag{2.3}$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ рассмотрим шар $B(\varepsilon\lambda, \varepsilon/2)$, который для краткости обозначим B_ε. Тогда $B_\varepsilon \cap A = \varnothing$, так как если $\xi \in B_\varepsilon$, то $|\xi - \varepsilon\lambda| \leqslant \varepsilon/2$, откуда легко выводится, что $(\lambda, \xi) > 0$ и, значит, $\xi \notin A$ согласно (2.3). Пусть функция $f_\varepsilon(\,\cdot\,)$ такова, что

$$Ff_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2}\biggl(\displaystyle\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha}\,d\eta\biggr)^{-1/2}, & \xi \in B_\varepsilon \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon. \end{cases}$$

Эта функция допустима в задаче (2.2). Действительно, поскольку $Ff_\varepsilon(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то $f_\varepsilon(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, и так как ясно, что функция $\xi \mapsto -|\xi|^2 Ff_\varepsilon(\xi)$ принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$, то $(-\Delta)^{\alpha/2} f_\varepsilon(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и, значит, $f_\varepsilon(\,\cdot\,) \in \mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее элементарно проверяется, что $f_\varepsilon(\,\cdot\,)$ удовлетворяет остальным ограничениям задачи (2.2). Теперь, если $\xi \in B_\varepsilon$, то $|\xi| \leqslant |\xi - \varepsilon\lambda| + |\varepsilon\lambda| \leqslant 3\varepsilon/2$ и мы имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta} \, |Ff_\varepsilon(\xi)|^2 \, d\xi &= \frac{\displaystyle\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\beta} \, d\xi}{\displaystyle\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} \, d\eta} = \frac{\displaystyle\int_{B_\varepsilon} |\xi|^{2\alpha} \, |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} \, d\xi}{\displaystyle\int_{B_\varepsilon} |\eta|^{2\alpha} \, d\eta} \\
&\geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^{-2(\alpha-\beta)} \varepsilon^{-2(\alpha-\beta)},
\end{aligned}
$$

откуда в силу произвольности ε следует, что значение максимизируемого функционала в (2.2) может быть сделано сколь угодно большим. Это вместе с полученной выше оценкой снизу доказывает утверждение 1) теоремы.

2.3. Докажем второе утверждение теоремы. Найдем значение величины $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0)$. Как показано выше, оно не меньше квадрата значения задачи (2.2). Поскольку $\delta = 0$, то первое ограничение в (2.2) означает, что $Ff(\xi) = 0$ для п.в. $\xi \in A$, и тогда сама задача (2.2) переписывается в этом случае так:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} \, |Ff(\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \\
\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\alpha} \, |Ff(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant 1, \qquad f(\,\cdot\,) \in \mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d).
\end{gathered} \tag{2.4}
$$

Найдем значение этой задачи. Так как $B(0, r_A) \subset A$, то $|\xi| \geqslant r_A$, если $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus A$, и мы имеем

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{2\beta} \, |Ff(\xi)|^2 \, d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus A} |\xi|^{-2(\alpha-\beta)} \, |\xi|^{2\alpha} \, |Ff(\xi)|^2 \, d\xi \\
&\leqslant r_A^{-2(\alpha-\beta)} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha} \, |Ff(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant r_A^{-2(\alpha-\beta)},
\end{aligned}
$$

т.е. значение задачи (2.4) не превосходит $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$. Покажем, что, на самом деле, оно равно этой величине.

Ясно, что граница шара $B(0, r_A)$ и граница A имеют непустое пересечение. Пусть ξ_0 принадлежит этому пересечению. Тогда $\xi_0 \notin \operatorname{int} A$, и поэтому можно отделить ξ_0 от выпуклого множества $\operatorname{int} A$, т.е. существует такой вектор $\lambda \in \mathbb{R}^d$, $|\lambda| = 1$, что $\sup_{\xi \in A} (\lambda, \xi) \leqslant (\lambda, \xi_0)$. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Положим $\xi_n = \xi_0 + (1/n)\lambda$ и рассмотрим шар $B(\xi_n, 1/(2n))$. Он не пересекается с A (если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, то отсюда легко следует, что $(\lambda, \xi) > (\lambda, \xi_0)$ и, значит, $\xi \notin A$). Обозначим через $V_n = \pi^{d/2}/(2n)^d \Gamma(d/2 + 1)$ объем шара в $\mathbb{R}^d$ радиуса $1/(2n)$ и рассмотрим последовательность функций $f_n(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, преобразование Фурье которых имеет вид

$$
Ff_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} V_n^{-1/2} \left(r_A + \dfrac{3}{2n}\right)^{-\alpha}, & \xi \in B\left(\xi_n, \dfrac{1}{2n}\right), \\[2ex] 0, & \xi \notin B\left(\xi_n, \dfrac{1}{2n}\right). \end{cases}
$$

Эти функции допустимы в задаче (2.4). Действительно, как и раньше, проверяется, что они принадлежат $\mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Далее ясно, что $|\xi_0| = r_A$, и тогда, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, то

$$|\xi| \leqslant \left|\xi - \xi_0 - \frac{1}{n}\lambda + \xi_0 + \frac{1}{n}\lambda\right| \leqslant \frac{1}{2n} + |\xi_0| + \frac{1}{n} = r_A + \frac{3}{2n},$$

и мы получаем

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi &= V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\int_{B(\xi_n,1/(2n))}|\xi|^{2\alpha}\,d\xi \\ &\leqslant V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{2\alpha} V_n = 1.\end{aligned}$$

Пусть снова $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$. Тогда

$$r_A = |\xi_0| \leqslant |\xi| + \left|\xi_0 - \xi + \frac{1}{n}\lambda\right| + \left|\frac{1}{n}\lambda\right| \leqslant |\xi| + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n},$$

т.е. $|\xi| \geqslant r_A - 3/(2n)$ и, следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus A} |\xi|^{2\beta}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi &= V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\int_{B(\xi_n,1/(2n))}|\xi|^{2\beta}\,d\xi \\ &\geqslant V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha}\left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\beta} V_n.\end{aligned}$$

Правая часть этого неравенства стремится при $n \to \infty$ к величине $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$, а левая по доказанному не превосходит этой величины, откуда вытекает, что значение задачи (2.4) равно $r_A^{-2(\alpha-\beta)}$. Отсюда и из доказанной ранее оценки снизу для погрешности оптимального восстановления следует неравенство $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0) \geqslant r_A^{-(\alpha-\beta)}$.

Теперь докажем противоположное неравенство и найдем оптимальный метод восстановления. Пусть $\widehat{m}$ – метод, определенный в теореме и $f(\,\cdot\,) \in W_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Имеем, используя теорему Планшереля,

$$\begin{aligned}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\,\cdot\,) - \widehat{m}(Ff(\,\cdot\,)|_A)(\,\cdot\,)\big\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)}|\xi|^{2\beta}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d\setminus B(0,r_A)}|\xi|^{-2(\alpha-\beta)}\,|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leqslant r_A^{-2(\alpha-\beta)}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi \leqslant r_A^{-2(\alpha-\beta)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0) \leqslant r_A^{-(\alpha-\beta)}$. Вместе с предыдущей оценкой это означает, что $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, 0) = r_A^{-(\alpha-\beta)}$ и что $\widehat{m}$ – оптимальный метод. Утверждение 2) теоремы доказано.

2.4. Докажем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления в третьем утверждении теоремы. Как и в предыдущем случае, начнем с нахождения величины $E((-\Delta)^{\beta/2}, W_2^\alpha(\mathbb{R}^d), A, \delta)$. По доказанному ее квадрат не меньше значения задачи (2.2). Сопоставим этой задаче функцию Лагранжа

$$\mathscr{L}(f(\,\cdot\,), \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\big(-|\xi|^{2\beta} + \lambda_1\chi_A(\xi) + \lambda_2|\xi|^{2\alpha}\big)|Ff(\xi)|^2\,d\xi,$$

где $\chi_A(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция множества A. Найдем значение задачи (2.2), воспользовавшись для этого следующим утверждением.

Предложение. *Если найдутся такие* $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ *и допустимая в* (2.2) *последовательность функций* $f_n(\,\cdot\,)$, *что*

(a) $\mathscr{L}(f(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2) \geqslant 0$ *для всех функций* $f(\,\cdot\,) \in \mathscr{W}_2^\alpha(\mathbb{R}^d)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathscr{L}(f_n(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2) = 0$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_1\biggl(\displaystyle\int_A |Ff_n(\xi)|^2\,d\xi - \delta^2\biggr) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_2\biggl(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi - (2\pi)^d\biggr) = 0$,

то значение задачи (2.2) *равно* $\lambda_1\delta^2/(2\pi)^d + \lambda_2$.

Действительно, обозначим значение задачи (2.2) через S. Для любой допустимой функции $f(\,\cdot\,)$ в (2.2) в силу неотрицательности λ_i, $i=1,2$, и условия (a) имеем

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi &\geqslant -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi \\
&\quad+\frac{\lambda_1}{(2\pi)^d}\biggl(\int_A |Ff(\xi)|^2\,d\xi-\delta^2\biggr)+\frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\biggl(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi-(2\pi)^d\biggr) \\
&= \mathscr{L}(f(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}-\lambda_2 \geqslant -\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}-\lambda_2,
\end{aligned}
$$

и, значит, $S \leqslant \lambda_1\delta^2/(2\pi)^d + \lambda_2$. С другой стороны, для любого n

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}(f_n(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2) &= -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi+\frac{\lambda_1}{(2\pi)^d}\biggl(\int_A |Ff_n(\xi)|^2\,d\xi-\delta^2\biggr) \\
&\quad+\frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\biggl(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi-(2\pi)^d\biggr)+\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2.
\end{aligned}
$$

Отсюда, в силу (b) и (c) получаем, что

$$
\lim_{n\to\infty}(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi = \frac{\lambda_1\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2.
$$

Но этот предел, очевидно, не превосходит S, что и доказывает предложение.

Предъявим теперь такие $\lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_2 \geqslant 0$ и последовательность допустимых функций $f_n(\,\cdot\,)$ в (2.2), что выполняются условия (a), (b) и (c) предложения.

Рассмотрим сначала случай, когда $r_A < \widehat{r}$. Пусть

$$
\lambda_1=\lambda_1(\alpha,\beta,r_A)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\biggl(\frac{\beta}{\alpha}\biggr)^{\beta/(\alpha-\beta)} r_A^{2\beta}, \qquad \lambda_2=\lambda_2(\alpha,\beta,r_A)=r_A^{-2(\alpha-\beta)}. \tag{2.5}
$$

Ясно, что это положительные числа. Нетрудно убедиться, что с такими λ_i, $i=1,2$, выражение в скобках под знаком интеграла в функции Лагранжа задачи (2.2) неотрицательно на $\mathbb{R}^d$. Действительно, рассмотрим функцию $\varphi(\,\cdot\,)$ на $\mathbb{R}$, заданную формулой $\varphi(t) = -t^{2\beta}+\lambda_1\chi(t)+\lambda_2 t^{2\alpha}$, где $\chi(\,\cdot\,)$ – характеристическая функция отрезка $[-r_A, r_A]$. Несложная проверка показывает, что $\varphi(\,\cdot\,)$ неотрицательна на $\mathbb{R}$, а отсюда уже легко вытекает, что функция $\xi \mapsto -|\xi|^{2\beta}+\lambda_1\chi_A(\xi)+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}$ неотрицательна на $\mathbb{R}^d$ и тем самым выполнено условие (a) предложения.

Предъявим последовательность функций $f_n(\,\cdot\,)$. Пусть точка ξ_0 и вектор λ – те же, что и в доказательстве утверждения 2) теоремы, а $\xi' = (\beta/\alpha)^{1/(2(\alpha-\beta))}\xi_0$. Поскольку $|\xi'| = (\beta/\alpha)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A < r_A$, то $\xi' \in \operatorname{int} A$. Тогда $B(\xi', 1/(2n)) \subset A$ для достаточно больших n. Выше было показано, что шар $B(\xi_n, 1/(2n))$ не пересекается с A и тем самым для таких n шары $B(\xi_n, 1/(2n))$ и $B(\xi', 1/(2n))$ не пересекаются. Далее, так как $r_A < \widehat{r}$, то нетрудно проверить, что

$$C_n = 1 - \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + \frac{1}{2n}\right)^{2\alpha} > 0$$

для больших n. Для указанных n определим последовательность функций $f_n(\,\cdot\,)$ по правилу

$$Ff_n(\xi) = \begin{cases} (2\pi)^{d/2} V_n^{-1/2}\left(r_A + \dfrac{3}{2n}\right)^{-\alpha}\sqrt{C_n}, & \xi \in B\left(\xi_n, \dfrac{1}{2n}\right), \\ V_n^{-1/2}\delta, & \xi \in B\left(\xi', \dfrac{1}{2n}\right), \\ 0, & \xi \notin B\left(\xi_n, \dfrac{1}{2n}\right) \cup B\left(\xi', \dfrac{1}{2n}\right), \end{cases}$$

где, напомним, V_n – объем шара в $\mathbb{R}^d$ радиуса $1/(2n)$.

Функции $f_n(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (2.2). Действительно, как и раньше, проверяется, что $f_n(\,\cdot\,) \in \mathscr{W}_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d)$. Далее,

$$\int_A |Ff_n(\xi)|^2\,d\xi = \int_{B(\xi',1/(2n))} |Ff_n(\xi)|^2\,d\xi = V_n^{-1}\delta^2 \int_{B(\xi',1/(2n))} d\xi = \delta^2.$$

Выше было показано, что $|\xi| \leqslant r_A + 3/(2n)$, если $\xi \in B(\xi_n, 1/(2n))$, и так как понятно, что $|\xi| \leqslant (\beta/\alpha)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + 1/(2n)$, если $\xi \in B(\xi', 1/(2n))$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi_n,1/(2n))} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi \\ &\quad + \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi',1/(2n))} |\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi \\ &\leqslant V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} C_n \int_{B(\xi_n,1/(2n))} |\xi|^{2\alpha}\,d\xi + \frac{V_n^{-1}\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi',1/(2n))} |\xi|^{2\alpha} d\xi \\ &\leqslant C_n + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + \frac{1}{2n}\right)^{2\alpha} = 1, \end{aligned}$$

т.е. функции $f_n(\,\cdot\,)$ допустимы в задаче (2.2).

Покажем, что выполнено условие (b) предложения. Рассуждая так же, как и при доказательстве предыдущего неравенства, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2\beta}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi &\geqslant V_n^{-1}\left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} C_n \int_{B(\xi_n,1/(2n))} |\xi|^{2\beta}\,d\xi \\ &\quad + \frac{V_n^{-1}\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(\xi',1/(2n))} |\xi|^{2\beta} d\xi \\ &\geqslant \left(r_A + \frac{3}{2n}\right)^{-2\alpha} C_n \left(r_A - \frac{3}{2n}\right)^{2\beta} + \frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\left(\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{1/(2(\alpha-\beta))} r_A + \frac{1}{2n}\right)^{2\beta}. \end{aligned}$$

Выражение справа, как нетрудно убедиться, стремится к $\lambda_1\delta^2/(2\pi)^d+\lambda_2$ при $n\to\infty$. Отсюда и из предыдущих двух оценок следует, что $\mathscr{L}(f_n(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2)$ не превосходит величины, стремящейся к нулю при $n\to\infty$. Но в силу уже доказанного $\mathscr{L}(f_n(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2)\geqslant 0$, и поэтому $\mathscr{L}(f_n(\,\cdot\,),\lambda_1,\lambda_2)\to 0$ при $n\to\infty$.

Осталось доказать (c). Так как

$$\int_A |Ff_n(\xi)|^2\,d\xi=\delta^2,$$

то первое условие в (c) выполняется очевидным образом. Проверим второе. Аналогично последней оценке получаем, что

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi \geqslant \biggl(r_A+\frac{3}{2n}\biggr)^{-2\alpha}C_n\biggl(r_A-\frac{3}{2n}\biggr)^{2\alpha}+\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\biggl(\biggl(\frac{\beta}{\alpha}\biggr)^{1/(2(\alpha-\beta))}r_A+\frac{1}{2n}\biggr)^{2\alpha}.$$

Выражение справа стремится к единице при $n\to\infty$, а величина слева по доказанному не превосходит единицы, откуда следует второе соотношение в (c). Итак, согласно предложению значение задачи (2.2) равно $\lambda_1\delta^2/(2\pi)^d+\lambda_2$. Подставляя сюда выражения для λ_1 и λ_2 и учитывая, что квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (2.2), получаем указанную в теореме оценку снизу для этой погрешности при $r_A<\widehat{r}$.

Пусть теперь $r_A\geqslant\widehat{r}$. Найдем значение задачи (2.2) в этом случае. Снова воспользуемся доказанным выше предложением. Положим

$$\lambda_1=\lambda_1(\alpha,\beta,\delta)=\frac{\alpha-\beta}{\alpha}\biggl(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\biggr)^{-\beta/\alpha},\qquad \lambda_2=\lambda_2(\alpha,\beta,\delta)=\frac{\beta}{\alpha}\biggl(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\biggr)^{(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Легко проверить, что эти значения получаются, если в прежние λ_1 и λ_2 (см. (2.5)) подставить $r_A=\widehat{r}$.

Пусть точка $\overline{\xi}\in\mathbb{R}^d$ такова, что

$$|\overline{\xi}|=1,\qquad \overline{\xi}_n=\biggl(\biggl(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\biggr)^{-1/2\alpha}-\frac{1}{2n}\biggr)\overline{\xi}.$$

Тогда непосредственная проверка (с учетом выражения для $\widehat{r}$) показывает, что для достаточно больших n справедливо включение $B(\overline{\xi}_n,1/(2n))\subset B(0,\widehat{r})$. Для таких n рассмотрим последовательность функций $f_n(\,\cdot\,)$, определенных формулой

$$Ff_n(\xi)=\begin{cases}V_n^{-1/2}\delta, & \xi\in B\Bigl(\overline{\xi}_n,\dfrac{1}{2n}\Bigr),\\[2mm] 0, & \xi\notin B\Bigl(\overline{\xi}_n,\dfrac{1}{2n}\Bigr).\end{cases}$$

Так как

$$\int_A|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi=\int_{B(\overline{\xi}_n,1/(2n))}|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi=V_n^{-1}\delta^2\int_{B(\overline{\xi}_n,1/(2n))}d\xi=\delta^2,$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{B(\overline{\xi}_n,1/(2n))}|\xi|^{2\alpha}\,|Ff_n(\xi)|^2\,d\xi \leqslant\frac{V_n^{-1}\delta^2}{(2\pi)^d}\int_{B(\overline{\xi}_n,1/(2n))}|\xi|^{2\alpha}d\xi\leqslant\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\biggl(\biggl(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\biggr)^{-1/(2\alpha)}\biggr)^{2\alpha}=1,$$

то последовательность $f_n(\,\cdot\,)$ допустима в задаче (2.2). Далее, аналогично предыдущему (и в данном случае несколько проще) проверяется, что выполнены условия предложения и тем самым значение задачи (2.2) равно

$$\lambda_1\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2=\left(\frac{\delta^2}{(2\pi)^d}\right)^{(\alpha-\beta)/\alpha}.$$

Поскольку квадрат погрешности оптимального восстановления не меньше значения задачи (2.2), то доказана нужная оценка снизу для этой погрешности при $r_A\geqslant\widehat{r}$. Легко проверить, что при $r_A=\widehat{r}$ полученная ранее оценка переходит в данную.

2.5. Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность указанных в теореме методов восстановления. Оптимальность метода $\widehat{m}_r$ из формулировки теоремы означает, что значение задачи

$$\begin{gathered}\big\|(-\Delta)^{\beta/2}f(\,\cdot\,)-\widehat{m}_r(g(\,\cdot\,))(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\to\max,\qquad \big\|Ff(\,\cdot\,)-g(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(A)}\leqslant\delta,\\ \big\|(-\Delta)^{\alpha/2}f(\,\cdot\,)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant 1,\qquad g(\,\cdot\,)\in L_2(A),\qquad f(\,\cdot\,)\in\mathscr{W}_2^{\alpha}(\mathbb{R}^d)\end{gathered}\tag{2.6}$$

равно $E((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),A,\delta)$. Заметим, что во втором интеграле в определении метода $\widehat{m}_r$ множитель перед функцией $g(\,\cdot\,)$, как нетрудно убедиться, равен $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha})$, где λ_i, $i=1,2$, определены формулами (2.5). Тогда, переходя к образам Фурье в задаче (2.6), получим по теореме Планшереля, что квадрат ее значения равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\leqslant r}|\xi|^{2\beta}\,|Ff(\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi\\ +\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{r\leqslant|\xi|\leqslant r_0}|\xi|^{2\beta}\left|Ff(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}g(\xi)\right|^2d\xi\\ +\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2\beta}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi\to\max,\\ \int_A|Ff(\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta^2,\qquad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi\leqslant 1.\end{gathered}\tag{2.7}$$

Первый интеграл в максимизируемом функционале, учитывая, что $|\xi|\leqslant r$ и оценку для r из формулировки теоремы, оценивается величиной

$$\frac{\lambda_1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\leqslant r}|Ff(\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi.$$

Оценим теперь подынтегральное выражение во втором интеграле, применяя неравенство Коши–Буняковского и то, что многочлен $\xi\mapsto-|\xi|^{2\beta}+\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}$, как уже отмечалось выше, неотрицателен на $\mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned}&|\xi|^{2\beta}\left|Ff(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}g(\xi)\right|^2\\ &\qquad=|\xi|^{2\beta}\left|\frac{\sqrt{\lambda_1}}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\sqrt{\lambda_1}(Ff(\xi)-g(\xi))+\frac{\sqrt{\lambda_2}|\xi|^{\alpha}}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\sqrt{\lambda_2}|\xi|^{\alpha}Ff(\xi)\right|^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant |\xi|^{2\beta}\biggl(\frac{\lambda_1}{(\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha})^2}+\frac{\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}{(\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha})^2}\biggr)\\
&\qquad\times\bigl(\lambda_1|Ff(\xi)-g(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\bigr)\\
&=\frac{|\xi|^{2\beta}}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}}\bigl(\lambda_1|Ff(\xi)-g(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\bigr)\\
&\leqslant \lambda_1|Ff(\xi)-g(\xi)|^2+\lambda_2|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2.
\end{aligned}
$$

Отсюда следует, что второй интеграл в максимизируемом функционале оценивается величиной

$$
\frac{\lambda_1}{(2\pi)^d}\int_{r\leqslant|\xi|\leqslant r_0}|Ff(\xi)-g(\xi)|^2\,d\xi+\frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\int_{r\leqslant|\xi|\leqslant r_0}|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi.
$$

Наконец, для третьего интеграла справедлива оценка

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2\beta}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi&=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2(\beta-\alpha)}\,|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi\\
&\leqslant\frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\int_{|\xi|\geqslant r_0}|\xi|^{2\alpha}\,|Ff(\xi)|^2\,d\xi.
\end{aligned}
$$

Складывая полученные оценки, приходим к тому, что значение задачи (2.7) не превосходит величины $\lambda_1\delta^2/(2\pi)^d+\lambda_2$, и значит,

$$
E\bigl((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),A,\delta\bigr)\leqslant\sqrt{\frac{\lambda_1\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2}.
$$

Но ранее было доказано противоположное неравенство, следовательно,

$$
E\bigl((-\Delta)^{\beta/2},W_2^\alpha(\mathbb{R}^d),A,\delta\bigr)=\sqrt{\frac{\lambda_1\delta^2}{(2\pi)^d}+\lambda_2}
$$

и $\widehat{m}_r$ – оптимальный метод восстановления. Теорема доказана.

Список литературы

[1] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дис. ... канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965.

[2] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal estimation in approximation theory* (Freudenstadt, 1976), Plenum, New York, 1977, 1–54.

[3] A. A. Melkman, C. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.

[4] Дж. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, Academic Press, New York–London, 1980.

[5] C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “Lectures on optimal recovery”, *Numerical analysis* (Lancaster, 1984), Lecture Notes in Math., **1129**, Springer-Verlag, Berlin, 1985, 21–93.

[6] В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, 1986), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, “Optimal recovery of operators, and related problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189** (1990), 1–20.

[7] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functionals based on inaccurate data”, *Math. Notes*, **50**:6 (1991), 1274–1279.

[8] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных колмогоровского типа”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, “Kolmogorov-type inequalities for derivatives”, *Sb. Math.*, **188**:12 (1997), 1799–1832.

[9] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error”, *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 387–407.

[10] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 203–214.

[11] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “On optimal harmonic synthesis from inaccurate spectral data”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:3 (2010), 223–225.

[12] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, УРСС, М., 2000; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis: theory and applications*, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.

Г. Г. Магарил-Ильяев (G. G. Magaril-Il’yaev)
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: magaril@mirea.ru

Поступила в редакцию
22.06.2011

Е. О. Сивкова (E. O. Sivkova)
Московский государственный технический университет
радиотехники, электроники и автоматики
E-mail: sivkova_elena@inbox.ru