МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ОБЩИХ ПРОБЛЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Дипломная работа
студента 632 группы
Караваева П.Н.

Наилучшее восстановление периодических функций многих переменных по их коэффициентам Фурье

Научный руководитель:
профессор Магарил-Ильяев Г. Г.

Москва – 2017

Содержание

1 Введение

Практичесткая деятельность человека зачастую связанна с тем, что он вынужден судить об изучаемых объектах по неточной и/или неполной информации о них. При восстановлении объекта по такой информации обычно возникает неопределенность. Однако при восстановлении объекта можно постараться максимально полно использовать доступную информацию, тем самым сужая границы неопределенности изучаемого объекта.

Классическая теория аппроксимации берет свое начало с работ П.Л. Чебышева второй половины 19 века. При построении численного метода обычно используются те или иные (достаточно естественные) идеи, а затем полученный алгоритм исследуется на сходимость, устойчивость по отношению к неточным данным и т.д. В шестидесятых годах 20 века возникла новая постановка - задача об оптимальном восстановлении линейного функционала или оператора на классе элементов по известной информации. При решении таких задач применяется иной подход. Пользуясь некоторой априорной информацией о принадлежности восстанавливаемой функции к некоторому классу элементов и перебирая все возможные отображения, находится наилучший (в некотором смысле) метод.

Информацию, которой мы распологаем можно разделить на два типа:
"глобальная"и "локальная". Глобальная информация обыкновенно описывает класс функций, в то время как локальная информация содержит некоторые характеристики функции (такие как ее значения в отдельных точках, коэффициенты Тейлора или Фурье и т.д.) и может быть задана как точно, так и с ошибками. По данным двум типам информации и строится метод восстановления.

Впервые постановка задачи оптимального восстановления появилась в работе Смоляка С.А. [5] Данная проблематика получила большое развитие, примерами которого могут служить задачи о восстановлении значения значения функции по её значениям в других точках или по её коэффициентам Фурье, задачи о восстановлении производной функции в точке по её приближенным значениям в других точках или по её приближенным коэффициентам Фурье и другие задачи, рассмотренные в статье Магарил-Ильяева Г.Г, Осипенко К.Ю и Тихомирова В.М. [6]

2 Постановка задачи

Пусть $\mathbb{T}^n = [-\pi, \pi]^n$ — n-мерный тор, реализованный как произведение n отрезков с отождетвленными концами. Обозначим через $L_2(\mathbb{T}^n)$ пространство функций $f(\cdot)$, для которых конечна норма

$$||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^n)} = \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} |f(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Пространство Соболева $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}^n)$ - это совокупность функций $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^n)$, у которых все производные порядка n, $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha_1 + ... + \alpha_n = n$, также принадлежат $L_2(\mathbb{T}^n)$ в обобщенном смысле. (Производная $\dfrac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ принадлежит $L_2(\mathbb{T}^n)$ в обощенном смысле, если найдется такая функция $g(\cdot) \in L_2(\mathbb{T}^n)$, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x_1, ..., x_n) \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} dx_1 ... dx_n = (-1)^n \int\limits_{\mathbb{T}^n} g(x_1, ..., x_n) \varphi(x_1, ..., x_n) dx_1 ... dx_n$$

для всех бесконечно дифференцируемых функций $\varphi(\cdot)$ на $\mathbb{T}^n$)

Для каждой функции из $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}^n)$ справедливо разложение в ряд Фурье:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} c_{k_1, \dots, k_n} \cdot e^{i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)},$$

где коэффициенты Фурье выражаются формулой

$$c_{k_1, \dots, k_n} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} f(x_1, \dots, x_n) e^{-i(k_1 x_1 + \dots + k_n x_n)} dx_1 \dots dx_n.$$

Класс $W_2^n(\mathbb{T}^n)$ - это функции $f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{T}^n)$, которые по каждой переменной в среднем равны 0 (т.е. $c_{k_1, \dots, k_n} = 0$, если $k_1 \cdot \ldots \cdot k_n = 0$) и такие что

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \dots \partial x_n} \right)^2 dx_1 \dots dx_n \leqslant 1.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $f(\cdot)$ из класса $W_2^n(\mathbb{T}^n)$ по набору ее коэффициентов Фурье $c_{k_1, \dots, k_n}(f)$ заданных точно с фиксированными номерами в метрике $L_2(\mathbb{T}^n)$. Точнее говоря, пусть C - фиксированный набор векторов $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$ и $card(C) = N$. О каждой функции $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}^n)$ нам известы N коэффициентов Фурье $c_{k_1, \dots, k_n}$ с номерами $(k_1, \dots, k_n) \in C$. По этой информации мы хотим наилучшим образом восстановить функцию $f(\cdot)$ в метрике $L_2(\mathbb{T}^n)$.

Метод восстановления - это любое отображение $m : \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T}^n)$. Погрешностью такого метода назовем следующую величину:

$$e(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C, m) = \sup_{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}^n)} ||f(\cdot) - m(I_C f)(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^n)},$$

где $(I_C f)(\cdot) = \{c_{k_1,\ldots,k_n}(f)\}_{(k_1,\ldots,k_n)\in C}$. Ищется такой метод, чтобы эта погрешность была минимальной, то есть, чтобы она совпадала с погрешностью оптимального восстановления:

$$E(W_2^n, I_C) = \inf_{m:\mathbb{R}^N\to L_2(\mathbb{T}^n)} e(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C, m).$$

Метод $\widetilde{m}$, на котором достигается нижняя грань назовем оптимальным:

$$e(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C, \widetilde{m}) = E(W_2^n, \delta).$$

3 Теорема

Пусть C - конечное подмножество $\mathbb{Z}^n$. Тогда

$$E(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C) = \sqrt{\frac{1}{a(C)}},$$

где $a(C) = \min\{a > 0 : a \leqslant k_1^2 \cdot \ldots \cdot k_n^2,\ (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \backslash C\}$ и метод

$$m(I_C)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(k_1,\ldots,k_n)\in C: \\ k_1^2 \ldots k_n^2 < a}} c_{k_1,\ldots,k_n} e^{i(k_1x_1+\cdots+k_nx_n)}$$

является оптимальным.

Стоит отметить, что для построения оптимального метода достаточно использовать не все доступные коэффициенты Фурье, а только те, индексы которых удовлетворяют неравенству $k_1^2 \ldots k_n^2 < a(C)$.

4 Оценка снизу

Сначала найдем оценку снизу на погрешность оптимального восстановления. Пусть $m : \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T}^n)-$ произвольный метод восстановления и $f_0(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}^n)$, $I_C f_0 = 0$. Имеем

$$2||f_0(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^n)} = ||f_0(\cdot) - m(I_C f_0) - (-f_0(\cdot) - m(-I_C f_0))||_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leqslant$$
$$\leqslant ||f_0(\cdot) - m(I_C f_0)||_{L_2(\mathbb{T}^n)} + || - f_0(\cdot) - m(-I_C f_0)||_{L_2(\mathbb{T}^n)}.$$

Так как $-f_0(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}^n)$, то по определению, погрешность $e(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C, m)$ метода m не меньше, чем $||f_0(\cdot) - m(I_C f_0)||_{L_2(\mathbb{T}^n)}$ и $|| - f_0(\cdot) - m(I_C f_0)||_{L_2(\mathbb{T}^n)}$. Получаем, что

$$e(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C, m) \geqslant ||f_0(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^n)}.$$

Переходя справа к верхней грани по всем $f_0(\cdot)$ из $W_2^n(\mathbb{T}^n)$, для которой $I_C f_0 = 0$, то для произвольного метода m получаем:

$$e(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C, m) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}^n), \\ I_C f = 0}} ||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^n)}.$$

Неравенство выполнено для любого метода, а значит также будет верно:

$$E(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T}^n), \\ I_C f = 0}} ||f(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^n)}. \qquad (*)$$

Для нахождения искомой оценки снизу погрешности оптимального восстановления остается найти значение верхней грани в правой части неравенства. Для чего рассмотрим экстремальную задачу, значение которой равно квадрату величины справа в (*):

$$||f(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{T}^n)} \to \max, \quad f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}^n), \quad I_C f = 0. \qquad (**)$$

Согласно равенству Парсеваля

$$||f(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}} |c_{k_1, \ldots, k_n}|^2$$

выражение

$$\frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{T}^n} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_1 \ldots \partial x_n} \right)^2 dx_1 \ldots dx_n \leqslant 1$$

равносильно следующему

$$\sum_{k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}} k_1^2 \ldots k_n^2 \, |c_{k_1, \ldots, k_n}|^2 \leqslant 1.$$

Тогда можем переписать экстремальную задачу (**) следующим образом:

$$\sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}} |c_{k_1,\dots,k_n}|^2 \to \max, \quad \sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}} k_1^2\dots k_n^2\,|c_{k_1,\dots,k_n}|^2 \leqslant 1,\ c_{k_1,\dots,k_n}=0,\ \text{при}\,(k_1,\dots,k_n)\in C.$$

Найдем минимальное значение выражения $k_1^2\cdot\ldots\cdot k_n^2$ на множестве $k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}^n\backslash C$. Пусть оно достигается при $k_1=\widetilde{k}_1,\dots,\ k_n=\widetilde{k}_n$, также обозначим $a=a(C)=\widetilde{k}_1^{\,2}\cdot\ldots\cdot\widetilde{k}_n^{\,2}$. Следовательно, $a\leqslant k_1^2\cdot\ldots\cdot k_n^2$ для любого $(k_1,\dots,k_n)\in\mathbb{Z}^n\backslash C$.

Тогда верно следующее:

$$\sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}^n\backslash C} |c_{k_1,\dots,k_n}|^2 = \sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}\backslash C} \frac{k_1^2\dots k_n^2}{k_1^2\dots k_n^2}|c_{k_1,\dots,k_n}|^2 \leqslant \frac{1}{a}\sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}^n\backslash C} k_1^2\dots k_n^2\,|c_{k_1,\dots,k_n}|^2.$$

Учитывая, что $f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{T}^n)$ имеем следующую оценку:

$$\sum_{k_1,\dots,k_n\in\mathbb{Z}^n\backslash C} |c_{k_1,\dots,k_n}|^2 \leqslant \frac{1}{a}.$$

Найденная оценка достигается на функции $\widetilde{f}(x_1,\dots,x_n)=\dfrac{1}{\sqrt{a}}e^{i(\widetilde{k_1}x_1+\ldots+\widetilde{k_n}x_n)}$, так как $||\widetilde{f}(\cdot)||_{L_2(\mathbb{T}^n)}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$. То есть значение экстремальной задачи (**) равно $\dfrac{1}{a}$.

С учетом (*) получаем оценку снизу для погрешности оптимального восстановления найдена:

$$E(W_2^n(\mathbb{T}^n),I_C)\geqslant\frac{1}{a(C)}. \tag{***}$$

На рисунке приведен пример $a=\widetilde{k}_1^{\,2}\cdot\widetilde{k}_2^{\,2}$

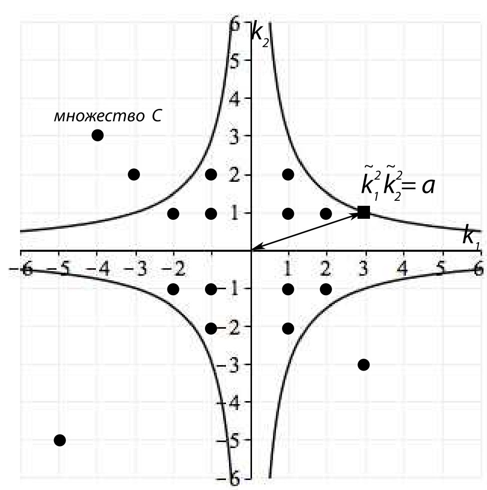

Рис. 1: случай $n=2$ и $N=16$.

5 Оценка сверху

Выберем для рассмотрения следующий метод:

$$m(I_C)(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_n)\in C: \\ k_1^2\dots k_n^2<a}} c_{k_1,\dots,k_n} e^{i(k_1x_1+\dots+k_nx_n)}.$$

Учитывая равенство Парсеваля, для всех $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{T}^n)$ получаем:

$$||f(\cdot) - m(I_Cf)(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{T}^n)} = \sum_{k_1^2\dots k_n^2\geqslant a} |c_{k_1,\dots,k_n}|^2 \leqslant \frac{1}{a} \sum_{k_1^2\dots k_n^2\geqslant a} (k_1^2\cdot\ldots\cdot k_n^2)\,|c_{k_1,\dots,k_n}|^2$$

Так как мы рассматриваем функции $f(\cdot)$ из класса $W_2^n(\mathbb{T}^n)$, то

$$\sum_{k_1^2\dots k_n^2\geqslant a} (k_1^2\cdot\ldots\cdot k_n^2)\,|c_{k_1,\dots,k_n}|^2 \leqslant 1$$

и тем самым

$$||f(\cdot) - m(I_Cf)(\cdot)||^2_{L_2(\mathbb{T}^n)} \leqslant \frac{1}{a}.$$

Переходя к верхней грани, получаем

$$e(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C, m) \leqslant \sqrt{\frac{1}{a(C)}}.$$

Следовательно,

$$E(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C) \leqslant \sqrt{\frac{1}{a}} = \sqrt{\frac{1}{\widetilde{k_1}^2 \dots \widetilde{k_n}^2}}$$

.

Вместе с оценкой (***) получаем, что для ошибки оптимального восстановления $E(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C) = \sqrt{\dfrac{1}{a(C)}}$

Отсюда следует нужное выражение для $E(W_2^n(\mathbb{T}^n), I_C)$ и оптимального метода, указанного в теореме. Теорема доказана.

6 Выбор коэффициентов Фурье

Поставим следующую задачу. Пусть имеется возможность для каждой функции из нашего класса измерить её N коэффициентов Фурье с фиксированными номерами, то есть с номерами из некоторого множества $C \in \mathbb{Z}^n$, $card\, C = N$.

Нас интересует вопрос, как нужно выбрать множество C, $card\, C = N$, чтобы погрешность оптимального восстановления была минимальной среди всех таких множеств. Такое множество назовем оптимальным.

Пусть $C \in \mathbb{Z}^n$ такое, что $card\, C = N$. Положим $a(C) = \min\{a > 0 : a \leqslant k_1^2 \cdot \ldots \cdot k_n^2, (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n \backslash C\}$.

Тогда, очевидно, множество C будет оптимальным, если на нем достигается величина

$$a(N) = max\{\, a(C) : C \subset \mathbb{Z}^n, card\, C = N\,\}.$$

Вид такого множества для $n = 2$ и $N = 20$ изображен на рисунке

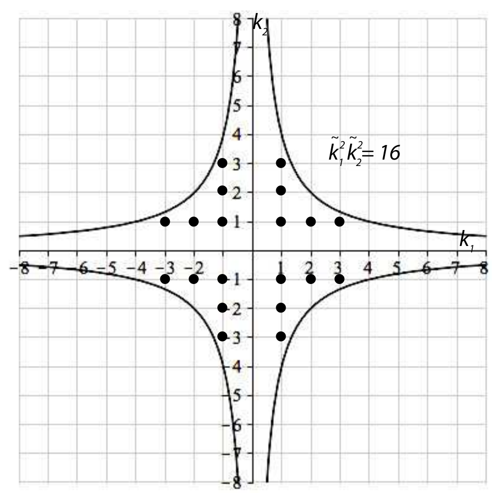

Рис. 2: $n = 2$ и $N = 20$

В данном примере погрешность оптимального восстановления равна $\frac{1}{4}$.

7 Список литературы

[1] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. "Элементы теории функций и функционального анализа".

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. "Выпуклый анализ и его приложения".

[3] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "Оптимальное восстановление операторов по неточной информации".

[4] Будак Б.М., Фомин С.В. "Кратные интегралы и ряды".

[5] Смоляк С.А. "Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них".

[6] Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю. , Тихомиров В.М. "Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления".

[7] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. "О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 155-174.