Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО, В. М. ТИХОМИРОВ

НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ЗНАНИЯ ОБ ОБЪЕКТЕ И ТОЧНОСТЬ МЕТОДОВ ЕГО ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Обсуждается один подход к задаче оптимального восстановления функционалов и операторов на классах функций в условиях неопределенности знания о самих функциях. Возможности данного подхода демонстрируются на ряде примеров. В конце статьи приводится один общий результат об оптимальном восстановлении линейных функционалов.

1. Введение

Многие стороны практической деятельности человека связаны с тем, что ему приходится судить об изучаемых объектах по неполной и/или неточной информации о них. По такой информации точно восстановить объект, как правило, невозможно: возникает некоторая *неопределенность* обычно в виде некоторой области, где объект может находиться. Иногда при уточнении исходной информации можно все ближе и ближе приближаться к цели (в этом случае можно считать, что объект "познаваем"), но "цена" этой познаваемости нередко оказывается непомерно большой.

Долгое время считалось, что "Мир познаваем", но сейчас как-то на этом не настаивают, ибо были обнаружены принципиальные границы познаваемости (в математической логике, в квантовой механике и т.п.). С другой стороны, если имеется какая-то информация, то возникает желание максимально сузить границы неопределенности изучаемого объекта, максимально полно использовав эту информацию. Для этого применяется те или иные *методы восстановления* объекта по той информации, которая находится в нашем распоряжении. Если метод восстановления очерчивает границы для объекта, совпадающие с мерой его неопределенности при данной информации, можно говорить об оптимальности данного метода восстановления.

Андрея Николаевича Колмогорова на протяжении всей его творческой жизни занимали подобные вопросы, и он так или иначе сталкивался с ними в своей научной деятельности (в теории вероятностей, в теории информации, в теории стрельбы и многих

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №00–15–96109, №02-01-39012 и №02–01–00386), программы "Университеты России" (УР.04.03.013), а также при поддержке U.S. CRDF – R.F. Ministry of Education Award VZ-010-0.

других вопросах). Ряд введенных им величин (скажем, ε-емкость и ε-энтропия) являются характеристиками мер неопределенности, а его результаты по экстраполяции случайных процессов привели к соответствующим оптимальным методам восстановления.

В данной работе для достаточно широкого класса задач (вполне естественных с точки зрения приложений) вводится понятие оптимальности метода восстановления по различного рода информации. Этот подход демонстрируется на ряде примеров, носящих иллюстративный характер и призванных показать разнообразие задач, охватываемых предлагаемой постановкой.

2. Постановка задач

Общая постановка проблем неопределенности и восстановления, обсуждаемых здесь, заключается в определении значений заданного функционала или оператора на некоторых функциях. Об этих функциях мы располагаем двумя типами информации. Один из них — "глобальный", характеризует класс функций, которые только и могут встретиться; другой — "локальный" (индивидуальный), связанной с характеризацией отдельной функции. Классы обычно связывают со свойствами гладкости или аналитичности входящих в них функций. Локальная информация обычно состоит в том, что исследователю оказывается доступными некоторые характеристики функции (например, ее значения в отдельных точках, моменты, коэффициенты Фурье или Тейлора, преобразование Фурье и т. п.). Эта информация может задаваться точно или с ошибками. По этим двум типам информации и производится оценка неопределенности значения функционала или оператора и строится метод его восстановления. Переходим к точным формулировкам.

Пусть задано множество (класс) C и отображение $f\colon C \to Z$, где (Z, d) — метрическое пространство. Принадлежность элемента классу C составляет "глобальную" информацию о нем. Кроме того, о самом элементе имеется "локальная" (индивидуальная) информация, состоящая в том, что известно отображение (вообще говоря, многозначное, что соответствует информации, заданной неточно) $F\colon C \to Y$, где Y — некоторое множество. Отображение F назовем *информационным оператором.*

Задача состоит в том, чтобы *восстановить по возможности наилучшим способом значение $f(x)$, $x \in C$, по информации $y \in F(x)$.*

Примерами могут служить задачи о восстановлении значения функции в некоторой точке по ее значениям в других точках или по ее коэффициентам Фурье, или задача о восстановлении интеграла от функции, или ее производной в отдельной точке, или восстановлении самой функции по той же или какой-то иной информации.

Поясним смысл, которые мы вкладываем в слова “восстановить по возможности наилучшим способом”.

Любое отображение $m\colon F(C)\to Z$ назовем *методом восстановления.* Погрешностью такого метода назовем величину

$$e(f,C,F,m)=\sup_{x\in C,\ y\in F(x)} d(f(x),m(y)),$$

а *погрешность оптимального восстановления* (f на C по F), которую обозначим $E(f,C,F)$, определим как значение следующей экстремальной задачи:

$$\inf e(f,C,F,m), \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям $m\colon F(C)\to Z$. Метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань в (1), называется *оптимальным методом восстановления.* Может оказаться, что имеется возможность использовать различные типы информации, т. е. мы располагаем семейством информационных отображений $\mathcal{F}$, и тогда под задачей о выборе оптимальной информации понимается задача о нахождении величины

$$E(f,C,\mathcal{F})=\inf_{F\in\mathcal{F}} E(f,C,F).$$

Впервые постановка задачи оптимального восстановления появилась в работе Смоляка [1] для случая, когда C — выпуклое и уравновешенное (т.е. $C=\alpha C$ для всех α таких, что $|\alpha|=1$) подмножество векторного пространства X, Y — конечномерное векторное пространство, f — линейный функционал на X и $F\colon X\to Y$ — линейное отображение. Смоляк доказал, что в этом случае среди оптимальных методов есть линейный. Впоследствии проблематика, связанная с оптимальным восстановлением развивалась достаточно интенсивно (см. [2]–[7]). Результаты, относящиеся к кругу вопросов, рассматриваемых в данной работе, можно найти в [8]–[10], где, в частности, содержатся различные обобщения большинства из тех примеров, которые обсуждаются ниже.

3. Примеры

1. Восстановление значения функции в точке по ее значениям в других точках. Обозначим через $W^1_\infty([-1,1])$ класс вещественных функций $x(\cdot)$, определенных на отрезке $[-1,1]$, абсолютно непрерывных и удовлетворяющую условию

$$|x'(t)|\le 1,\quad \text{для почти всех } t\in[-1,1].$$

Пусть $-1\le t_1<\ldots<t_n\le 1$. Рассмотрим задачу оптимального восстановления значения функции $x(\cdot)\in W^1_\infty([-1,1])$ в точке $\tau\in[-1,1]$ по ее значениям в наборе точек $\bar t=(t_1,\ldots,t_n)$. В соответствии с общей постановкой здесь $C=W^1_\infty([-1,1])$, $Z=\mathbb{R}$, $f(x(\cdot))=x(\tau)$, $Y=\mathbb{R}^n$ и $F_{\bar t}\colon C\to Y$, $F_{\bar t}x(\cdot)=(x(t_1),\ldots,x(t_n))$.

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные функции $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Погрешность данного метода m есть величина

$$e(x(\tau), W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}, m) = \sup_{x(\cdot)\in W^1_\infty([-1,1])} |x(\tau) - m(F_{\bar t}x(\cdot))|,$$

а погрешность оптимального восстановления — величина

$$E(x(\tau), W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}} E(x(\tau), W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}, m).$$

Найдем эту величину, а также оптимальный метод восстановления.

Обозначим через $\alpha(t)$ — ближайшую к t точку из множества $\{t_1, \dots, t_n\}$ (в случае, если t лежит посередине между t_i и t_{i+1}, будем считать для определенности $\alpha(t) = t_i$). Положим

$$\widehat{x}(t) = |t - \alpha(t)|.$$

Очевидно, что $\widehat{x}(\cdot) \in W^1_\infty([-1,1])$, $-\widehat{x}(\cdot) \in W^1_\infty([-1,1])$ и $F_{\bar t}\widehat{x}(\cdot) = F_{\bar t}(-\widehat{x}(\cdot)) = 0$. Для любого метода m имеем

$$2\widehat{x}(\tau) \le |\widehat{x}(\tau) - m(0)| + |-\widehat{x}(\tau) - m(0)| \le 2e(x(\tau), W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}, m).$$

Откуда

$$E(x(\tau), W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}) \ge \widehat{x}(\tau).$$

Пусть $\alpha(\tau) = t_k$ $1 \le k \le n$. Определим метод $\widehat{m}$ равенством $\widehat{m}(y) = y_k$, $y = (y_1, \dots, y_n)$. Тогда для любой функции $x(\cdot) \in W^1_\infty([-1,1])$ имеем

$$|x(\tau) - \widehat{m}(F_{\bar t}x(\cdot))| = |x(\tau) - x(t_k)| \le |\tau - t_k| = \widehat{x}(\tau).$$

Следовательно,

$$E(x(\tau), W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}) = \widehat{x}(\tau),$$

а метод

$$x(\tau) \approx x(\alpha(\tau))$$

является оптимальным методом восстановления.

2. Восстановление интеграла от функции по ее значениям в отдельных точках. Для того же класса $W^1_\infty([-1,1])$ и того же информационного оператора $F_{\bar t}$ рассмотрим теперь задачу оптимального восстановления значения интеграла

$$Ix(\cdot) = \int_{-1}^{1} x(t)\,dt.$$

В качестве методов восстановления будем по-прежнему рассматривать всевозможные функции $m\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Здесь задача оптимального восстановления состоит в нахождении величины

$$E(I, W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}} \sup_{x(\cdot)\in W^1_\infty([-1,1])} \left| \int_{-1}^{1} x(t)\,dt - m(F_{\bar t}x(\cdot)) \right|$$

и оптимального метода восстановления $\widehat{m}_0$, на котором достигается нижняя грань в этом равенстве.

Сохраняя обозначения для функции $\widehat{x}(\cdot)$ из предыдущего примера, получаем, что для любого метода m

$$2\int_{-1}^{1}\widehat{x}(t)\,dt \le \left|\int_{-1}^{1}\widehat{x}(t)\,dt - m(0)\right| + \left|\int_{-1}^{1}(-\widehat{x}(t))\,dt - m(0)\right| \\ \le 2\sup_{x(\cdot)\in W^1_\infty([-1,1])}\left|\int_{-1}^{1}x(t)\,dt - m(F_{\bar t}x(\cdot))\right|.$$

Тем самым

$$E(I, W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}) \ge \int_{-1}^{1}\widehat{x}(t)\,dt.$$

С другой стороны, положив

$$\widehat{m}_0(y) = \int_{-1}^{1} y(t)\,dt,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} y_1, & -1 \le t \le \dfrac{t_1+t_2}{2}, \\ y_i, & \dfrac{t_{i-1}+t_i}{2} < t \le \dfrac{t_i+t_{i+1}}{2},\ 2 \le i \le n-1, \\ y_n, & \dfrac{t_{n-1}+t_n}{2} < t \le 1, \end{cases}$$

при всех $\widehat{x}(\cdot) \in W^1_\infty([-1,1])$ будем иметь

$$\left|\int_{-1}^{1}x(t)\,dt - \widehat{m}_0(F_{\bar t}x(\cdot))\right| = \left|\int_{-1}^{1}(x(t) - x(\alpha(t)))\,dt\right| \\ \le \int_{-1}^{1}|t-\alpha(t)|\,dt = \int_{-1}^{1}\widehat{x}(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$E(I, W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar t}) = \int_{-1}^{1}\widehat{x}(t)\,dt \\ = \frac{(t_1+1)^2}{2} + \sum_{j=1}^{n-1}\frac{(t_{j+1}-t_j)^2}{4} + \frac{(1-t_n)^2}{2},$$

а

$$\int_{-1}^{1}x(t)\,dt \approx \widehat{m}_0(F_{\bar t}x(\cdot)) \\ = \left(\frac{t_1+t_2}{2}+1\right)x(t_1) + \sum_{j=2}^{n-1}\frac{t_{j+1}-t_{j-1}}{2}x(t_j) + \left(1-\frac{t_{n-1}+t_n}{2}\right)x(t_n)$$

— оптимальный метод восстановления.

Если в наших возможностях выбирать систему точек $\bar t = (t_1, \dots, t_n)$, в которых будут измеряться значения функций $x(\cdot) \in$

$W^1_\infty([-1,1])$ (иначе говоря, есть возможность выбора исходной информации), то естественно выбрать эти точки так, чтобы величина $E(I, W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar{t}})$ была по возможности меньше. Нетрудно убедиться, что

$$\inf_{\bar{t}} E(I, W^1_\infty([-1,1]), F_{\bar{t}}) = \frac{1}{n},$$

а оптимальные точки (т. е. точки, на которых достигается нижняя грань) таковы

$$\widehat{t}_j = -1 + \frac{2j-1}{n}, \quad j = 1, \dots, n.$$

В рассмотренных выше примерах информация о функции хотя и была неполной, но задавалась точно. Реально, любая исходная информация содержит ту или иную погрешность. Дальнейшие примеры посвящены случаям, когда информация о функциях задается с некоторой ошибкой.

3. Восстановление производной функции в точке по приближенным значениям в других точках. Обозначим через $W^2_\infty([-1,1])$ множество функций $x(\cdot)$, определенных на отрезке $[-1,1]$, для которых $x'(\cdot) \in W^1_\infty([-1,1])$. Пусть для функции $x(\cdot) \in W^2_\infty([-1,1])$ известны приближенные значения $x(-h)$ и $x(h)$, $0 < h \le 1$. Требуется восстановить оптимальным образом значение $x'(0)$. Будем считать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W^2_\infty([-1,1])$ нам известны значения $\widetilde{x}_{-1}$ и $\widetilde{x}_1$ такие, что

$$|x(jh) - \widetilde{x}_j| \le \delta, \quad j = -1, 1, \tag{2}$$

где $\delta > 0$ — погрешность исходной информации. Здесь информационный оператор уже многозначное отображение $F_{h,\delta}$, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W^2_\infty([-1,1])$ множество $F_{h,\delta}x(\cdot) = \{(\widetilde{x}_{-1}, \widetilde{x}_1)\}$, где $\widetilde{x}_{-1}$ и $\widetilde{x}_1$ удовлетворяют условию (2). Рассмотрим в качестве методов восстановления произвольные функции $m\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Погрешностью данного метода m назовем величину

$$e(x'(0), W^2_\infty([-1,1]), F_{h,\delta}, m) = \sup_{x(\cdot)\in W^2_\infty([-1,1])} \sup_{\substack{\widetilde{x}_{-1}, \widetilde{x}_1 \\ |x(jh)-\widetilde{x}_j| \le \delta,\ j=-1,1}} |x'(0) - m(\widetilde{x}_{-1}, \widetilde{x}_1)|.$$

Нас будет интересовать погрешность оптимального восстановления

$$E(x'(0), W^2_\infty([-1,1]), F_{h,\delta}) = \inf_{m\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}} e(x'(0), W^2_\infty([-1,1]), F_{h,\delta}, m)$$

и оптимальный метод восстановления, т.е. метод, на котором эта нижняя грань достигается.

Положим

$$\widehat{x}(t)=\begin{cases}-\dfrac{t^2}{2}+\left(\dfrac{h}{2}+\dfrac{\delta}{h}\right)t, & 0\le t\le 1,\\[2mm] \dfrac{t^2}{2}+\left(\dfrac{h}{2}+\dfrac{\delta}{h}\right)t, & -1\le t<0.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $\pm\widehat{x}(\cdot)\in W^2_\infty([-1,1])$ и $\widehat{x}(-h)=-\delta$, $\widehat{x}(h)=\delta$. Для любого метода m имеем

$$2\widehat{x}'(0)\le|\widehat{x}'(0)-m(0,0)|+|-\widehat{x}'(0)-m(0,0)|\\ \le 2e(x'(0),W^2_\infty([-1,1]),F_{h,\delta},m).$$

Следовательно,

$$E(x'(0),W^2_\infty([-1,1]),F_{h,\delta})\ge\widehat{x}'(0)=\frac{h}{2}+\frac{\delta}{h}. \tag{3}$$

Рассмотрим метод

$$\widehat{m}(\widetilde{x}_{-1},\widetilde{x}_1)=\frac{\widetilde{x}_1-\widetilde{x}_{-1}}{2h}. \tag{4}$$

Учитывая, что $\widetilde{x}_j=x(jh)+\delta_j$, где $|\delta_j|\le\delta$, $j=-1,1$, будем иметь

$$e(x'(0),W^2_\infty([-1,1]),F_{h,\delta},\widehat{m})\\ =\sup_{x(\cdot)\in W^2_\infty}\ \sup_{|\delta_j|\le\delta,\ j=-1,1}\left|x'(0)-\frac{x(h)-x(-h)}{2h}-\frac{\delta_1-\delta_{-1}}{2h}\right|\\ \le\sup_{x(\cdot)\in W^2_\infty([-1,1])}\left|x'(0)-\frac{x(h)-x(-h)}{2h}\right|+\frac{\delta}{h}.$$

Пользуясь равенствами

$$x(h)=x(0)+x'(0)h+M_1\frac{h^2}{2},$$
$$x(-h)=x(0)-x'(0)h+M_{-1}\frac{h^2}{2},$$

где $M_1, M_{-1}\in[-1,1]$, получаем

$$\left|x'(0)-\frac{x(h)-x(-h)}{2h}\right|=\frac{h}{4}|M_1-M_{-1}|\le\frac{h}{2}.$$

Тем самым

$$e(x'(0),W^2_\infty([-1,1]),F_{h,\delta},\widehat{m})\le\frac{h}{2}+\frac{\delta}{h}.$$

Учитывая (3), находим, что

$$E(x'(0),W^2_\infty([-1,1]),F_{h,\delta})=\frac{h}{2}+\frac{\delta}{h},$$

а метод (4) является оптимальным.

Можно поставить вопрос об оптимизации исходной информации за счет выбора шага h. Несложные вычисления показывают, что

$$\min_{0<h\le 1} E(x'(0), W^2_\infty([-1,1]), F_{h,\delta}) = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ \delta + 1/2, & \delta \ge 1/2, \end{cases}$$

при этом значение шага, на котором достигается минимум таково:

$$\widehat{h} = \begin{cases} \sqrt{2\delta}, & \delta < 1/2, \\ 1 & \delta \ge 1/2. \end{cases}$$

4. Восстановление производной функции по ее приближенным коэффициентам Фурье. Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$, суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

Класс $W^2_2(\mathbb{T})$ — это совокупность 2π-периодических функций $x(\cdot)$, у которых первая производная абсолютно непрерывна и $\|x''(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le 1$.

На этом классе рассмотрим задачу восстановления первой производной функции $x(\cdot)$ в метрике $L_2(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)e^{-ijt}\,dt,$$

заданных с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W^2_2(\mathbb{T})$ нам известны числа y_j, $|j| \le N$, такие, что

$$|x_j - y_j| \le \delta, \quad |j| \le N, \quad \delta > 0. \tag{5}$$

Здесь информационным оператором является многозначное отображение F^N_δ, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W^2_2(\mathbb{T})$ множество $F^N_\delta x(\cdot) = \{y_j\}_{|j|\le N}$, где y_j удовлетворяют условию (5). Задача заключается в нахождении величины

$$E(x'(\cdot), W^2_2(\mathbb{T}), F^N_\delta) = \inf_{m\colon \mathbb{C}^{2N+1}\to L_2(\mathbb{T})} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W^2_2(\mathbb{T})\\ y\in F^N_\delta x(\cdot)}} \|x'(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

и соответствующего оптимального метода.

Аналогично предыдущему нетрудно получить оценку снизу

$$E(x'(\cdot), W^2_2(\mathbb{T}), F^N_\delta) \ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in W^2_2(\mathbb{T})\\ |x_j|\le\delta,\ |j|\le N}} \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Задача справа в силу равенства Парсеваля записывается в виде (для удобства мы переходим к квадрату нормы)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2u_j \to \max, \quad \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4u_j \le 1, \quad 0\le u_j\le \delta^2,\ |j|\le N, \tag{6}$$

где $u_j=|x_j|^2$, $j\in\mathbb{Z}$.

Эта задача выпуклого программирования. Легко убедиться, что для нахождения ее решения достаточно найти такие $\widehat\lambda\ge 0$, $\widehat\lambda_j\ge 0$, $|j|\le N$, и допустимую последовательность $\{\widehat u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых при всех $u_j\ge 0$, $j\in\mathbb{Z}$,

$$(a)\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-j^2+\widehat\lambda j^4+\widehat\lambda_j\chi_j)u_j \ge \sum_{j\in\mathbb{Z}}(-j^2+\widehat\lambda j^4+\widehat\lambda_j\chi_j)\widehat u_j$$

и

$$(b)\quad \widehat\lambda\Bigg(\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4\widehat u_j-1\Bigg)=0, \quad \widehat\lambda_j(\widehat u_j-\delta_j^2)=0,\ |j|\le N,$$

где $\chi_j=1$, если $|j|\le N$, и нулю в остальных случаях. Пусть

$$p_0=\max\Bigg\{\,p\in\mathbb{Z}_+ : \delta^2\sum_{|j|\le p} j^4<1,\ 0\le p\le N\,\Bigg\}.$$

Положим $\widehat\lambda=(p_0+1)^{-2}$,

$$\widehat\lambda_j=\begin{cases} j^2-(p_0+1)^{-2}j^4, & |j|\le p_0,\\ 0, & p_0+1\le |j|\le N.\end{cases}$$

Последовательность $\{\widehat u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ определим равенством

$$\widehat u_j=\begin{cases} \delta^2, & |j|\le p_0,\\ \dfrac{1-\delta^2\sum_{|k|\le p_0}k^4}{2(p_0+1)^4}, & |j|=p_0+1,\\ 0, & |j|>p_0+1.\end{cases}$$

Легко проверить, что последовательность $\widehat u=\{\widehat u_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ допустима и выполняются условия (a) и (b). Таким образом, $\widehat u$ — решение задачи (6). Подставляя $\widehat u$ в максимизируемый функционал и извлекая квадратный корень, получаем

$$E(x'(\cdot),W_2^2(\mathbb{T}),F_\delta^N)\ge \frac{\Big(1+\delta^2\sum_{|j|\le p_0}\big(j^2(p_0+1)^2-j^4\big)\Big)^{1/2}}{p_0+1}. \tag{7}$$

Исходя из аналогичных соображений достаточности можно убедиться, что $\widehat u$ является также решением и такой задачи

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2u_j\to\max, \quad \widehat\lambda\sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4u_j+\sum_{|j|\le N}\widehat\lambda_ju_j\le \widehat\lambda+\delta^2\sum_{|j|\le N}\widehat\lambda_j,\ u_j\ge 0. \tag{8}$$

Следовательно, значения задач (6) и (8) совпадают.

Положим

$$\widehat{x}_j = \begin{cases} y_0, & j = 0, \\ \dfrac{\widehat{\lambda}_j}{\widehat{\lambda} j^4 + \widehat{\lambda}_j} y_j, & 1 \le |j| \le p_0, \\ 0, & |j| > p_0. \end{cases}$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что для всех $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ имеет место равенство

$$\widehat{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4 |x_j - \widehat{x}_j|^2 + \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j |x_j - \widehat{x}_j|^2 + \widehat{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4 |\widehat{x}_j|^2 + \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j |\widehat{x}_j - y_j|^2$$
$$= \widehat{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4 |x_j|^2 + \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j |x_j - y_j|^2.$$

Если $x(\cdot) \in W_2^2(\mathbb{T})$ и $|x_j - y_j| \le \delta$, то, положив $v_j = |x_j - \widehat{x}_j|^2$, будем иметь

$$\widehat{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4 v_j + \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j v_j \le \widehat{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4 |x_j|^2 + \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j |x_j - y_j|^2 \le \widehat{\lambda} + \delta^2 \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j.$$

Отсюда

$$\left\| x'(t) - \sum_{|j|\le N} ij \widehat{x}_j e^{ijt} \right\|_{L_2(\mathbb{T})}^2 = \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2 v_j$$
$$\le \sup\left\{ \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^2 u_j : \widehat{\lambda} \sum_{j\in\mathbb{Z}} j^4 u_j + \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j u_j \le \widehat{\lambda} + \delta^2 \sum_{|j|\le N} \widehat{\lambda}_j,\ u_j \ge 0 \right\}.$$

Поскольку значение экстремальной задачи в правой части, являющейся задачей (8), совпадает со значением задачи (6), то для погрешности оптимального восстановления получаем оценку сверху, совпадающую с оценкой снизу (7). Таким образом,

$$E(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^N) = \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j|\le p_0} (j^2(p_0+1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{p_0 + 1},$$

а метод

$$x'(t) \approx \sum_{|j|\le N} ij \widehat{x}_j e^{ijt} = \sum_{|j|\le p_0} ij \left(1 - \left(\frac{j}{p_0+1} \right)^2 \right) y_j e^{ijt}$$

является оптимальным.

Отметим, что если $p_0 < N$, то дальнейшее увеличение числа коэффициентов Фурье, известных с той же погрешностью, не приводит к уменьшению погрешности оптимального восстановления. Тем самым при фиксированном δ набор из $2N(\delta)$ коэффициентов

Фурье (нулевой коэффициент не используется в оптимальном методе), где

$$N(\delta) = \max\Big\{ N \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 \sum_{|j|\le N} j^4 < 1 \Big\},$$

позволяет максимально точно восстановить производную функции из $L_2(\mathbb{T})$. Приведем некоторые значения функции $N(\delta)$ и соответствующей погрешности оптимального восстановления.

δ^2	$N(\delta)$	$E^2\left(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^{N(\delta)}\right)$
$\left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$	0	1
$\left[\frac{1}{34}, \frac{1}{2}\right)$	1	$\frac{1+6\delta^2}{4}$
$\left[\frac{1}{196}, \frac{1}{34}\right)$	2	$\frac{1+56\delta^2}{9}$
$\left[\frac{1}{1446}, \frac{1}{196}\right)$	3	$\frac{1+252\delta^2}{16}$

В общем случае, если

$$\Big(\sum_{|j|\le k+1} j^4\Big)^{-1/2} \le \delta < \Big(\sum_{|j|\le k} j^4\Big)^{-1/2},$$

то $N(\delta) = k$ и

$$E\left(x'(\cdot), W_2^2(\mathbb{T}), F_\delta^{N(\delta)}\right) = \frac{\left(1 + \delta^2 \sum_{|j|\le k} (j^2(k+1)^2 - j^4)\right)^{1/2}}{k+1}.$$

5. Восстановление функции в точке по самой функции, заданной с погрешностью в L_2-норме. Обозначим через $L_2(\mathbb{R})$ пространство функций $x(\cdot)$, определенных на $\mathbb{R}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \left(\int_{\mathbb{R}} |x(t)|^2\, dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ будем обозначать пространство функций $x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$, а через $W_2^1(\mathbb{R})$ — класс функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$, для которых $\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \le 1$. На классе $W_2^1(\mathbb{R})$ рассмотрим задачу оптимального восстановления значения $x(0)$ по информации о самой функции $x(\cdot)$, заданной с погрешностью $\delta > 0$ в норме $L_2(\mathbb{R})$. Иными словами, мы считаем, что для любой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, такая, что

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta. \tag{9}$$

Тем самым здесь в качестве информационного оператора F_δ рассматривается многозначное отображение, которое каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R})$ ставит в соответствие множество функций $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию (9). Нас, как и в предыдущих примерах, интересует погрешность оптимального восстановления

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) = \inf_{m\colon L_2(\mathbb{R})\to\mathbb{R}} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}} |x(0) - m(y(\cdot))|,$$

а также оптимальный метод восстановления (метод, на котором достигается нижняя грань).

В точности так же, как и раньше, доказывается оценка

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) \ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}} |x(0)|.$$

Поскольку функция

$$\widehat{x}(t) = \sqrt{\delta} e^{-|t|/\delta}$$

принадлежит классу $W_2^1(\mathbb{R})$ и, кроме того, $\|\widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta$, то

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) \ge \widehat{x}(0) = \sqrt{\delta}.$$

Для нахождения оптимального метода восстановления воспользуемся легко проверяемым тождеством

$$x(0) = \frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x'(t)\operatorname{sign} t\,dt, \tag{10}$$

справедливым для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$. Рассмотрим метод

$$m(y(\cdot)) = \frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} y(t)\,dt. \tag{11}$$

Воспользовавшись тождеством (10) и применяя неравенство Коши-Буняковского, будем иметь

$$\begin{aligned} &E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) \\ &\quad= \sup_{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{R})} \sup_{\substack{y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}) \\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta}} \Bigg| x(0) - \frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x(t)\,dt \\ &-\frac{1}{2\delta}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta}(y(t)-x(t))\,dt\Bigg| \le \sup_{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{R})} \left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|t|/\delta} x'(t)\operatorname{sign} t\,dt\right| \\ &\qquad + \frac{\sqrt{\delta}}{2} \le \sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

Отсюда и соответствующей оценки снизу вытекает равенство

$$E(x(0), W_2^1(\mathbb{R}), F_\delta) = \sqrt{\delta}$$

и оптимальность метода (11).

Кроме того, из доказанного следует, что значение задачи

$$x(0) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta, \quad \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1, \tag{12}$$

равно $\sqrt{\delta}$. Функция $x(\cdot)/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$ для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ является допустимой в задаче (12) с $\delta = \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}/\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}$. Следовательно, для всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$ справедливо неравенство

$$\frac{|x(0)|}{\|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}} \le \frac{\|x(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R})}}{\|x'(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R})}},$$

т.е.

$$|x(0)| \le \|x(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R})}\|x'(\cdot)\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R})}.$$

В силу инвариантности нормы относительно сдвига точку 0 можно заменить на любую точку $\tau \in \mathbb{R}$.

Полученное неравенство можно рассматривать как некоторый принцип неопределенности для функций из $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R})$, означающий, что при фиксированном значении функции в произвольной точке нормы функции и ее производной не могут быть одновременно малы — их произведение всегда не меньше квадрата этого значения.

6. Восстановление функции по ее приближенным значениям в весовой норме. Обозначим через $L_2(\mathbb{R}, t^2)$ пространство функций $x(\cdot)$, определенных на $\mathbb{R}$, для которых

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R},t^2)} = \left(\int_{\mathbb{R}} t^2|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ обозначим пространство функций из $L_2(\mathbb{R}, t^2)$, для которых $x'(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Положим

$$W_2^1(\mathbb{R}, t^2) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2) : \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1 \,\}.$$

На классе $W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ рассмотрим задачу оптимального восстановления функции $x(\cdot)$ по информации о ее приближенным значениям в норме пространства $L_2(\mathbb{R}, t^2)$. Мы считаем, что для любой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ нам известна функция $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$, такая, что

$$\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R},t^2)} \le \delta. \tag{13}$$

Здесь в качестве информационного оператора F_δ рассматривается многозначное отображение, которое каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ ставит в соответствие множество функций $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$, удовлетворяющих условию (13). Нас интересует погрешность оптимального восстановления

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) = \inf_{m\colon L_2(\mathbb{R},t^2)\to L_2(\mathbb{R})} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{R},t^2),\ y(\cdot)\in L_2(\mathbb{R},t^2)\\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R},t^2)}\le\delta}} \|x(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

а также оптимальный метод восстановления.

Рассуждения, аналогичные проводимым в предыдущих примерах, приводят к неравенству

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) \geq \sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} \leq \delta \\ \|x'(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1}} \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Для решения экстремальной задачи

$$\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} \leq \delta^2, \quad \|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1, \qquad (14)$$

рассмотрим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = -\int_{\mathbb{R}} x^2(t)\,dt + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t)\,dt + \lambda_2 \int_{\mathbb{R}} x'^2(t)\,dt.$$

Несложно показать, что для того чтобы функция $\widehat{x}(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ была решением задачи (14) достаточно, чтобы нашлись $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2 \geq 0$, для которых

$$\min_{x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)} \mathcal{L}(x(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{x}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2)$$

и

$$\widehat{\lambda}_1 \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 \widehat{x}^2(t)\,dt - \delta^2 \right) = 0, \quad \widehat{\lambda}_2 \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{x}'^2(t)\,dt - 1 \right) = 0.$$

Положим $\widehat{\lambda}_1 = \delta^{-1}$ и $\widehat{\lambda}_2 = \delta$. Интегрируя по частям первое слагаемое в функции Лагранжа, получим

$$\mathcal{L}(x(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} \left(t x(t) + \delta x'(t) \right)^2\,dt.$$

Очевидно, что на функции

$$\widehat{x}(t) = \sqrt{2} \left(\frac{\delta}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\frac{t^2}{2\delta}}$$

функция Лагранжа обращается в ноль, т.е. на этой функции достигается минимум. В силу того, что

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t)\,dt = \delta^2, \quad \int_{\mathbb{R}} x'^2(t)\,dt = 1,$$

$\widehat{x}(\cdot)$ — решение задачи (14). Тем самым

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) \geq \left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{x}^2(t)\,dt \right)^{1/2} = \sqrt{2\delta}.$$

Из аналогичных соображений достаточности вытекает, что функция $\widehat{x}(\cdot)$ является также решением экстремальной задачи

$$\|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \delta^{-1} \|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} + \delta \|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \leq 2\delta. \qquad (15)$$

Перейдем к построению оптимального метода восстановления. Положим

$$\psi_n(t) = H_n\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}} \right) e^{-\frac{t^2}{2\delta}}, \quad n = 0, 1, \ldots\,,$$

где $H_n(\cdot)$ — полиномы Чебышева–Эрмита ($\{H_n(\cdot)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортогональная на $\mathbb{R}$ система полиномов для веса e^{-x^2} со старшими коэффициентами $a_n = 2^n$). Функции $\psi_n(\cdot)$, $n = 0, 1, \dots$, образуют ортогональный базис в $L_2(\mathbb{R})$. Пусть $y(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, t^2)$ и

$$ty(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \psi_n(t).$$

Положим

$$\widehat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{x}_n \psi_n(t),$$

где

$$\widehat{x}_0 = \frac{y_1}{\sqrt{\delta}}, \quad \widehat{x}_n = \frac{(n+1)y_{n+1} + y_{n-1}/2}{\sqrt{\delta}(2n+1)}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Пользуясь свойствами полиномов Чебышева–Эрмита, можно показать, что для всех $z(\cdot) \in \mathcal{W}_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ имеет место равенство

$$\frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2(\widehat{x}(t) - y(t))z(t)\, dt + \delta \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}'(t) z'(t)\, dt = 0.$$

Откуда вытекает, что для любого $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$

$$\frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2(x(t) - \widehat{x}(t))^2\, dt + \delta \int_{\mathbb{R}} (x'(t) - \widehat{x}'(t))^2\, dt + \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2(\widehat{x}(t) - y(t))^2\, dt \\ + \delta \int_{\mathbb{R}} \widehat{x}'^2(t)\, dt = \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2(x(t) - y(t))^2\, dt + \delta \int_{\mathbb{R}} x'^2(t)\, dt.$$

Если $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{R}, t^2)$ и $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} \le \delta$, то, положив $z(\cdot) = x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)$, будем иметь

$$\frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2 z^2(t)\, dt + \delta \int_{\mathbb{R}} z'^2(t)\, dt \\ \le \frac{1}{\delta} \int_{\mathbb{R}} t^2(x(t) - y(t))^2\, dt + \delta \int_{\mathbb{R}} x'^2(t)\, dt \le 2\delta.$$

Отсюда

$$\|x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \|z(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ \le \sup \left\{ \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} : \delta^{-1} \|x(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}, t^2)} + \delta \|x'(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le 2\delta \right\}.$$

Квадрат значения экстремальной задачи в правой части совпадает со значением задачи (15) и тем самым со значением задачи (14). Следовательно, для погрешности оптимального восстановления получена оценка сверху, совпадающая с оценкой снизу. Таким образом,

$$E(x(\cdot), W_2^1(\mathbb{R}, t^2), F_\delta) = \sqrt{2\delta}, \tag{16}$$

а метод

$$x(t) \approx \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{x}_n \psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n H_n\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) e^{-\frac{t^2}{2\delta}},$$

где

$$\alpha_n = \frac{1}{(2n+1)2^n n!} \int_{\mathbb{R}} y(t) H_n\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}\right) e^{-\frac{t^2}{2\delta}} t^2 \, dt,$$

является оптимальным.

Из (16) по тем же соображениям, что и в предыдущем примере, вытекает следующее точное неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t)\, dt \le 2 \left(\int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t)\, dt \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} x'^2(t)\, dt \right)^{1/2}. \tag{17}$$

Если рассматривать функции $x(\cdot)$, нормированные условием

$$\int_{\mathbb{R}} x^2(t)\, dt = 1,$$

то из (17) вытекает неравенство

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 x^2(t)\, dt \int_{\mathbb{R}} x'^2(t)\, dt \ge 1/4,$$

которое известно как принцип неопределенности Гейзенберга.

4. Теория

Приведенные выше примеры были решены непосредственно, без привлечения каких-либо общих утверждений. Мы это сделали сознательно, чтобы сосредоточить внимание читателя только на самих примерах. Здесь же мы приведем один общий результат, связанный с оптимальным восстановлением линейных функционалов (в некоторых примерах мы, фактически, им пользовались).

Пусть в обозначениях п.2 C — подмножество вещественного или комплексного пространства X, X' — сопряженное к X и $f = x' \in X'$, т. е. $Z = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Значение линейного функционала x' на элементе $x \in X$ обозначаем $\langle x', x\rangle$. Пусть, далее, Y — другое вещественное или комплексное векторное пространство, Y' — его сопряженное и $F\colon C \to Y$ — (вообще говоря, многозначное) отображение. Задача состоит в том, чтобы восстановить значения линейного функционала x' на множестве C по информации F.

Будем для определенности считать, что X и Y — комплексные векторные пространства. Любое отображение $m\colon F(C) \to \mathbb{C}$, как и раньше, назовем *методом восстановления*. Погрешностью такого метода называется величина

$$e(x', C, F, m) = \sup_{x \in C,\ y \in F(x)} |\langle x', x\rangle - m(y)|, \tag{18}$$

а *погрешность оптимального восстановления* (x' на C по F), обозначаемую $E(x', C, F)$, определим как значение задачи:

$$e(x', C, F, m) \to \min, \tag{19}$$

где нижняя грань берется по всевозможным отображениям $m\colon F(C) \to \mathbb{C}$. Любой метод $\widehat{m}$, который является решением этой задачи называется *оптимальным методом восстановления.*

Сопоставим задаче (19) следующую экстремальную задачу

$$\operatorname{Re}\langle x', x\rangle \to \max, \quad x \in F^{-1}(0), \quad x \in C, \tag{20}$$

где $F^{-1}(y) = \{x \in C \mid y \in F(x)\}$.

Функцию

$$\mathcal{L}\left((x, y), \lambda_0, y'\right) = \lambda_0 \operatorname{Re}\langle x', x\rangle + \operatorname{Re}\langle y', y\rangle.$$

назовем функцией Лагранжа задачи (20), а число λ_0 и функционал $y' \in Y'$ — множителями Лагранжа.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (20) *множества* C *и* $\operatorname{gr} F = \{(x, y) : x \in C,\ y \in F(x)\}$ *выпуклы и уравновешены. Тогда допустимая в* (20) *точка* $\widehat{x}$ *является решением этой задачи в том и только в том случае, когда найдется такой множитель Лагранжа* $\widehat{y}' \in Y'$, *что*

$$\min_{\substack{x \in C \\ y \in F(x)}} \mathcal{L}\left((x, y), -1, \widehat{y}'\right) = \mathcal{L}\left((\widehat{x}, 0), -1, \widehat{y}'\right).$$

При этом $\widehat{y}'$ *— оптимальный метод восстановления в задаче* (19) *и* $E(x', C, F) = \operatorname{Re}\langle x', \widehat{x}\rangle$.

Из этой теоремы видно, что для нахождения оптимального метода в (19) достаточно решить задачу (20), которая является выпуклой. Решая ее стандартными методами выпуклой оптимизации, мы находим заодно и множители Лагранжа, т. е. находим оптимальный метод восстановления (который оказывается линейным). С точки зрения выпуклой двойственности это означает, что задачи (19) и (20) двойственны друг к другу.

При оптимальном восстановлении линейных операторов оценка снизу величины оптимальной погрешности также сводится к решению задачи, аналогичной (20), но оценка сверху требует отдельных рассуждений. На этот счет имеются некоторые соображения общего характера, но здесь мы на них не будем останавливаться (см. [10]).

Доказательство сформулированной теоремы можно найти в [9].

Литература

[1] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. Москва: МГУ, 1965.

[2] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C. A. Micchelli and T. J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.

[3] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms. New York: Academic Press, 1980.

[4] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer–Verlag, 1985.

[5] *Арестов В. В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Тр. Мат. ин-та АН СССР. 1989. Т. 189. С. 3–20.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки. 1991. Т. 50. №6. С. 85–93.

[7] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions, Nova Science Publ., Inc., Huntington, New York 2000.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 188. №12. С. 73–106.

[9] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. Москва: Эдиториал УРСС, 2000.

[10] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. С. 79–100.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова