УДК 517.51

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко

1. Введение

Обзор посвящен задачам оптимального восстановления линейных операторов на классах элементов по неточной информации о самих элементах и взаимосвязям этих задач с неравенствами для производных. Прежде чем приводить точные постановки, сформулируем (на содержательном уровне) несколько задач, чтобы дать представление о том круге вопросов, которые можно изучать развиваемыми здесь методами.

1) Пусть про функцию из некоторого класса приближенно известен ее спектр (например, какие-то ее коэффициенты Фурье, если функция периодическая, или ее преобразование Фурье на некотором множестве, если функция задана на прямой). Как наилучшим образом воспользоваться этой информацией, чтобы, скажем, целиком восстановить саму функцию и/или ее производные?

2) Пусть приближенно известны состояния динамической системы в некоторые фиксированные моменты времени. Как наилучшим образом воспользоваться этой информации, чтобы восстановить состояние системы в другой момент времени?

3) Пусть про решение дифференциального уравнения, определенного в некоторой области, приближенно известны его значения на некоторых подмножествах этой области. Как наилучшим образом использовать эту информацию, чтобы восстановить решение на другом подмножестве?

Ограничимся этими задачами, хотя список можно продолжать. Все они укладываются в общую постановку, которую мы приводим в следующем параграфе и иллюстрируем примерами, соответствующими сформулированным задачам.

2. Постановка задачи

Пусть X — векторное пространство, W — непустое множество (класс элементов) в X, Y_j — нормированные пространства, $I_j\colon X \to Y_j$ — линейные операторы и $\delta_j \geq 0$, $1 \leq j \leq n$. Элементы из W

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №07-01-90102, №08-01-00450) и Программы государственной поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ-3233.2008.1).

известны, вообще говоря, неточно: информация об элементе $x \in W$ состоит в том, что известен вектор $y = (y_1, \dots, y_n) \in Y_1 \times \dots \times Y_n$ такой, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j$, $1 \le j \le n$. Если $\delta_1 = \dots = \delta_n = 0$, то говорим, что информация задана точно, в противном случае — неточно.

Пусть Z — нормированное пространство. Мы хотим восстановить линейный оператор $T\colon X \to Z$ на классе W, располагая о каждом элементе $x \in W$ описанной информацией (которая определяется набором операторов $I = (I_1, \dots, I_n)$ и вектором $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_n)$). Поступаем следующим образом. Любое отображение $m\colon Y_1 \times \dots \times Y_n \to Z$ объявляем *методом восстановления* (оператора T на W по информации (I, δ)) и величину

$$e(T, W, I, \delta, m) = \sup_{\substack{x \in W,\ y_j \in Y_j \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Tx - m(y_1, \dots, y_n)\|_Z$$

называем *погрешностью метода* m.

Нас будет интересовать величина

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_m e(T, W, I, \delta, m),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам) m из $Y_1 \times \dots \times Y_n$ в Z, которую называем *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором нижняя грань достигается, называемый *оптимальным методом восстановления* (т. е. $E(T, W, I, \delta) = e(T, W, I, \delta, \widehat{m})$).

Сформулированную задачу будем называть *задачей об оптимальном восстановлении оператора T на классе W по информации* (I, δ).

Впервые задача оптимального восстановления была поставлена С. А. Смоляком [1] для случая, когда $Z = \mathbb{R}$, информация задана точно, $n = 1$ и $\dim Y_1 < \infty$. Впоследствии проблематика оптимального восстановления интенсивно развивалась в разных направлениях (см. [2]–[6]). Ряд конкретных задач оптимального восстановления линейных операторов впервые был рассмотрен в [7]. Подход к решению задач восстановления, базирующийся на принципах теории экстремума, развивался в работах [8]–[13].

Приведем теперь несколько иллюстративных примеров, которые в дальнейшем будут рассмотрены в более общих ситуациях.

1) Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении функции и ее производных на соболевском классе функций на прямой по приближенной информации о ее преобразовании Фурье на некотором интервале. Одна из возможных точных постановок такова. Пусть X — соболевское пространство $\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$ функций на прямой $\mathbb{R}$, т. е.

$$\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) = \{\, x(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : x^{(r-1)}(\cdot) \in \mathrm{LAC}(\mathbb{R}),\ x^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) \,\},$$

где r — натуральное число и $\mathrm{LAC}(\mathbb{R})$ — совокупность всех локально абсолютно непрерывных функций на $\mathbb{R}$,

$$W = W_2^r(\mathbb{R}) = \{\, x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}) : \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le 1 \,\}$$

— соболевский класс функций на $\mathbb{R}$, $n = 1$, $Y_1 = L_2(\Delta_\sigma)$, где $\Delta_\sigma = (-\sigma, \sigma)$, $0 < \sigma \le \infty$ ($\Delta_\sigma = \mathbb{R}$, если $\sigma = \infty$), I_1 — сужение на Δ_σ преобразования Фурье F функций из $L_2(\mathbb{R})$, $Z = L_2(\mathbb{R})$, $\delta > 0$ и $Tx(\cdot) = x^{(k)}(\cdot)$, где $0 \le k \le r-1$.

Другими словами, это задача об оптимальном восстановлении k-ой производной (самой функции, если $k = 0$) на соболевском классе функций $W_2^r(\mathbb{R})$ по следующей неточной информации: о каждой функции $x(\cdot) \in W$ известно ее преобразование Фурье на интервале Δ_σ с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$.

2) Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении температуры бесконечного стержня в некоторый момент времени по ее приближенным измерениям в другие моменты времени. Одна из возможных точных постановок такова.

Распространение тепла в бесконечном стержне (т. е. на прямой $\mathbb{R}$) описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

с заданным начальным распределением температуры

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$. Единственным решением задачи (1)–(2) при $t > 0$ является интеграл Пуассона

$$u(t, x) = u(t, x; u_0(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} u_0(\xi)\, d\xi$$

и при этом $u(t, \cdot) \to u_0(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$.

Пусть в моменты времени $0 \le t_1 < \ldots < t_n$ приближенно известны распределения температур $u(t_1, \cdot), \ldots, u(t_n, \cdot)$, т. е. известны функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ такие, что $\|u(t_j, \cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j$, где $\delta_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Задача состоит в оптимальном восстановлении температуры бесконечного стержня в некоторый момент времени τ (т. е. в восстановлении функции $u(\tau, \cdot)$) по ее приближенным измерениям $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$.

В терминах общей постановки здесь $X = W = Y_j = L_2(\mathbb{R})$, $I_j(u_0(\cdot))(\cdot) = u(t_j, \cdot)$, $1 \le j \le n$.

3) Задача о трех сферах. Рассмотрим задачу Дирихле в d-мерном единичном шаре $\mathbb{B}^d = \{\, x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d : |x| < 1 \,\}$ ($|x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_d^2$):

$$\Delta u = 0,$$
$$u\big|_{\mathbb{S}^{d-1}} = f,$$

где $\mathbb{S}^{d-1} = \{\, x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1 \,\}$.

Предполагается, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Требуется восстановить решение этой задачи на сфере радиуса r по неточно заданным решениям на сферах радиусов r_i, $i = 1, 2$, $r_1 < r < r_2 \le 1$. Иными словами, известны функции $y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такие, что

$$\|u(\cdot)\big|_{|x|=r_i} - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_i, \quad i = 1, 2.$$

В терминах общей постановки здесь $X = W = Y_i = Z = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $I_i(f(\cdot))(\cdot) = u(\cdot)\big|_{|x|=r_i}$, $i = 1, 2$, и $T(f(\cdot))(\cdot) = u(\cdot)\big|_{|x|=r}$.

3. Общие результаты

Рассмотрим теперь некоторые результаты общего характера, позволяющие получать оптимальные методы восстановления в задачах, подобных сформулированным выше. Для этого мы несколько детализируем общую постановку из предыдущего раздела. Пусть, по прежнему, X — векторное пространство, Y_j — пространства со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{Y_j}$ и соответствующими нормами $\|\cdot\|_{Y_j}$, $I_j\colon X \to Y_j$ — линейные операторы, $\delta_j \ge 0$, $j = 1, \ldots, n$, и Z — нормированное пространство. Рассматривается задача оптимального восстановления линейного оператора $T\colon X \to Z$ на классе

$$W_k = \{\, x \in X : \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ 1 \le j \le k,\ 0 \le k < n \,\}$$

(при $k = 0$ считаем, что $W_0 = X$) по информации о значениях операторов $I_{k+1}, \ldots, I_n$, заданных неточно, т. е. для каждого $x \in W_k$ известен вектор $y = (y_{k+1}, \ldots, y_n) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n$ такой, что

$$\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j, \quad j = k+1, \ldots, n.$$

В качестве методов восстановления рассматриваются всевозможные отображения $m\colon Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n \to Z$. Погрешностью метода восстановления m называется величина

$$e(T, W_k, I, \delta, m) = \sup_{x \in W_k} \sup_{\substack{y = (y_{k+1}, \ldots, y_n) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n \\ \|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j = k+1, \ldots, n}} \|Tx - m(y)\|_Z.$$

Нас интересует величина

$$E(T, W_k, I, \delta) = \inf_{m\colon Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n \to Z} e(T, W_k, I, \delta, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань (если таковой существует), который называется *оптимальным методом.*

Свяжем с задачей оптимального восстановления следующую экстремальную задачу, которую будем называть *двойственной задачей* к задаче оптимального восстановления.

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \|I_j x\|_{Y_j}^2 \le \delta_j^2, \quad j = 1, \ldots, n, \quad x \in X. \tag{3}$$

Одним из основных результатов, на котором базируются построения оптимальных методов восстановления является следующая

Теорема 1. *Пусть существуют такие* $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, *что значения задачи*

$$\|Tx\|_Z^2 \to \max, \quad \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 \leq \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad x \in X, \tag{4}$$

и задачи (3) *совпадают. Предположим, кроме того, что для всех* $y = (y_{k+1}, \ldots, y_n) \in Y_{k+1} \times \ldots \times Y_n$ *существует решение* x_y *задачи*

$$\sum_{j=1}^k \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \to \min, \quad x \in X. \tag{5}$$

Тогда

$$E(T, W_k, I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|Tx\|_Z$$

и метод

$$\widehat{m}(y) = Tx_y \tag{6}$$

является оптимальным.

Сначала отметим один простой результат, касающийся характеризации элемента наилучшего приближения в пространстве с полускалярным произведением, и приведем (для полноты изложения) его доказательство. Пусть Y — пространство с полускалярным произведением $(\cdot, \cdot)_Y$, L — подпространство Y и $y \in Y$. Рассмотрим задачу (о наилучшем приближении y элементами из L):

$$\|x - y\|_Y \to \min, \quad x \in L. \tag{7}$$

Предложение 1. *Элемент* $\widehat{x} \in L$ *является решением задачи* (7) *в том и только в том случае, когда*

$$(\widehat{x} - y, x)_Y = 0$$

для всех $x \in L$.

Доказательство. Пусть $\widehat{x}$ — решение задачи (7). Допустим, что существует элемент $x_0 \in L$, для которого

$$(\widehat{x} - y, x_0)_Y = \alpha \neq 0.$$

Положим $z = \widehat{x} - \lambda x_0$, где $\lambda = \alpha / \|x_0\|_Y^2$. Ясно, что $z \in L$. Имеем

$$\begin{aligned}\|z - y\|_Y^2 &= (\widehat{x} - \lambda x_0 - y, \widehat{x} - \lambda x_0 - y)_Y \\ &= \|\widehat{x} - y\|_Y^2 - 2\operatorname{Re}(\widehat{x} - y, \lambda x_0)_Y + |\lambda|^2 \|x_0\|_Y^2\end{aligned}$$

$$= \|\widehat{x} - y\|_Y^2 - 2\operatorname{Re}(\overline{\lambda}\alpha) + \frac{|\alpha|^2}{\|x_0\|_Y^2} = \|\widehat{x} - y\|_Y^2 - \frac{|\alpha|^2}{\|x_0\|_Y^2} < \|\widehat{x} - y\|_Y^2.$$

Это противоречит тому, что $\widehat{x}$ — решение задачи (7).

Обратно, пусть $\widehat{x} \in L$ такое, что для всех $x \in L$ выполняется равенство $(\widehat{x} - y, x)_Y = 0$. В частности, $(\widehat{x} - y, x - \widehat{x})_Y = 0$. Тогда по теореме Пифагора $\|\widehat{x} - y\|_Y^2 \le \|\widehat{x} - y\|_Y^2 + \|x - \widehat{x}\|_Y^2 = \|x - y\|_Y^2$, т. е. $\widehat{x}$ — решение задачи (7). □

Доказательство теоремы 1. Оценка снизу. Пусть $x \in X$, $\|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j$, $j = 1, \ldots, k$, и m — произвольный метод восстановления. Тогда

$$\begin{aligned} 2\|Tx\|_Z &= \|Tx - m(0) - (-Tx - m(0))\|_Z \\ &\le \|Tx - m(0)\|_Z + \|-Tx - m(0)\|_Z \le 2e(T, W_k, I, \delta, m). \end{aligned}$$

Переходя к верхней грани по всем указанным x, получаем, что для всех m справедливо неравенство

$$e(T, W_k, I, \delta, m) \ge \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|Tx\|_Z.$$

Следовательно,

$$\text{(8)} \quad \begin{aligned} E(T, W, I, \delta) = \inf_{m\colon Y_{k+1} \times \ldots Y_n \to Z} e(T, W, I, \delta, m) \ge \\ \ge \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|Tx\|_Z. \end{aligned}$$

Оценка сверху. Рассмотрим векторное пространство $E = Y_1 \times \ldots \times Y_n$ с полускалярным произведением

$$(y^1, y^2)_E = \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j (y_j^1, y_j^2)_{Y_j},$$

где $y^1 = (y_1^1, \ldots, y_n^1)$, $y^2 = (y_1^2, \ldots, y_n^2)$. Тогда экстремальная задача (5) может быть переписана в виде

$$\|\widetilde{I}x - \widetilde{y}\|_E^2 \to \min, \quad x \in X,$$

где $\widetilde{I}x = (I_1 x, \ldots, I_n x)$, а $\widetilde{y} = (0, \ldots, 0, y_{k+1}, \ldots, y_n)$. Из предложения 1 следует, что для всех $x \in X$

$$(\widetilde{I}x_y - \widetilde{y}, \widetilde{I}x)_E = 0.$$

Отсюда получаем, что

$$\begin{aligned} \|\widetilde{I}x - \widetilde{y}\|_E^2 = \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y + \widetilde{I}x_y - \widetilde{y}\|_E^2 = \\ = \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 - 2\operatorname{Re}(\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y, \widetilde{I}x_y - \widetilde{y})_E + \|\widetilde{I}x_y - \widetilde{y}\|_E^2 = \\ = \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 + \|\widetilde{I}x_y - \widetilde{y}\|_E^2. \end{aligned}$$

Таким образом, для всех $x \in X$

$$\text{(9)} \quad \|\widetilde{I}x - \widetilde{I}x_y\|_E^2 \le \|\widetilde{I}x - \widetilde{y}\|_E^2 = \sum_{j=1}^{k} \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|_{Y_j}^2 + \sum_{j=k+1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2.$$

Пусть $x \in W_k$ и $y_{k+1}, \dots, y_n$ таковы, что $\|I_j x - y_j\|_{Y_j} \le \delta_j$, $j = k+1, \dots, n$. Положим $z = x - x_y$. Тогда из (9) следует, что

$$\sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|^2_{Y_j} = \|\widetilde{I} z\|^2_E \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Из этого неравенства и условия совпадения значений задач (3) и (4) получаем оценку для метода (6):

$$\|Tx - \widehat{m}(y)\|^2_Z = \|Tz\|^2_Z \le \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j z\|^2_{Y_j} \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|Tz\|^2_Z = \\ = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Tx\|^2_Z.$$

Таким образом,

$$E(T, W_k, I, \delta) \le e(T, W_k, I, \delta, \widehat{m}) \le \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Tx\|_Z.$$

Учитывая оценку (8), приходим к равенству.

$$E(T, W_k, I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \le \delta_j,\ j=1,\dots,n}} \|Tx\|_Z.$$

Отсюда и из предыдущего неравенства следует, что $\widehat{m}$ — оптимальный метод. □

Приведем теперь удобные для проверки достаточные условия совпадения значений задач (3) и (4). Функцию, определенную формулой

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = -\|Tx\|^2_Z + \sum_{j=1}^n \lambda_j \|I_j x\|^2_{Y_j},$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, назовем *функцией Лагранжа задачи* (3).

Теорема 2. *Пусть существуют $\widehat{\lambda}_j \ge 0$, $j = 1, \dots, n$, и допустимый в задаче* (3) *элемент $\widehat{x}$ такие, что*

$$(a) \quad \min_{x \in X} \mathcal{L}(x, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \widehat{\lambda}), \quad \widehat{\lambda} = (\widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n),$$

$$(b) \quad \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j (\|I_j \widehat{x}\|^2_{Y_j} - \delta_j^2) = 0.$$

Тогда $\widehat{x}$ — решение этой задачи и

$$\sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|^2_{Y_j} \le \delta_j^2,\ j=1,\dots,n}} \|Tx\|^2_Z = \sup_{\substack{x \in X \\ \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \|I_j x\|^2_{Y_j} \le \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2}} \|Tx\|^2_Z = \sum_{j=1}^n \widehat{\lambda}_j \delta_j^2.$$

Доказательство. Положим

$$S=\sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda}_j\delta_j^2.$$

Пусть x — допустимый элемент в (3). Тогда, используя это обстоятельство, условия (a) и (b), получим

$$-\|Tx\|_Z^2\ge -\|Tx\|_Z^2+\sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda}_j(\|I_jx\|_{Y_j}^2-\delta_j^2)=\mathcal{L}(x,\widehat{\lambda})-S\ge$$

$$\ge\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})-S=-\|T\widehat{x}\|_Z^2+\sum_{j=1}^{n}\widehat{\lambda}_j(\|I_j\widehat{x}\|_{Y_j}^2-\delta_j^2)=-\|T\widehat{x}\|_Z^2,$$

т. е. $\widehat{x}$ — решение задачи (3). Аналогичные рассуждения показывают, что $\widehat{x}$ — решение и задачи (4).

Покажем теперь, что $\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})=0$. Действительно, предположим, что $\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})=a>0$. Тогда, если $x_0=\alpha\widehat{x}$, где $\alpha<1$, то

$$\mathcal{L}(x_0,\widehat{\lambda})=\alpha^2\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})<\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda}),$$

что противоречит (a). Если же $a<0$, то полагая $\alpha>1$, получим

$$\mathcal{L}(x_0,\widehat{\lambda})=\alpha^2\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})<\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda}),$$

что снова противоречит (a). Следовательно, $\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})=0$ и тем самым

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}^2\le\delta_j^2,\ j=1,\dots,n}}\|Tx\|_Z^2=\|T\widehat{x}\|_Z^2=-\mathcal{L}(\widehat{x},\widehat{\lambda})+S=S.$$

□

Отметим, что в двойственной задаче (3) операторы I_j, задающие класс ($j=1,\dots,k$) и информацию ($j=k+1,\dots,n$), равноправны. Иными словами, двойственная экстремальная задача "не различает" априорную и апостериорную информации. В связи с этим естественно рассмотреть следующую постановку задачи оптимального восстановления. Пусть $A\subset\{1,\dots,n\}$ и $B=\{1,\dots,n\}\setminus A$. Положим

$$W_A=\{\,x\in X:\|I_jx\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j\in A\,\},\quad Y_B=\prod_{j\in B}Y_j.$$

Рассмотрим задачу оптимального восстановления линейного оператора $T\colon X\to Z$ на классе W_A по информации о неточно заданных значениях операторов I_j, $j\in B$. Погрешностью оптимального восстановления назовем величину

$$E(T,W_A,I,\delta)=\inf_{m\colon Y_B\to Z}\sup_{x\in W_A}\sup_{\substack{y=\{y_j\}\in Y_B\\ \|I_jx-y_j\|_{Y_j}\le\delta_j,\ j\in B}}\|Tx-m(y)\|_Z.$$

Из теоремы 1 для данной постановки вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть существуют такие* $\widehat{\lambda}_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$, *что значения задач* (3) *и*(4) *совпадают. Пусть, кроме того, для всех* $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y_1 \times \ldots \times Y_n$ *существует элемент* x_y, *являющийся решением задачи*

$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|I_j x - y_j\|_{Y_j}^2 \to \min, \quad x \in X.$$

Тогда для любого $A \subset \{1, \ldots, n\}$

$$E(T, W_A, I, \delta) = \sup_{\substack{x \in X \\ \|I_j x\|_{Y_j} \leq \delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|Tx\|_Z$$

и метод Tx_{y_A}, *где*

$$\{y_A\}_j = \begin{cases} 0, & j \in A, \\ y_j, & j \notin A, \end{cases}$$

является оптимальным.

4. Оптимальное восстановление функций и их производных по неточно заданному спектру

Рассмотрим задачу 1), сформулированную во втором параграфе, т. е. задачу об оптимальном восстановлении k-ой производной на соболевском классе $W_2^r(\mathbb{R})$ по неточно заданному преобразованию Фурье на интервале Δ_σ с точностью до δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$. Погрешность оптимального восстановления в этой задаче определяется следующим образом

$$E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot) \in W_2^r(\mathbb{R}),\ y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \leq \delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_2(\Delta_\sigma) \to L_2(\mathbb{R})$. Двойственная экстремальная задача здесь имеет вид

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \to \max, \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq 1, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 \leq \delta^2.$$

Для того чтобы далее иметь возможность строить оптимальные методы использующие не только информацию о приближенном преобразовании Фурье, но и о приближенной r-ой производной (считая, что она известна с точностью до δ_1 в метрике $L_2(\mathbb{R})$), будем рассматривать следующую задачу

(10)

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \to \max, \quad \|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \delta_1^2, \quad \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}^2 \leq \delta_2^2.$$

Используя теорему Планшереля, эта задача в образах Фурье запишется в виде

(11)
$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2k} u(\tau)\, d\tau \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r} u(\tau)\, d\tau \le \delta_1^2, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma} u(\tau)\, d\tau \le \delta_2^2,$$

где $u(\cdot) = (2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2$. Нетрудно показать, что в этой задаче решение не существует, поэтому рассмотрим следующее ее расширение:

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2k}\, d\mu(\tau) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\, d\mu(\tau) \le \delta_1^2, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma} d\mu(\tau) \le \delta_2^2, \tag{12}$$

на множество всех неотрицательных мер $d\mu(\cdot)$ на прямой.

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(\mu(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-\tau^{2k} + \lambda_1 \tau^{2r} + 2\pi\lambda_2\chi_\sigma(t))\, d\mu(\tau),$$

где

$$\chi_\sigma(t) = \begin{cases} 1, & t \in (-\sigma, \sigma), \\ 0, & t \notin (-\sigma, \sigma). \end{cases}$$

Пусть $0 < k < r$. Рассмотрим функцию, заданную параметрически

$$\begin{cases} y = \tau^{2k}, \\ x = \tau^{2r}. \end{cases}$$

Тогда $y = x^{k/r}$, $0 < k/r < 1$. Касательная к графику этой функцией в точке $(\tau_0^{2r}, \tau_0^{2k})$, $\tau_0 > 0$, имеет вид

$$y - \tau_0^{2k} = \frac{k}{r}\tau_0^{2k-2r}(x - \tau_0^{2r}).$$

Так как ясно, что функция $y = x^{k/r}$ вогнута, то для всех точек ее графика имеет место неравенство

$$-y + \frac{k}{r}\tau_0^{2k-2r}x + \tau_0^{2k}\frac{r-k}{r} \ge 0.$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{k}{r}\tau_0^{2k-2r}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi}\tau_0^{2k}\frac{r-k}{r}.$$

Тогда для всех τ

$$-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1\tau^{2r} + 2\pi\widehat{\lambda}_2 \ge 0.$$

Найдем теперь такое $\widehat{\sigma}$, что

$$-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1\tau^{2r} \ge 0.$$

при всех $|\tau| \ge \widehat{\sigma}$. Легко убедиться, что

$$\widehat{\sigma} = \widehat{\lambda}_1^{-\frac{1}{2(r-k)}} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}\tau_0.$$

Предположим, что $\sigma \geq \widehat{\sigma}$. Тогда для всех $\mu(\cdot)$

$$\mathcal{L}(\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \int_{\Delta_\sigma} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r} + 2\pi\widehat{\lambda}_2)\, d\mu(\tau) + \\ + \int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r})\, d\mu(\tau) \geq 0.$$

Рассмотрим меру, сосредоточенную в точке τ_0 (т. е. δ-функцию в этой точке):

$$d\widehat{\mu}(\tau) = A\delta(\tau - \tau_0)$$

и выберем A и τ_0 из условий:

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\, d\widehat{\mu}(\tau) = \delta_1^2, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma} d\widehat{\mu}(\tau) = \delta_2^2. \tag{13}$$

Таким образом,

$$A = \frac{\delta_2^2}{2\pi}, \quad \tau_0 = \left(\frac{2\pi\delta_1^2}{\delta_2^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Кроме того, ясно, что $\mathcal{L}(\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Из теоремы 2 вытекает, что для случая, когда

$$\sigma \geq \widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \tau_0 = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi\delta_1^2}{\delta_2^2}\right)^{\frac{1}{2r}},$$

мера $\widehat{\mu}(\cdot)$ — решение задачи (12) и значение этой задачи $\widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$ совпадает со значением задачи

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2k}\, d\mu(\tau) \to \max, \quad \widehat{\lambda}_1 \int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\, d\mu(\tau) + \widehat{\lambda}_2 2\pi \int_{\Delta_\sigma} d\mu(\tau) \leq \widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2. \tag{14}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\sigma < \widehat{\sigma}$. Прямая $y = \sigma^{2(k-r)}x$ проходит через точки $(0,0)$ и $(\sigma^{2k}, \sigma^{2r})$. Найдем точку $\widehat{\tau}$ такую, что касательная к кривой $y = x^{k/r}$ в точке $x = \widehat{\tau}^{2r}$ параллельна прямой $y = \sigma^{2(k-r)}x$. Имеем

$$\frac{k}{r}(\widehat{\tau}^{2r})^{k/r-1} = \sigma^{2(k-r)}.$$

Отсюда

$$\widehat{\tau} = \left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \sigma.$$

Тем самым уравнение касательной имеет вид

$$y = \widehat{\lambda}_1 x + 2\pi\widehat{\lambda}_2, \tag{15}$$

где

$$\widehat{\lambda}_1 = \sigma^{2(k-r)}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{r-k}{r}\left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \sigma^{2k}.$$

В силу вогнутости кривой $y = x^{k/r}$ ее точки лежат не выше прямой (15) и тем самым для них выполняется неравенство

$$-y + \widehat{\lambda}_1 x + 2\pi\widehat{\lambda}_2 \geq 0.$$

Кроме того, $-t^{2k} + \widehat{\lambda}_1 t^{2r} \geq 0$ при $t \geq \sigma$. Таким образом, для всех $\mu(\cdot)$ имеем

$$\mathcal{L}(\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \int_{\Delta_\sigma} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1\tau^{2r} + 2\pi\widehat{\lambda}_2)\, d\mu(\tau) + \\ + \int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma} (-\tau^{2k} + \widehat{\lambda}_1\tau^{2r})\, d\mu(\tau) \geq 0.$$

Положим теперь

$$d\widehat{\mu}(t) = A\delta(t - \widehat{\tau}) + B\delta(t - \sigma),$$

где $A > 0$ и $B > 0$ определим из тех же условий (13). Имеем

$$A\widehat{\tau}^{2r} + B\sigma^{2r} = \delta_1^2, \quad A = \frac{\delta_2^2}{2\pi}.$$

Отсюда

$$B = \frac{\delta_1^2}{\sigma^{2r}} - \frac{\delta_2^2}{2\pi}\left(\frac{k}{r}\right)^{\frac{r}{r-k}}.$$

Легко убедиться, что из условия $\sigma < \widehat{\sigma}$ вытекает, что $B > 0$. Остается заметить, что $\mathcal{L}(\widehat{\mu}, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Тем самым задача (12) решена при всех $\sigma > 0$. И, кроме того, доказано, что ее значение для всех $\sigma > 0$ совпадает со значением задачи (14).

Аппроксимируя (стандартным образом) меру, сосредоточенную в точке, δ-образной последовательностью, получаем, что значения задач (11) и задачи

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2k} u(\tau)\, d\tau \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} (\widehat{\lambda}_1\tau^{2r} + 2\pi\widehat{\lambda}_2\chi_\sigma(\tau) u(\tau)\, d\tau \leq \widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2, \\ u(\cdot) \in L_1(\mathbb{R}), \quad u(\tau) \geq 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{R},$$

совпадают и равны тому же выражению $\widehat{\lambda}_1\delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2\delta_2^2$.

Для построения оптимальных методов восстановления рассмотрим экстремальную задачу

$$\widehat{\lambda}_1 \|x^{(r)}(\cdot) - y_1(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \widehat{\lambda}_2 \|Fx(\cdot) - y_2(\cdot)\|^2_{L_2(\Delta_\sigma)} \to \min.$$

Переходя к преобразованию Фурье и используя теорему Планшереля, получаем

$$\frac{\widehat{\lambda}_1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |(i\tau)^r Fx(\tau) - Fy_1(\tau)|^2 + \widehat{\lambda}_2 \int_{\Delta_\sigma} |Fx(\tau) - y_2(\tau)|^2\, d\tau \to \min.$$

Нетрудно проверить, что решением этой задачи является функция $x_0(\cdot)$, преобразование Фурье которой имеет вид

$$Fx_0(\tau) = \begin{cases} \dfrac{\widehat{\lambda}_1(-i\tau)^r Fy_1(\tau) + 2\pi\widehat{\lambda}_2 y_2(\tau)}{\widehat{\lambda}_1\tau^{2r} + 2\pi\widehat{\lambda}_2}, & \tau \in \Delta_\sigma, \\ (i\tau)^{-r} Fy_1(\tau), & \tau \notin \Delta_\sigma. \end{cases}$$

Из теоремы 3, положив $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = \delta$ и $y_1 = 0$, получаем, что метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\sigma} (i\tau)^k \left(1 + \frac{\tau^{2r}\widehat{\lambda}_1}{2\pi\widehat{\lambda}_2}\right)^{-1} y(\tau)e^{it\tau}\,d\tau$$

является оптимальным. Для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 + \widehat{\lambda}_2\delta^2}.$$

Если $\sigma \ge \widehat{\sigma}$, то

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{k}{r}\left(\frac{\delta^2}{2\pi}\right)^{1-k/r}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi}\frac{r-k}{r}\left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{k/r}.$$

Следовательно, в этом случае

$$E_\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \left(\frac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}$$

и метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \int_{-\sigma}^{\sigma} (i\tau)^k \left(1 + \frac{\delta^2}{2\pi}\frac{k}{r-k}\tau^{2r}\right)^{-1} y(\tau)e^{it\tau}\,d\tau$$

является оптимальным.

Покажем, что при $\sigma \ge \widehat{\sigma}$ метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} (i\tau)^k \left(1 + \frac{\delta^2}{2\pi}\frac{k}{r-k}\tau^{2r}\right)^{-1} y(\tau)e^{it\tau}\,d\tau$$

— также оптимальный. Прежде всего отметим, что для всех $\sigma > \widehat{\sigma}$

$$E_2^\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = E_2^{\widehat{\sigma}}(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta).$$

Поскольку $L_2(\Delta_\sigma) \subset L_2(\Delta_{\widehat{\sigma}})$ и для всех $y(\cdot) \in L_2(\Delta_\sigma)$ таких, что $\|Fx(\cdot) - y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)} \le \delta$, аналогичное неравенство выполнено в метрике $L_2(\Delta_{\widehat{\sigma}})$, то

$$\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(\Delta_\sigma) \\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le$$

$$\le \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{R}),\ y(\cdot)\in L_2(\Delta_{\widehat{\sigma}}) \\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_2(\Delta_{\widehat{\sigma}})}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot) - \widehat{m}(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= E_2^{\widehat{\sigma}}(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = E_2^\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta).$$

Это и означает, что $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Рассмотрим теперь случай, когда $k = 0$. Тогда расширенная двойственная экстремальная задача имеет вид

$$\mathcal{L}(\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \int_{\Delta_\sigma} (-1 + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r} + 2\pi\widehat{\lambda}_2)\, d\mu(\tau) + \\ + \int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma} (-1 + \widehat{\lambda}_1 \tau^{2r})\, d\mu(\tau).$$

Положим

$$\widehat{\lambda}_1 = \frac{1}{\sigma^{2r}}, \quad \widehat{\lambda}_2 = \frac{1}{2\pi}.$$

Для всех $\mu(\cdot)$ справедливо неравенство

$$\mathcal{L}(\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \widehat{\lambda}_1 \int_{\Delta_\sigma} \tau^{2r}\, d\mu(\tau) + \int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma} \left(-1 + \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{2r}\right) d\mu(\tau) \geq 0.$$

Для

$$d\widehat{\mu}(t) = \frac{\delta^2}{2\pi}\delta(t) + \frac{1}{\sigma^{2r}}\delta(t - \sigma)$$

выполняются условия

$$\int_{\mathbb{R}} \tau^{2r}\, d\widehat{\mu}(\tau) = 1, \quad 2\pi \int_{\Delta_\sigma} d\widehat{\mu}(\tau) = \delta^2,$$

а кроме того, $\mathcal{L}(\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = 0$. Аналогично рассуждениям проведенным выше, получаем, что

$$E_\sigma(D^0, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi} + \frac{1}{\sigma^{2r}}}, \tag{16}$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} \left(1 + \left(\frac{\tau}{\sigma}\right)^{2r}\right)^{-1} y(\tau) e^{i\tau t}\, d\tau \tag{17}$$

является оптимальным.

Тем самым доказана

Теорема 4. *Пусть $r \in \mathbb{N}$, $0 < k < r$, $0 < \sigma \leq \infty$, $\delta > 0$ и*

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}} \left(\frac{2\pi}{\delta^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Тогда

$$E_2^\sigma(D^k, W_2^r(\mathbb{R}), \delta) = \begin{cases} \sigma^k \sqrt{\dfrac{r-k}{2\pi r} \left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}} \delta^2 + \dfrac{1}{\sigma^{2r}}}, & \sigma < \widehat{\sigma}, \\ \left(\dfrac{\delta}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}, & \sigma \geq \widehat{\sigma}, \end{cases}$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma_0}^{\sigma_0}(i\tau)^k\left(1+\frac{r}{r-k}\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r-k}}\left(\frac{\tau}{\sigma_0}\right)^{2r}\right)^{-1} y(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau,$$

где $\sigma_0 = \min(\sigma,\widehat{\sigma})$, *является оптимальным.*

Если $k=0$ *и* $0<\sigma<\infty$, *то формулы* (16) *и* (17) *дают погрешность оптимального восстановления и оптимальный метод.*

Из теоремы 4 вытекает, что, начиная с $\widehat{\sigma}$, дальнейшее увеличение интервала, на котором преобразование Фурье функции из $W_2^r(\mathbb{R})$ задано с погрешностью δ в метрике $L_2(\Delta_\sigma)$, не приводит к уменьшению погрешности восстановления. Иными словами, при нарушении соотношения

$$\delta^2\sigma^{2r} \le 2\pi\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{r}{r-k}} \tag{18}$$

между погрешностью задания исходных данных и размером интервала, на котором эти данные измеряются, доступная информация оказывается излишней. Соотношение (18) может рассматриваться как своего рода *"принцип неопределенности"*.

Предположим теперь, что имеется возможность приближенно измерять не только преобразование Фурье функции, но и ее r-ую производную. Тогда погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E_\sigma(D^k,\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}),\delta_1,\delta_2) = \\ = \inf_m \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}),\ y_1(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}),\ y_2(\cdot)\in L_2(\Delta_\sigma)\\ \|x^{(r)}(\cdot)-y_1(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_1\\ \|Fx(\cdot)-y_2(\cdot)\|_{L_2(\Delta_\sigma)}\le\delta_2}} \|x^{(k)}(\cdot)-m(y_1,y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon L_2(\mathbb{R})\times L_2(\Delta_\sigma)\to L_2(\mathbb{R})$.

Аналогично теореме 4 доказывается следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* $r\in\mathbb{N}$, $0<k<r$, $0<\sigma\le\infty$, $\delta_1,\delta_2>0$ *и*

$$\widehat{\sigma} = \left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{1}{2(r-k)}}\left(\frac{2\pi\delta_1^2}{\delta_2^2}\right)^{\frac{1}{2r}}.$$

Тогда

$$E_\sigma(D^k,\mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}),\delta_1,\delta_2) = \begin{cases} \sigma^k\sqrt{\dfrac{r-k}{2\pi r}\left(\dfrac{k}{r}\right)^{\frac{k}{r-k}}\delta_2^2+\dfrac{\delta_1^2}{\sigma^{2r}}}, & \sigma<\widehat{\sigma},\\ \delta_1^{k/r}\left(\dfrac{\delta_2}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}, & \sigma\ge\widehat{\sigma},\end{cases}$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\sigma}(i\tau)^k\frac{y_2(\tau)+\gamma(-i\tau)^rFy_1(\tau)}{1+\gamma\tau^{2r}}e^{i\tau t}\,d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma}(i\tau)^{k-r}Fy_1(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau,$$

где

$$\gamma = \frac{r}{r-k}\left(\frac{r}{k}\right)^{\frac{k}{r-k}}\frac{1}{\sigma_0^{2r}}$$

и $\sigma_0 = \min(\sigma, \widehat{\sigma})$, *является оптимальным.*

Если $k = 0$ *и* $0 < \sigma < \infty$, *то для погрешность оптимального восстановления справедливо равенство*

$$E_\sigma(D^0, \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R}), \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\frac{\delta_2^2}{2\pi} + \frac{\delta_1^2}{\sigma^{2r}}},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{\Delta_\sigma}\frac{y_2(\tau)+\sigma^{-2r}(-i\tau)^rFy_1(\tau)}{1+\sigma^{-2r}\tau^{2r}}e^{i\tau t}\,d\tau \\ + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}\setminus\Delta_\sigma}(i\tau)^{-r}Fy_1(\tau)e^{i\tau t}\,d\tau$$

является оптимальным.

Из решения двойственной задачи (10) вытекает равенство

$$\sup_{\substack{\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_1 \\ \|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_2}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} = \delta_1^{k/r}\left(\frac{\delta_2}{\sqrt{2\pi}}\right)^{1-k/r}.$$

Тем самым для любой функции $x(\cdot) \in \mathcal{W}_2^r(\mathbb{R})$ имеет место неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{r-k}{2r}}\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-k/r}\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{k/r}. \tag{19}$$

Это неравенство является точным в том смысле, что константу $(2\pi)^{-(r-k)/(2r)}$ нельзя заменить меньшей.

В силу равенства Парсеваля

$$\|Fx(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2 = 2\pi\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^2$$

из (19) следует известное неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \le \|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{1-k/r}\|x^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}^{k/r}. \tag{20}$$

Это неравенство — один из представителей большой серии так называемых неравенств для производных типа Ландау–Колмогорова.

5. Неравенства для производных типа Ландау–Колмогорова и оптимальное восстановление

Точные неравенства для производных привлекали внимание многих известных математиков. Первый результат в этом направлении был получен Э. Ландау в 1913 г. Он доказал, что для всех функций $x(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$, у которых первая производная локально абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}_+$ и $\ddot{x}(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}_+)$ справедливо следующее точное неравенство

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \le 2\|x(\cdot)\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}\|\ddot{x}(\cdot)\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R}_+)}.$$

Затем в 1914 г. Адамар доказал аналогичный результат на прямой:

$$\|\dot{x}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \sqrt{2}\|x(\cdot)\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R})}\|\ddot{x}(\cdot)\|^{1/2}_{L_\infty(\mathbb{R})}.$$

Первый общий результат (т. е. точное неравенство, в котором участвуют производные любых порядков) был получен Харди, Литтлвудом и Полиа в 1934 г. (неравенство (20)). Одним из наиболее ярких результатов в этой проблематике безусловно является точное неравенство, доказанное Колмогоровым в 1939 г.:

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R})} \le \frac{K_{n-k}}{K_n^{1-\frac{k}{n}}}\|x(\cdot)\|^{1-k/r}_{L_\infty(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{k/n}_{L_\infty(\mathbb{R})},$$

где

$$0 < k < n, \quad K_m = \frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^{j(m+1)}}{(2j+1)^{m+1}}, \quad m \ge 1.$$

Подробнее о неравенствах для производных указанного типа см. в [14].

Обозначим через $\mathcal{W}^n_r(T)$ множество функций $x(\cdot)$, у которых $(n-1)$-ая производная локально абсолютно непрерывна на $T = \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}_+$, а $x^{(n)}(\cdot) \in L_r(T)$. Общая задача о точном неравенстве для производных типа Ландау–Колмогорова может быть сформулирована следующим образом: найти наименьшую константу $K = K(k,n,p,q,r)$ такую, что для всех функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_r(T) \cap L_p(T)$ выполнено неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \le K\|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)}, \tag{21}$$

где $0 \le k < n$, $1 \le p,q,r \le \infty$ и $\alpha \ge 0$, $\beta \ge 0$.

Константы α и β выражаются через остальные параметры. Действительно, пусть для некоторого K и всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_r(T) \cap L_p(T)$ выполняется неравенство (21). Фиксируем $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_r(T) \cap L_q(T)$, $x(\cdot) \ne 0$. Рассмотрим функцию $\lambda x(\cdot)$, где $\lambda > 0$. Подставляя ее в (21), получаем

$$\lambda\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \le \lambda^{\alpha+\beta}K\|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)}.$$

Так как это неравенство должно быть выполнено для всех $\lambda > 0$, то $\alpha + \beta = 1$.

Рассмотрим теперь функцию $t \mapsto x(\lambda t)$, $\lambda > 0$. Элементарно проверяется, что для любых $m \geq 0$ и $1 \leq s \leq \infty$ справедливо равенство

$$\|x^{(m)}(\lambda \cdot)\|_{L_s(T)} = \lambda^{m-1/s} \|x(\cdot)\|_{L_s(T)}.$$

Подставляя эту функцию в неравенство (21), получаем

$$\lambda^{k-1/q} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \lambda^{-(1-\beta)/p} \|x(\cdot)\|^{1-\beta}_{L_p(T)} \lambda^{(n-1/r)\beta} \|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)}.$$

Следовательно,

$$k - 1/q = -(1-\beta)/p + (n-1/r)\beta$$

и тем самым

$$\alpha = \frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p-1/r}, \quad \beta = \frac{k+1/p-1/q}{r+1/p-1/r}.$$

Таким образом, если выполняется неравенство (21) для некоторого K и всех $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_r(T) \cap L_p(T)$ то оно имеет вид

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leq K \|x(\cdot)\|^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p-1/r}}_{L_p(T)} \|x^{(n)}(\cdot)\|^{\frac{k+1/p-1/q}{n+1/p-1/r}}_{L_r(T)}. \tag{22}$$

Предложение 2. *Если K — точная константа в неравенстве* (22)*, то для всех $\delta > 0$*

$$\sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq \delta \\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} = K \delta^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p-1/r}}.$$

Доказательство. Так как K — точная константа в неравенстве (22), то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $x_\varepsilon(\cdot) \in \mathcal{W}^n_r(T) \cap L_p(T)$, $x_\varepsilon(\cdot) \neq 0$, такая, что

$$\|x^{(k)}_\varepsilon(\cdot)\|_{L_q(T)} \geq (K-\varepsilon) \|x_\varepsilon(\cdot)\|^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p-1/r}}_{L_p(T)} \|x^{(n)}_\varepsilon(\cdot)\|^{\frac{k+1/p-1/q}{n+1/p-1/r}}_{L_r(T)}.$$

Для функции $f_\varepsilon(t) = A x_\varepsilon(\lambda t)$, где $A > 0$, $\lambda > 0$, имеем

$$\|f^{(n)}_\varepsilon(\cdot)\|_{L_r(T)} = A \lambda^{n-1/r} \|x^{(n)}_\varepsilon(\cdot)\|_{L_r(T)}, \ \|f_\varepsilon(\cdot)\|_{L_p(T)} = \\ = A \lambda^{-1/p} \|x_\varepsilon(\cdot)\|_{L_p(T)}.$$

Положив

$$\lambda = \left(\frac{\|x_\varepsilon(\cdot)\|_{L_p(T)}}{\delta \|x^{(n)}_\varepsilon(\cdot)\|_{L_r(T)}} \right)^{\frac{1}{n+1/p-1/r}}, \quad A = \frac{1}{\lambda^{n-1/r} \|x^{(n)}_\varepsilon(\cdot)\|_{L_r(T)}},$$

получаем

$$\|f^{(n)}_\varepsilon(\cdot)\|_{L_r(T)} = 1, \quad \|f_\varepsilon(\cdot)\|_{L_p(T)} = \delta.$$

Следовательно,

$$\sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leq \delta \\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leq 1}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \geq \|f^{(k)}_\varepsilon(\cdot)\|_{L_q(T)} \geq (K-\varepsilon) \delta^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p-1/r}}.$$

В силу произвольности ε отсюда следует, что

$$\sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}\le\delta\\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}\le 1}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \ge K\delta^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p-1/r}}.$$

Противоположное неравенство сразу следует из (22) и тем самым предложение доказано. □

В частности,

$$K = \sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}\le 1\\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}\le 1}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}.$$

Далее мы рассмотрим связь неравенств для производных типа Ландау–Колмогорова с задачами оптимального восстановления. Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении функции $x^{(k)}(\cdot)$, $x(\cdot)\in W_r^n(T)\cap L_p(T)$, $0\le k<n$, в метрике $L_q(T)$ по неточной информации об $x(\cdot)$, где $W_r^n(T)$ — множество функций из $\mathcal{W}_r^n(T)$, для которых $\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)}\le 1$. Будем предполагать, что для каждого $x(\cdot)\in W_r^n(T)\cap L_p(T)$ нам известна функция $y(\cdot)\in L_p(T)$ такая, что $\|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(T)}\le\delta$. Зная $y(\cdot)$, мы хотим восстановить $x^{(k)}(\cdot)$ наилучшим образом. Погрешность оптимального восстановления в этом случае определяется следующим образом

$$E_p^*(D^k, W_r^n(T)\cap L_p(T),\delta) \\ = \inf_{m\colon L_p(T)\to L_q(T)} \sup_{x(\cdot)\in W_r^n(T)\cap L_p(T)} \sup_{\substack{y(\cdot)\in L_p(T)\\ \|x(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(T)}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)-m(y)(\cdot)\|_{L_q(T)}.$$

Аналогично (8) нетрудно показать, что

$$E_p^*(D^k, W_r^n(T)\cap L_p(T),\delta) \ge \sup_{\substack{\|x(\cdot)\|_{L_p(T)}\le\delta\\ \|x^{(n)}\|_{L_r(T)}\le 1}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)}.$$

Тем самым получен следующий результат.

Теорема 6. *Если K — точная константа в неравенстве* (22), *то для всех $\delta>0$*

$$E_p^*(D^k, W_r^n(T)\cap L_p(T),\delta) \ge K\delta^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p-1/r}}.$$

6. Неравенства для производных, содержащие преобразование Фурье

В (19) получено точное неравенство, оценивающее k-ую производную функции через ее n-ую производную и ее преобразование Фурье. Рассмотрим следующую общую задачу. Пусть $\mathcal{F}_{rp}^n$ — пространство функций $x(\cdot)\in\mathcal{W}_r^n(\mathbb{R})$, для которых $Fx(\cdot)\in L_p(\mathbb{R})$. Требуется найти такую минимальную константу $K_F = K_F(k,n,p,q,r)$, что для всех функций $x(\cdot)\in\mathcal{F}^n_{rp}$ выполнялось бы неравенство

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}\le K_F\|Fx(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(\mathbb{R})}, \tag{23}$$

где $0\le k<n$, $1\le p,q,r\le\infty$.

В силу тех же соображений, которые приводились выше, $\alpha+\beta=1$. Рассматривая функцию $x_\lambda(t)=x(\lambda t)$, $t\in\mathbb{R}$, $\lambda>0$, легко проверить, что

$$Fx_\lambda(t)=\int_{\mathbb{R}}x(\lambda\tau)e^{-i\tau t}\,d\tau=\frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}x(u)e^{-iut/\lambda}\,du=\frac{1}{\lambda}Fx\left(\frac{t}{\lambda}\right).$$

Подставляя эту функцию в неравенство (23), получаем

$$\lambda^{k-1/q}\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}\le K_F\lambda^{-(1-\beta)(p-1)/p}\|Fx(\cdot)\|^{1-\beta}_{L_p(\mathbb{R})}\lambda^{(n-1/r)\beta}\|x^{(n)}\|^{\beta}_{L_r(\mathbb{R})}.$$

Таким образом,

$$k-1/q=-(1-\beta)(p-1)/p+(n-1/r)\beta.$$

Следовательно,

$$\alpha=\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p'-1/r},\quad \beta=\frac{k+1/p'-1/q}{n+1/p'-1/r},$$

где p' — сопряженный показатель к p, т. е.

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

Итак, что если существует постоянная K_F такая, что для всех $x(\cdot)\in\mathcal{F}^n_{rp}$ выполняется неравенство (23), то оно должно иметь вид

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}\le K_F\|Fx(\cdot)\|^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p'-1/r}}_{L_p(\mathbb{R})}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\frac{k+1/p'-1/q}{n+1/p'-1/r}}_{L_r(\mathbb{R})}. \tag{24}$$

Аналогично предложению 2 получаем

Предложение 3. *Если K_F — точная константа в неравенстве* (24)*, то для всех $\delta>0$*

$$\sup_{\substack{\|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}\le\delta\\ \|x^{(n)}\|_{L_r(\mathbb{R})}\le 1}}\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}=K_F\delta^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p'-1/r}}.$$

В частности,

$$K_F=\sup_{\substack{\|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}\le 1\\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R})}\le 1}}\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}$$

является точной константой в неравенстве (24).

Поставим теперь задачу об оптимальном восстановлении k-ой производной $x^{(k)}(\cdot)$ функции $x(\cdot)\in F^n_{rp}=\mathcal{F}^n_{rp}\cap W^n_r(\mathbb{R})$, $0\le k<n$, в метрике $L_q(T)$ по неточной информации о $Fx(\cdot)$. Будем предполагать, что для всех $x(\cdot)\in F^n_{rp}$ известна функция $y(\cdot)\in L_p(T)$ такая, что $\|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(T)}\le\delta$. Зная $y(\cdot)$, требуется восстановить $x^{(k)}(\cdot)$

оптимальным способом. В рассматриваемом случае погрешностью оптимального восстановления определяется следующим образом

$$E_p(D^k, F^n_{rp}, \delta) = \\ = \inf_{m\colon L_p(T)\to L_q(\mathbb{R})} \sup_{x(\cdot)\in F^n_{rp}} \sup_{\substack{y(\cdot)\in L_p(T)\\ \|Fx(\cdot)-y(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}\le\delta}} \|x^{(k)}(\cdot)-m(y)(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}.$$

Аналогично (8) получаем, что

$$E_p(D^k, F^n_{rp}, \delta) \ge \sup_{\substack{x(\cdot)\in\mathcal{F}^n_{rp}\\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}\le\delta\\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(\mathbb{R})}\le 1}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(\mathbb{R})}.$$

Аналогом теоремы 6 является

Теорема 7. *Если K_F — точная константа в неравенстве* (24), *то для всех $\delta > 0$*

$$E_p(D^k, F^n_{rp}, \delta) \ge K_F \delta^{\frac{n-k+1/q-1/r}{n+1/p'-1/r}}.$$

Так как в неравенстве (19) постоянная является точной, то

$$K_F(k,n,2,2,2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n-k}{2n}}.$$

Найдем теперь точную постоянную $K_F(k,n,2,p,2)$ для $2 < p < \infty$.

Теорема 8. *Пусть $n\in\mathbb{N}$, $0\le k<n$ и $2<p<\infty$. Тогда*

$$K_F(k,n,2,p,2) \\ = \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}} \left(\frac{\sqrt{k+1/2-1/p}\,B^{1/2-1/p}}{\sqrt{2\pi}(n-k)^{1-1/p}}\right)^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}},$$

где

$$B = B\left(\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}, 2\frac{1-1/p}{1-2/p}\right) \tag{25}$$

и

$$B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

— бета-функция Эйлера.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|Fx(\cdot)\|^2_{L_p(\mathbb{R})} \le 1, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le 1.$$

Переходя к образам Фурье, по теореме Планшереля, эту задачу можно записать в виде

$$(26)\quad \int_{\mathbb{R}} t^{2k}u(t)\,dt \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} u^{p/2}(t)\,dt \le \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2}, \quad \int_{\mathbb{R}} t^{2r}u(t)\,dt \le 1,\ u(t) \ge 0,$$

где $u(\cdot) = (2\pi)^{-1}|Fx(\cdot)|^2$. Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(u(\cdot), \lambda_1, \lambda_2) = \int_{\mathbb{R}} (-t^{2k}u(t) + \lambda_1 u^{p/2}(t) + \lambda_2 t^{2n}u(t))\,dt.$$

Из теоремы 2 вытекает, что если найдется допустимая в (26) функция $\widehat{u}(\cdot)$ и множители Лагранжа $\widehat{\lambda}_1 \ge 0, \widehat{\lambda}_2 \ge 0$ такие, что

$$(a)\quad \min_{u(t)\ge 0} \mathcal{L}(u(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2) = \mathcal{L}(\widehat{u}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2),$$

$$(b)\quad \widehat{\lambda}_1\left(\int_{\mathbb{R}} \widehat{u}(t)^{p/2}\,dt - \frac{1}{2\pi}\right) = 0,$$

$$(c)\quad \widehat{\lambda}_2\left(\int_{\mathbb{R}} t^{2n}\widehat{u}(t)\,dt - 1\right) = 0,$$

то $\widehat{u}(\cdot)$ — решение задачи (26).

Положим $\widehat{\lambda}_2 = \sigma^{-2(n-k)}$, где параметр $\sigma > 0$ определим позже. Так как для любых t и $\sigma \ge t$ функция

$$f(x) = -t^{2k}x + \widehat{\lambda}_1 x^{p/2} + \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}x$$

принимает свое минимальное значение в точке

$$\left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\left(t^{2k} - \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)\right)^{\frac{1}{p/2-1}},$$

то

$$-t^{2k}u(t) + \widehat{\lambda}_1 u^{p/2}(t) + \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}u(t) \ge -t^{2k}\widehat{u}(t) + \lambda_1 \widehat{u}^{p/2}(t) + \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\widehat{u}(t)$$

для всех $u(t) \ge 0$ и любого $\widehat{\lambda}_1 > 0$, где

$$\widehat{u}(t) = \begin{cases} \left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\left(t^{2k} - \frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)\right)^{\frac{1}{p/2-1}}, & |t| \le \sigma, \\ 0, & |t| > \sigma. \end{cases}$$

Тем самым условие (a) выполняется. Выберем σ и $\widehat{\lambda}_1$ так, чтобы выполнялись условия (b) и (c):

$$\mu^{p/2}\int_{-\sigma}^{\sigma}\left(t^{2k}-\frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}}\,dt=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2},$$

$$\mu\int_{-\sigma}^{\sigma}t^{2n}\left(t^{2k}-\frac{t^{2n}}{\sigma^{2(n-k)}}\right)^{\frac{1}{n/2-1}}\,dt=1,$$

где

$$\mu=\left(\frac{2}{p\widehat{\lambda}_1}\right)^{\frac{1}{p/2-1}}.$$

Делая замену переменных $t=\sigma y$, получаем

$$2\mu^{p/2}\sigma^{\frac{pk}{p/2-1}+1}\int_0^1 y^{\frac{pk}{p/2-1}}\left(1-y^{2(n-k)}\right)^{\frac{p/2}{p/2-1}}\,dy=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2},$$

$$2\mu\sigma^{\frac{2k}{p/2-1}+2n+1}\int_0^1 y^{\frac{2k+n(p-2)}{p/2-1}}\left(1-y^{2(n-k)}\right)^{\frac{1}{p/2-1}}\,dy=1.$$

Положив

$$y=\tau^{\frac{1}{2(n-k)}},$$

будем иметь

$$\mu^{p/2}\sigma^{\frac{pk}{p/2-1}+1}\frac{1}{n-k}\int_0^1\tau^{\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}-1}(1-\tau)^{\frac{p/2}{p/2-1}}\,d\tau=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2},$$

$$\mu\sigma^{\frac{2k}{p/2-1}+2n+1}\frac{1}{n-k}\int_0^1\tau^{\frac{k+1/2-1/p}{(n-k)(1-2/p)}}(1-\tau)^{\frac{1}{p/2-1}}\,d\tau=1.$$

Выражая полученные интегралы через бета-функцию B (см. (25)) и используя свойство

$$B(a+1,b)=\frac{a}{b}B(a,b+1),$$

получаем

$$\mu^{p/2}\sigma^{\frac{pk}{p/2-1}+1}\frac{B}{r-k}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{p/2},$$

$$\mu\sigma^{\frac{2k}{p/2-1}+2n+1}\frac{(k+1/2-1/p)B}{(n-k)^2}=1.$$

Отсюда

$$\mu=\frac{(n-k)^2}{(k+1/2-1/p)B}\sigma^{-\frac{2k}{p/2-1}-2n-1} \tag{27}$$

и

$$\sigma=\left(\frac{\sqrt{2\pi}(n-k)^{1-1/p}}{(k+1/2-1/p)^{1/2}B^{1/2-1/p}}\right)^{\frac{1}{n+1/2-1/p}}. \tag{28}$$

Учитывая (27), получаем

$$\int_{\mathbb{R}} t^{2k}\widehat{u}(t)\,dt = \frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}\sigma^{-2(n-k)}.$$

Подставляя значение σ из равенства (28), будем иметь, что для всех $2<p<\infty$

$$\sup_{\substack{x\in\mathcal{F}_{2p}^r\\ \|Fx(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R})}\le 1\\ \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le 1}} \|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} =$$

$$= \sqrt{\frac{n+1/2-1/p}{k+1/2-1/p}}\left(\frac{\sqrt{k+1/2-1/p}\,B^{1/2-1/p}}{\sqrt{2\pi}(n-k)^{1-1/p}}\right)^{\frac{n-k}{n+1/2-1/p}}.$$

Теперь доказываемое утверждение вытекает из предложения 3. $\square$

7. Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности

В этом параграфе рассмотрим задачу 2) из второго параграфа об оптимальном восстановлении в момент времени τ решения уравнения теплопроводности (1) на прямой с заданным начальным распределением температуры $u_0(\cdot)$ по неточным измерениям распределений температур в моменты времени $0\le t_1<\ldots<t_n$, заданным с погрешностями $\delta_1,\ldots,\delta_n$ в метрике $L_2(\mathbb{R})$. Здесь погрешностью оптимального восстановления имеет вид

$$E(\tau,L_2(\mathbb{R}),\delta)=\inf_m \sup_{\substack{u_0(\cdot),y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot)\in L_2(\mathbb{R})\\ \|u(t_j,\cdot)-y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})}\le\delta_j,\ j=1,\ldots,n}} \|u(\tau,\cdot)-m(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

где нижняя грань берется по всем методам $m\colon (L_2(\mathbb{R}))^n\to L_2(\mathbb{R})$, $y=(y_1(\cdot),\ldots,y_n(\cdot))$, а $\delta=(\delta_1,\ldots,\delta_n)$. Метод $\widehat{m}$, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным методом восстановления.

Положим

$$M=\operatorname{co}\{(t_j,\ln(1/\delta_j)),\ 1\le j\le n\}+\{(t,0)\mid t\ge 0\},$$

где $\operatorname{co}A$ — выпуклая оболочка множества A. Пусть функция $\theta(\cdot)$ на $[t_1,\infty)$ определена равенством: $\theta(t)=\max\{x\mid (t,x)\in M\}$. Ясно, что $\theta(\cdot)$ — ломаная на $[t_1,\infty)$. Пусть $t_{s_1}<\ldots<t_{s_k}$ — ее точки излома ($s_1=1$), которые, очевидно, являются подмножеством точек $\{t_1,\ldots,t_n\}$ (если $\theta(\cdot)$ — прямая, то считаем, что она имеет только один излом в точке t_1, т. е. $k=1$).

Теорема 9. *При всех $\tau>t_1$*

$$E(\tau,L_2(\mathbb{R}),\delta)=e^{-\theta(\tau)}.$$

Если $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ *для некоторого* $1 \le j \le k-1$, *то*

(29) $\widehat{m}(y)(\cdot) = u(\tau, \cdot; K(\cdot) * (\lambda_1 u(t_{s_j}, \cdot; y_{s_j}(\cdot)) + \lambda_2 u(t_{s_j+1}, \cdot; y_{s_j+1}(\cdot))))$,

— *оптимальный метод, где*

$$\lambda_1 = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{\frac{2(\tau - t_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}, \quad \lambda_2 = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}}\right)^{\frac{2(t_{s_j+1} - \tau)}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

и преобразование Фурье функции $K(\cdot)$ *(как обобщенной функции) имеет вид*

$$FK(\lambda) = \frac{1}{\lambda_1 e^{-2\lambda^2 t_{s_j}} + \lambda_2 e^{-2\lambda^2 t_{s_{j+1}}}}.$$

Если $\tau > t_{s_k}$, *то*

$$\widehat{m}(y)(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(\tau - t_{s_k})}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4(\tau - t_{s_k})}} y_{s_k}(\xi)\, d\xi$$

— *оптимальный метод.*

Доказательство. Рассмотрим двойственную задачу

$$(30) \qquad \|u(\tau, \cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \|u(t_j, \cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \delta_j^2, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Решение уравнения теплопроводности в образах Фурье имеет вид (см., например, [15])

$$Fu(t, \lambda) = e^{-\lambda^2 t} Fu_0(\lambda).$$

Переходя к образам Фурье, в силу теоремы Планшереля будем иметь

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 \tau} |Fu_0(\lambda)|^2\, d\lambda \to \max, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 t_j} |Fu_0(\lambda)|^2\, d\lambda \le \delta_j^2,$$
$$j = 1, \ldots, n, \quad u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Можно показать, что в этой задаче нет существования, поэтому будем рассматривать расширенную задачу

$$(31) \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 \tau}\, d\mu(\lambda) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 t_j}\, d\mu(\lambda) \le \delta_j^2, \ j = 1, \ldots, n,$$
$$d\mu(\lambda) \ge 0,$$

где $d\mu(\cdot)$ — мера на $\mathbb{R}$.

Положим

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_{\mathbb{R}} \left(-e^{-2\lambda^2 \tau} + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{-2\lambda^2 t_j}\right) d\mu(\lambda)$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 \tau} f(\lambda^2)\, d\mu(\lambda),$$

где

$$f(v) = -1 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e^{-2v(t_j - \tau)}.$$

Функция $f(\cdot)$ выпукла при любых $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Поэтому, если числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ и точка v_0 выбраны так, что $f(v_0) = f'(v_0) = 0$, то $f(v) \geq 0$ при всех $v \in \mathbb{R}$. Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}}]$ $1 \leq j \leq k-1$. Положим $d\widehat{\mu}(\lambda) = A\delta(\lambda - \lambda_0)$, где $\delta(\cdot)$ — дельта-функция в точке 0, а A и λ_0 выбраны из условий

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 t_k}\, d\widehat{\mu}(\lambda) = \delta_k^2, \quad k = s_j, s_{j+1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$A = \delta_{s_j}^{\frac{2t_{s_j+1}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

$$\lambda_0 = \left(\frac{\ln 1/\delta_{s_{j+1}} - \ln 1/\delta_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \right)^{1/2}.$$

Положим $\widehat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j, s_{j+1}$, а $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ выберем так, чтобы $f(\lambda_0^2) = f'(\lambda_0^2)) = 0$. Нетрудно убедиться, что

$$\widehat{\lambda}_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_{j+1}}}{\delta_{s_j}} \right)^{2\frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}},$$

$$\widehat{\lambda}_{s_{j+1}} = \frac{\tau - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}} \right)^{2\frac{t_{s_{j+1}} - \tau}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}}.$$

Тем самым, при всех $d\mu(\lambda) \geq 0$ будем иметь $\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n) \geq 0$, а $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n) = 0$. Проверим, что мера $d\widehat{\mu}(\lambda)$ допустима в (31). Имеем

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 t_k}\, d\widehat{\mu}(\lambda) = A e^{-2\lambda_0^2 t_k} = \delta_{s_j}^{2\frac{t_{s_{j+1}} - t_k}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{2\frac{t_k - t_{s_j}}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}} =$$
$$= e^{-2\theta_j(t_k)} \leq e^{-2\theta(t_k)} \leq \delta_k^2,$$

где $\theta_j(\cdot)$ — прямая, проходящая через точки $(t_{s_j}, \ln 1/\delta_{s_j})$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln 1/\delta_{s_{j+1}})$.

При $\tau > t_{s_k}$ положим

$$\widehat{\lambda}_{s_k} = 1, \quad \widehat{\lambda}_j = 0,\ j \neq s_k, \quad d\widehat{\mu}(\lambda) = \delta_{s_k}^2 \delta(\lambda).$$

Тогда

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \dots, \widehat{\lambda}_n) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 \tau} \left(-1 + e^{2\lambda^2(\tau - t_{s_k})} \right) d\mu(\lambda) \geq 0.$$

Кроме того, $\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_n) = 0$ и

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 t_j}\, d\widehat{\mu}(\lambda) = \delta_{s_k}^2.$$

Из построения ломанной $\theta(\cdot)$ вытекает, что $\delta_{s_k} \le \delta_j$ при всех $j = 1, \ldots, n$. Тем самым мера $d\widehat{\mu}(\lambda)$ допустима в задаче (31).

Из теоремы 2 вытекает, что значения задачи (31) и задачи

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 \tau}\, d\mu(\lambda) \to \max,$$
$$\sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \int_{\mathbb{R}} e^{-2\lambda^2 t_j}\, d\mu(\lambda) \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2, \quad d\mu(\lambda) \ge 0,$$

совпадают. Поскольку дельта-функции могут быть приближены сколь угодно точно δ-образными функциями, то решения задачи (30) и задачи

$$\|u(\tau,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \|u(t_j,\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \le \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^2,$$
$$u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}),$$

совпадают. Остается рассмотреть задачу (5), которая при $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ будет иметь вид

$$\widehat{\lambda}_{s_j} \|u(t_{s_j},\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \|u(t_{s_{j+1}},\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})} \to \min,$$
$$u_0(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}).$$

Переходя к образам Фурье, получаем ее решение в виде

$$F\widehat{u}_0(\lambda) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-\lambda^2 t_{s_j}} F y_{s_j}(\lambda) + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-\lambda^2 t_{s_{j+1}}} F y_{s_{j+1}}(\lambda)}{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-2\lambda^2 t_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2\lambda^2 t_{s_{j+1}}}}.$$

Данная функция принадлежит $L_2(\mathbb{R})$, если, например, функции $Fy_{s_j}(\cdot)$ и $Fy_{s_{j+1}}(\cdot)$ финитны. Поскольку такие функции плотны в $L_2(\mathbb{R})$, то нетрудно показать, что все рассмотрения достаточно проводить только для них. Более подробно на этом останавливаться не будем. Из теоремы 1 вытекает, что метод $\widehat{m}(y)(\cdot) = u(\tau, \cdot; \widehat{u}_0)$ является оптимальным. Нетрудно убедиться, что он может быть записан в виде (29). Случай $\tau > t_{s_k}$ рассматривается аналогично. $\square$

Из выражения для оптимального метода видно, что при $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$ из всего наблюдаемого набора функций $y_1(\cdot), \ldots, y_n(\cdot)$ используются только две (и выбор их зависит от величин погрешности δ_i). Далее происходит их некоторое усреднение и сглаживание (свертка с ядром $K(\cdot)$) и полученная таким образом функция воспринимается как первоначальное распределение температур.

Можно рассмотреть задачу, когда в некоторые из моментов времени $t_1, \ldots, t_n$ не производятся измерения температуры, а известны лишь некоторые априорные оценки ее величины. Используя теорему 3, в этом случае аналогично рассмотренной выше схеме строится оптимальный метод восстановления. При этом возможны следующие ситуации. Либо априорная информация оказывается ненужной, либо, если она полезна, то используется или только одно измерение, или ни одно из измерений не несет полезной информации. Более подробно об этом см. [17]. Там же можно найти детальное доказательство теоремы 9

8. Задача о трех сферах

Рассмотрим задачу об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле (см. задачу 3) из первого параграфа) на сфере радиуса r по неточно заданным ее решениям на сферах радиусов r_i, $i = 1, 2$, $r_1 < r < r_2 \le 1$. Здесь погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E(r, r_1, r_2, \delta_1, \delta_2) \\ = \inf_m \sup_{\substack{f(\cdot), y_1(\cdot), y_2(\cdot) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(\cdot)_{\big| |x|=r_i} - y_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \le \delta_i,\ i=1,2}} \|u(\cdot)_{\big| |x|=r} - m(y_1, y_2)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $m\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \times L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$.

Обозначим через H_k множество сферических гармоник порядка k. Известно (см., например, [16]), что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} H_k$ и $\dim H_0 = a_0 = 1$,

$$\dim H_k = a_k = (2k + d - 2)\frac{(k + d - 3)!}{(d-2)!\, k!}, \quad k = 1, 2, \ldots\ .$$

Выберем в H_k ортонормированный базис $\{Y_j^{(k)}(\cdot)\}_{j=1}^{a_k}$.

Из общей схемы построения оптимальных методов восстановления (теоремы 1 и 2) вытекает следующий результат ([18]).

Теорема 10. *Пусть* $0 < r_1 < r < r_2 < 1$, $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$. *Положим*

$$\begin{aligned} &\widehat{\lambda}_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{r_1}\right)^{2(s-1)} \dfrac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 0, & \delta_1 \ge \delta_2, \end{cases} \\ (32)\qquad &\widehat{\lambda}_2 = \begin{cases} \left(\dfrac{r}{r_2}\right)^{2(s-1)} \dfrac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, & \delta_1 < \delta_2, \\ 1 & \delta_1 \ge \delta_2, \end{cases} \end{aligned}$$

где s таково, что

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^s \le \frac{\delta_1}{\delta_2} < \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{s-1}, \ s = 1, 2, \dots .$$

Тогда

$$E(r, r_1, r_2, \delta_1, \delta_2) = \sqrt{\widehat{\lambda}_1 \delta_1^2 + \widehat{\lambda}_2 \delta_2^2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y_1, y_2)(x') = \sum_{k=0}^{\infty} r^k \sum_{j=0}^{a_k} \frac{\widehat{\lambda}_1 r_1^k y_{kj}^{(1)} + \widehat{\lambda}_2 r_2^k y_{kj}^{(2)}}{\widehat{\lambda}_1 r_1^{2k} + \widehat{\lambda}_2 r_2^{2k}} Y_j^{(k)}(x'),$$

где

$$y_{kj}^{(i)} = \int_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} y_i(x') Y_j^{(k)}(x')\, dx', \quad i = 1, 2,$$

является оптимальным.

Список литературы

[1] *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. … канд. физ.-мат. наук. — МГУ, М., 1965.

[2] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory.—New York: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.

[3] *Traub J. F., Woźniakowski H.* A General Theory of Optimal Algorithms.—New York: Acad. press, 1980.—341 p.

[4] *Micchelli C. A., Rivlin T. J.* Lectures on Optimal Recovery // Lecture Notes in Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93.

[5] *Арестов В. В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук.—1996.—Т. 51, №6.—С. 89–124.

[6] *Osipenko K. Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions.—Huntington, New York. Nova science publ., 2000.—220 p.

[7] *Melkman A. A., Micchelli C. A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—V. 16.—P. 87–105.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб.—1997.—Т. 188, №12—С. 73–106.

[9] *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения.—М.: Эдиториал УРСС, 2003 (2-ое изд).—176 с.

[10] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* Оптимальное восстановление и теория экстремума // Докл. РАН.—2001.—Т. 379, №2.—С. 161–164.

[11] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб.—2002.—Т. 193, №3.—С. 79–100.

[12] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его приложения.—2003.—Т. 137, вып. 3.—С. 51-64.

[13] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье // Матем. сб.—2004.—Т. 195, №10.—С. 67–82.

[14] *Тихомиров В. М., Магарил-Ильяев Г. Г.* Неравенства для производных // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Т. 1. Математика и механика.—М.:Наука, 2005.—С. 428–431.

[15] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1972.—544 с.

[16] Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М: Мир, 1974.—165 с.

[17] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб.—2009.—Т. 200 (в печати).

[18] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Матем. заметки.—2007.—Т. 82, №3.—С. 323-–334.

Московский государственный институт радиотехники, электроники и автоматики (технический университет)
E-mail address: `magaril@mirea.ru`

“МАТИ” — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского
E-mail address: `kosipenko@yahoo.com`