Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

Кафедра общих проблем управления

Дипломная работа

Одновременное восстановление производных на классах, задаваемых дифференциальными полиномами

Есипов Сергей Васильевич
532 группа

Научный руководитель
д.ф.-м.н. проф. К.Ю. Осипенко

Москва 2012

1 Введение

Классическая теория аппроксимации берет свое начало с работ П.Л. Чебышева второй половины XIX века. При построении численного метода обычно используются те или иные идеи, а затем полученный алгоритм исследуется на сходимость, устойчивость по отношению к неточным данным и т.д. В шестидесятых годах XX века возникла новая постановка - задача об оптимальном восстановлении линейного функционала или оператора на классе элементов по неточной или неполной информации. Класс обычно связывают со свойством гладкости или аналитичности входящих в них функций, а информация состоит в том, что оказывается доступными некоторые характеристики функции (например, ее значения в отдельных точках, моменты, коэффициенты Фурье или Тейлора, преобразование Фурье и т.п.). По этим двум типам информации и производится оценка неопределенности значения функционала или оператора и строится метод его восстановления. Оказалось, что многие задачи теории приближений могут быть интерпретированы как задачи оптимального восстановления.

2 Постановка задачи

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $L_2(\mathbb{T})$ обозначим совокупность функций $x(\cdot)$ на $\mathbb{T}$, суммируемых с квадратом, с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Класс $W_n^Q(\mathbb{T})$ — это совокупность 2π-периодических функций $x(\cdot)$, у которых первые $n-1$ производные абсолютно непрерывны и выполняется условие

$$\|Q(D)x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 1, \quad Q(D) = c_n D^n + \ldots + c_1 D + c_0, \quad D = \frac{d}{dt}, \quad c_n = 1.$$

На этом классе рассмотрим задачу восстановления функции $x(\cdot)$ и ее первых $n-1$ производных в метрике $L_2(\mathbb{T})$ по конечному набору ее коэффициентов Фурье

$$x_j = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x(t)e^{-ijt}dt,$$

заданных с погрешностью. Точнее говоря, будем предполагать, что для каждой функции $x(\cdot) \in W_n^Q(\mathbb{T})$ нам известны числа y_j, $|j| \leqslant N$, такие, что

$$|x_j - y_j| \leqslant \delta, \ |j| \leqslant N, \ \delta > 0. \tag{1}$$

Здесь информационным оператором является многозначное отображение F_δ^N, ставящее в соответствие каждой функции $x(\cdot) \in W_n^Q(\mathbb{T})$ множество $F_\delta^N x(\cdot) = \{y_j\}_{|j| \leqslant N}$, где y_j удовлетворяют условию (1). Задача заключается в нахождении величины

$$E_N(\alpha, W_n^Q(\mathbb{T}), \delta) =$$

$$= \inf_{m\colon \mathbb{C}^{2N+1}\to (L_2(\mathbb{T}))^n} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_n^Q(\mathbb{T})\\ y\in F_\delta^N x(\cdot)}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}$$

и соответствующего оптимального метода, то есть метода на котором достигается нижняя грань. Здесь $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ неотрицательные весовые коэффициенты, выбирая которые можно отдавать предпочтение либо более точному восстановлению самой функции, либо ее производной, а $m(y) = (m_0(y), \ldots, m_{n-1}(y))$.

3 Результат

Положим $\mu_j = \sum\limits_{k=0}^{n-1} \alpha_k j^{2k}$, $\nu_j = \left|\sum\limits_{k=0}^{n} c_k (ij)^k\right|^2$, $B = \{j \geqslant 0 : \nu_j = 0\}$. Кроме того, упорядочим отношения $\frac{\mu_j}{\nu_j}$, $|j| \leqslant N$, следующим образом

$$\frac{\mu_{j_0}}{\nu_{j_0}} \geqslant \frac{\mu_{j_1}}{\nu_{j_1}} = \frac{\mu_{-j_1}}{\nu_{-j_1}} \geqslant \ldots \geqslant \frac{\mu_{j_N}}{\nu_{j_N}} = \frac{\mu_{-j_N}}{\nu_{-j_N}}.$$

предполагая, что $\frac{\mu_k}{\nu_k} = +\infty$, $k \in B$, и положив $j_r = r$ при $r > N$.

Теорема. Если $\forall |k| > N$: $k \notin B$, то погрешность оптимального восстановления

$$E_N(\alpha, W_n^Q(\mathbb{T}), \delta) = \sqrt{\hat{\lambda} + \delta^2 \sum_{|r|\leqslant N} \hat{\lambda}_{j_r}}.$$

Методы

$$m_k(y)(t) = \sum_{|r|\leqslant N} (ij_r)^k a_{j_r} y_{j_r} e^{ij_r t}$$

являются оптимальными, где

$$a_{j_r} = \begin{cases} 1, & |j_r| \in B, \\ \frac{\hat{\lambda}_{j_r}}{\hat{\lambda}_{j_r} + \nu_{j_r}\hat{\lambda}}, & |j_r| \notin B \text{ и } |r| \leqslant p_0, \\ 0, & |r| > p_0, \end{cases}$$

$$\frac{\mu_q}{\nu_q} = \max_{j>N} \frac{\mu_j}{\nu_j},$$

$$p_0 = \begin{cases} \max\left\{0 \leqslant p \leqslant N : \delta^2 \sum\limits_{|r|\leqslant p} \nu_{j_r} < 1, \frac{\mu_{j_p}}{\nu_{j_p}} > \frac{\mu_q}{\nu_q}\right\}, & \delta^2 \nu_{j_0} < 1 \text{ и } \frac{\mu_{j_0}}{\nu_{j_0}} > \frac{\mu_q}{\nu_q}, \\ -1, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$q_0 = \begin{cases} q, & \frac{\mu_q}{\nu_q} \geqslant \frac{\mu_{j_{p_0+1}}}{\nu_{j_{p_0+1}}}, \\ p_0 + 1, & \frac{\mu_q}{\nu_q} < \frac{\mu_{j_{p_0+1}}}{\nu_{j_{p_0+1}}}. \end{cases}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}, \qquad \hat{\lambda}_{j_r} = \begin{cases} \mu_{j_r} - \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}\nu_{j_r}, & |r| \leqslant p_0, \\ 0, & p_0 + 1 \leqslant |r| \leqslant N. \end{cases}$$

Доказательство:
Для величины

$$e(\alpha, W_n^Q(\mathbb{T}), F_\delta^N, m(y)) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_n^Q(\mathbb{T})\\ y\in F_\delta^N x(\cdot)}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}$$

получим оценку снизу

$$2\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0) - (-x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0))\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \| - x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant$$

$$\leqslant 2\sum_{k=0}^{n-1} \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_n^Q(\mathbb{T})\\ |x_j|\leqslant\delta,\ |j|\leqslant N}} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot) - m_k(y)(0)\|^2_{L_2(\mathbb{T})} \leqslant 2e(\alpha, W_2^n(\mathbb{T}), F_\delta^N, m(y)).$$

Неравенство верно для любого метода $m = (m_0, \ldots, m_{n-1})$, а значит

$$E_N(\alpha, W_n^Q(\mathbb{T}), \delta) \geqslant \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_n^Q(\mathbb{T})\\ |x_j|\leqslant\delta,\ |j|\leqslant N}} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \|x^{(k)}(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{T})}}.$$

Преобразуя правую часть при помощи равенства Парсеваля и возведения в квадрат, переходим к экстремальной задаче

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j u_j \to max,\ \sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_j u_j \leqslant 1,\ 0 \leqslant u_j \leqslant \delta^2, |j| \leqslant N, \tag{2}$$

где $u_j = |x_j|^2, j \in \mathbb{Z}$.

Если $\exists k \in B$, где $k \in \mathbb{N}$ и $|k| > N$, тогда положив значение u_k сколь угодно большим, решение задачи будет $+\infty$.

Будем считать что $\forall |k| > N$: $k \notin B$. Для нахождения решения задачи (2) достаточно найти такие $\hat{\lambda} \geqslant 0, \hat{\lambda}_j \geqslant 0, |j| \leqslant N$, и допустимую последовательность $\{\hat{u}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых при всех $u_j \geqslant 0, j \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-\mu_j + \hat{\lambda}\nu_j + \chi_j) u_j \geqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} (-\mu_j + \hat{\lambda}\nu_j + \chi_j)\hat{u}_j \tag{3}$$

и

$$\hat{\lambda}\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \nu_j \hat{u}_j - 1\right) = 0,\quad \hat{\lambda}_j(\hat{u}_j - \delta^2) = 0, |j| \leqslant N, \tag{4}$$

где $\chi_j = \hat{\lambda}_j$, если $|j| \leqslant N$, и нулю в остальных случаях.

Справедливы следующие выражения

$$\lim_{j\to\infty} \nu_j = \infty, \qquad \lim_{j\to\infty} \frac{\mu_j}{\nu_j} = 0.$$

Положим

$$\frac{\mu_q}{\nu_q} = \max_{j>N} \frac{\mu_j}{\nu_j},$$

$$p_0 = \begin{cases} \max\left\{0 \leqslant p \leqslant N : \delta^2 \sum\limits_{|r|\leqslant p} \nu_{j_r} < 1, \frac{\mu_{j_p}}{\nu_{j_p}} > \frac{\mu_q}{\nu_q}\right\}, & \delta^2\nu_{j_0} < 1 \text{ и } \frac{\mu_{j_0}}{\nu_{j_0}} > \frac{\mu_q}{\nu_q}, \\ -1, & \text{иначе}, \end{cases}$$

$$q_0 = \begin{cases} q, & \frac{\mu_q}{\nu_q} \geqslant \frac{\mu_{j_{p_0+1}}}{\nu_{j_{p_0+1}}}, \\ p_0+1, & \frac{\mu_q}{\nu_q} < \frac{\mu_{j_{p_0+1}}}{\nu_{j_{p_0+1}}}. \end{cases}$$

Тогда, если $p_0 > -1$, положим

$$\hat{\lambda} = \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}},$$

$$\hat{\lambda}_{j_r} = \begin{cases} \mu_{j_r} - \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}\nu_{j_r}, & |r| \leqslant p_0, \\ 0, & p_0+1 \leqslant |r| \leqslant N, \end{cases}$$

$$\hat{u}_{j_r} = \begin{cases} \delta^2, & |r| \leqslant p_0, \\ \frac{1-\delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0}\nu_{j_k}}{2\nu_{j_{q_0}}}, & |r| = q_0, \\ 0, & |r| > p_0, |r| \neq q_0. \end{cases}$$

$\hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}_j$ и $\hat{u}_j$ неотрицательны, в силу выбора p_0 и q_0. Убедимся в выполнении условия (3)

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-\mu_j + \hat{\lambda}\nu_j + \chi_j)u_j =$$

$$= \sum_{|r|\leqslant p_0} \left(-\mu_{j_r} + \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}\nu_{j_r} + \mu_{j_r} - \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}\nu_{j_r}\right) u_{j_r} + \sum_{|r|>p_0} \left(-\mu_{j_r} + \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}\nu_{j_r}\right) u_{j_r} =$$

$$= \sum_{|r|>p_0} \left(-\mu_{j_r} + \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}\nu_{j_r}\right) u_{j_r} \geqslant 0, \qquad \text{так как} \quad \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}} \geqslant \frac{\mu_{j_r}}{\nu_{j_r}}, \quad |r| > p_0.$$

При этом

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} (-\mu_j + \hat{\lambda}\nu_j + \chi_j)\hat{u}_j = \frac{1-\delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0}\nu_{j_k}}{\nu_{j_{q_0}}}(-\mu_{j_{q_0}} + \frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}\nu_{j_{q_0}}) = 0.$$

Покажем так же, что $\hat{u}_j \leqslant \delta^2$ при $q_0 \leqslant N$ и $|j| = q_0$. В этом случае $q_0 = p_0+1$. Предположим обратное, тогда

$$\frac{1-\delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0}\nu_{j_k}}{2\nu_{j_{p_0+1}}} > \delta^2$$

$$1-\delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0}\nu_{j_k}>2\delta^2\nu_{j_{p_0+1}}$$

и, следовательно, $1>\delta^2\sum_{|k|\leqslant p_0+1}\nu_{j_k}$, что противоречит определению p_0.

Если $p_0=-1$, то есть либо $\delta^2\nu_{j_0}\geqslant 1$, либо $\frac{\mu_{j_0}}{\nu_{j_0}}\leqslant\frac{\mu_q}{\nu_q}$. Положим

$$\hat\lambda=\frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}},\quad \hat\lambda_{j_r}=0,\quad |r|\leqslant N,$$

$$\hat u_{j_r}=\begin{cases}\frac{1}{\nu_{j_{q_0}}}, & |r|=q_0,\\ 0, & |r|\neq q_0.\end{cases}$$

Тогда последовательность u_j является допустимой,

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-\mu_j+\hat\lambda\nu_j+\chi_j)u_j=\sum_{j\in\mathbb{Z}}\nu_j\left(\frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}-\frac{\mu_j}{\nu_j}\right)u_j\geqslant 0$$

в силу выбора q_0, а $\sum_{j\in\mathbb{Z}}(-\mu_j+\hat\lambda\nu_j+\chi_j)\hat u_j=0$, то есть условие (3) выполнено. Условия (4) также выполнено очевидным образом.

Получаем оценку снизу

$$E_N(\alpha,W_n^Q(\mathbb{T}),\delta)\geqslant\sqrt{\hat\lambda+\delta^2\sum_{|r|\leqslant N}\hat\lambda_{j_r}}.$$

Класс оптимальных методов будем искать в следующем виде

$$m_k(y)(t)=\sum_{|r|\leqslant N}(ij_r)^k a_{kr}y_{j_r}e^{ij_rt}.$$

Тогда с помощью равенства Парсеваля квадрат задачи можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\left(\sum_{|r|\leqslant N}{j_r}^{2k}|x_{j_r}-a_{kr}y_{j_r}|^2+\sum_{|j|>N}j^{2k}|x_j|^2\right)\to\max,$$

$$|x_j-y_j|^2\leqslant\delta^2,\quad \sum_{j\in\mathbb{Z}}\nu_j|x_j|^2\leqslant 1.$$

Положив $z_j=x_j-y_j$ и применив неравество Коши-Буняковского, имеем для $|j_r|\notin B$ и $|r|\leqslant p_0$

$$\alpha_k{j_r}^{2k}|x_{j_r}(1-a_{kr})+a_{kr}z_{j_r}|^2=\alpha_k{j_r}^{2k}\left|\frac{x_{j_r}(1-a_{kr})\sqrt{\hat\lambda\nu_{j_r}}}{\sqrt{\hat\lambda\nu_{j_r}}}+\frac{a_{kr}z_{j_r}\sqrt{\hat\lambda_{j_r}}}{\sqrt{\hat\lambda_{j_r}}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\alpha_k{j_r}^{2k}\left(\frac{|1-a_{kr}|^2}{\nu_{j_r}\hat\lambda}+\frac{|a_{kr}|^2}{\hat\lambda_{j_r}}\right)\left(|x_{j_r}|^2\hat\lambda\nu_{j_r}+|z_{j_r}|^2\hat\lambda_{j_r}\right).$$

Отдельно рассмотрим случаи $|j_r|\in B$ и $|r|>p_0$. В них положим $a_{kr}=1$ и $a_{kr}=0$, соответственно.

Тогда весь функционал можно оценить

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\left(\sum_{|r|\leqslant N}{j_r}^{2k}|x_{j_r}-a_{kr}y_{j_r}|^2+\sum_{|r|>N}r^{2k}|x_r|^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\left(\sum_{|r|\leqslant N}{j_r}^{2k}S_{a_{kr}}\left(|x_{j_r}|^2\hat\lambda\nu_{j_r}+|z_{j_r}|^2\hat\lambda_{j_r}\right)+\sum_{|r|>N}r^{2k}S_{a_{kr}}\left(|x_r|^2\hat\lambda\nu_r\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{r\in\mathbb{Z}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k{j_r}^{2k}S_{a_{kr}}\right)\left(\hat\lambda+\delta^2\sum_{|r|\leqslant N}\hat\lambda_{j_r}\right),$$

где $S_{a_{kr}}=\left(\frac{|1-a_{kr}|^2}{\xi_r\hat\lambda}+\frac{|a_{kr}|^2}{\bar\chi_r}\right)$,

$$\xi_r=\begin{cases}1, & |r|\in B,\\ \nu_{j_r}, & |r|\notin B,\end{cases}\qquad \bar\chi_r=\begin{cases}\hat\lambda_{j_r}, & |r|\leqslant p_0,\\ 1, & |r|>p_0.\end{cases}.$$

Значит метод является оптимальным, если a_{kr} удовлетворяет неравенству

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k{j_r}^{2k}S_{a_{kr}}\leqslant 1,\quad \text{при любом } r.$$

Выбранные нами значений a_{kr} при $|j_r|\in B$ и $|r|>p_0$ удовлетворяют неравенству

$$|j_r|\in B:\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\frac{{j_r}^{2k}}{\hat\lambda_{j_r}}=\frac{\mu_{j_r}}{\hat\lambda_{j_r}}=1,$$

$$|r|>p_0:\qquad \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k{j_r}^{2k}\frac{1}{\nu_{j_r}\hat\lambda}=\frac{\mu_{j_r}}{\nu_{j_r}\hat\lambda}=\frac{\frac{\mu_{j_r}}{\nu_{j_r}}}{\frac{\mu_{j_{q_0}}}{\nu_{j_{q_0}}}}\leqslant 1.$$

Покажем, что множество a_{kr} непусто при $|j_r|\notin B$ и $|r|\leqslant p_0$. Для этого выделим полные квадраты

$$\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k{j_r}^{2k}\left|a_{kr}-\frac{\hat\lambda_{j_r}}{\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda}\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\nu_{j_r}\hat\lambda\hat\lambda_{j_r}}{\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda}+\mu_{j_r}\left(\left(\frac{\hat\lambda_{j_r}}{\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda}\right)^2-\frac{\hat\lambda_{j_r}}{\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda}\right).$$

Слева неотрицательная величина, оценим выражение справа

$$\frac{\hat\lambda_{j_r}}{\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda}\left(\nu_{j_r}\hat\lambda+\mu_{j_r}\left(\frac{\hat\lambda_{j_r}}{\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda}-1\right)\right)=$$

$$=\frac{\hat\lambda_{j_r}}{(\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda)^2}\left((\nu_{j_r}\hat\lambda)(\hat\lambda_{j_r}+\nu_{j_r}\hat\lambda)+\mu_{j_r}\left(\hat\lambda_{j_r}-\hat\lambda_{j_r}-\nu_{j_r}\hat\lambda\right)\right)=$$

$$= \frac{\nu_{j_r}\hat{\lambda}\hat{\lambda}_{j_r}}{(\hat{\lambda}_{j_r}+\nu_{j_r}\hat{\lambda})^2}\left(-\mu_{j_r}+\nu_{j_r}\hat{\lambda}+\hat{\lambda}_{j_r}\right)=0.$$

Следовательно, $a_{kr}=\frac{\hat{\lambda}_{j_r}}{\hat{\lambda}_{j_r}+\nu_{j_r}\hat{\lambda}}$ при $|j_r|\notin B$ и $|r|\leqslant p_0$. Теорема доказана.

Далее, рассмотрим частный случай, где в качестве дифференциального полинома возьмем $Q(D)=D^2+1$, а вектор α положим единичным.

Следствие. Если $Q(D)=D^2+1$ и $\alpha_0=\alpha_1=1$, то, положив $j_0=1$, $j_1=0$, $j_r=r$, $r>1$, погрешность оптимального восстановления

$$E_N(W_2^Q(\mathbb{T}),\delta)=\sqrt{\frac{j_{p_0+1}^2+1}{(j_{p_0+1}^2-1)^2}+\delta^2\sum_{|r|\leqslant p_0}\left(j_r^2+1-\frac{(j_{p_0+1}^2+1)(j_r^2-1)^2}{(j_{p_0+1}^2-1)^2}\right)},$$

а соответствующие методы

$$m_0(y)(t)=\sum_{|r|\leqslant p_0}\left(1-\frac{(j_{p_0+1}^2+1)(j_r^2-1)^2}{(j_{p_0+1}^2-1)^2(j_r^2+1)}\right)y_{j_r}e^{ij_rt},$$

$$m_1(y)(t)=\sum_{|r|\leqslant p_0}ij_r\left(1-\frac{(j_{p_0+1}^2+1)(j_r^2-1)^2}{(j_{p_0+1}^2-1)^2(j_r^2+1)}\right)y_{j_r}e^{ij_rt},$$

где

$$p_0=\max\left\{0\leqslant p\leqslant N:\delta^2\sum_{|r|\leqslant p}(j_r^2-1)^2<1\right\}.$$

Доказательство: Положим $\mu_j=j^2+1$ и $\nu_j=j^4-2j^2+1$. Имеем

$$\frac{\mu_j}{\nu_j}=\frac{j^2+1}{j^4-2j^2+1},\quad \left(\frac{\mu_j}{\nu_j}\right)'=\frac{-2j(3+j^2)}{(j^2-1)^3}.$$

Начиная с $j=1$ последовательность отношений $\frac{\mu_j}{\nu_j}$ убывает. Упорядочим ее по убыванию, имеем

$$\frac{\mu_1}{\nu_1}=\frac{\mu_{-1}}{\nu_{-1}}=+\infty\geqslant\frac{\mu_0}{\nu_0}=1\geqslant\frac{\mu_2}{\nu_2}=\frac{\mu_{-2}}{\nu_{-2}}=\frac{5}{9}\geqslant\ldots\geqslant\frac{\mu_N}{\nu_N}=\frac{\mu_{-N}}{\nu_{-N}}=\frac{N^2+1}{N^4-2N^2+1}.$$

Тогда

$$\max_{j>N}\frac{\mu_j}{\nu_j}=\frac{\mu_{N+1}}{\nu_{N+1}}=\frac{(N+1)^2+1}{(N+1)^4-2(N+1)^2+1}$$

и $\delta^2\nu_{j_0}<1$, $\frac{\mu_{j_0}}{\nu_{j_0}}>\frac{\mu_q}{\nu_q}$. Отсюда

$$p_0=\max\left\{0\leqslant p\leqslant N:\delta^2\sum_{|r|\leqslant p}\nu_{j_r}<1\right\}>0,$$

а $q_0=p_0+1$. Далее, применяем теорему.