ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Е. А. БАЛОВА

Аннотация. Рассматривается задача оптимального восстановления решения обобщённого уравнения Пуассона в ограниченной области Q с однородными граничными условиями, когда правая часть уравнения задана неточно. Предполагается, что правые части уравнений принадлежат обобщённым классам Соболева и известно конечное число коэффициентов Фурье правых частей уравнений, заданных с погрешностью в евклидовой метрике. Рассматривается случай произвольного набора известных коэффициентов. Найдены значения погрешности оптимального восстановления и построено семейство оптимальных методов восстановления. Решена задача о наилучшем выборе измеряемых коэффициентов.

Применение теории оптимального восстановления к задачам математической физики на основе методов, разработанных в [1], [2], было начато в работах [3] и [4]. В работах [5] и [6] были рассмотрены задачи о восстановлении решения задачи Дирихле в двумерном кольце и d-мерном шаре по неточной исходной информации в различных постановках. В настоящей работе рассматривается аналогичная задача оптимального восстановления для уравнения Пуассона в ограниченной области Q. Пользуясь техникой, подобной той, которая применялась в работах [7], [8], мы строим целое семейство оптимальных методов восстановления.

Пусть Q — область в пространстве $\mathbb{R}^d$, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой $(d-1)$-мерной поверхностью ∂Q, $x = (x_1, \ldots, x_d) \in Q$, $f(x) \in L_2(Q)$, $a(x) \in C(\overline{Q})$, $k(x) \in C^1(Q)$. Рассмотрим уравнение Пуассона

$$-(\operatorname{div}(k(x)\nabla u(x)) - a(x)u(x)) = f(x), \tag{1}$$

с однородным граничным условием

$$u\,|_{\partial Q} = 0. \tag{2}$$

Известно (см., напр. [9]), что если $k(x) \geq k_0 > 0$, $a(x) \geq 0$, то существует полная в $L_2(Q)$ ортонормированная система из собственных функций первой краевой задачи для оператора

$$\mathfrak{L} = -(\operatorname{div}(k(x)\nabla - a(x)).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №10–01–00188 и №10–01–90002).

Собственные значения этой задачи обладают следующими свойствами: они положительны, стремятся к ∞ и не имеют точек скопления. При этом различным собственным значениям соответствует конечное (равное кратности собственного значения) число линейно-независимых собственных функций. Обозначим через λ_k различные значения собственных значений, упорядочив их по возрастанию:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k < \ldots .$$

Собственные функции, соответствующие λ_k, обозначим через $\varphi_{kj}(x),\ k = 1, 2, \ldots,\ j = 1, \ldots, r_k$, где r_k — кратность λ_k.

Если правая часть уравнения представлена в виде ряда Фурье, то есть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где $c_{kj} = \int_Q f(x)\varphi_{kj}(x)dx$, то решение задачи (1),(2) может быть записано в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-1} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x).$$

Пусть функция $g(x) \in L_2(Q)$,

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} g_{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где g_{kj} — коэффициенты Фурье функции $g(x)$. Положим по определению

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} g_{kj} \varphi_{kj}(x),$$

где α — произвольное положительное число. Рассмотрим так называемое обобщённое уравнение Пуассона

$$\mathfrak{L}^{\alpha/2} u(x) = f(x) \tag{3}$$

с однородным граничным условием

$$u \,|_{\partial Q} = 0. \tag{4}$$

Нетрудно увидеть, что решение задачи (3)—(4) можно записать в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-\alpha/2} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x). \tag{5}$$

Перейдем к задаче восстановления. Рассмотрим задачу (3)—(4). Требуется наилучшим образом восстановить функцию $u(x)$, когда известно конечное число измеренных с погрешностью коэффициентов Фурье правой части уравнения (3).

Пусть дано некоторое фиксированное натуральное число $k_0 \geq 1$ и имеется набор множеств J_k и A_k, где $J_k = \{1, \dots, r_k\}$, $k = 1, \dots, k_0$, $A_k \subseteq J_k$, $k = 1, \dots, k_0$, — произвольные подмножества J_k, $A = \{A_1, \dots, A_{k_0}\}$ и $N = \operatorname{card} A$ — число элементов множества A. Будем считать, что для любой функции $f(x) \in L_2(Q)$ известен вектор

$$\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\}, \quad k = 1, \dots, k_0, \quad j \in A_k,$$

состоящий из приближенных значений коэффициентов Фурье этой функции. Точнее, предполагается, что

$$\|\widetilde{f}^N - f^N\|_{l_2^N} \leq \delta,$$

где

$$f^N = \{c_{kj}\}\ , \quad k = 1, ..., k_0, \quad j \in A_k,$$

а $\|\cdot\|_{l_2^N}$ — стандартная евклидова норма.

Задача оптимального восстановления заключается в том, чтобы по информации о векторе $\widetilde{f}^N$ восстановить наилучшим образом решение задачи (3), (4) в метрике $L_2(Q)$. Будем предполагать, что функция $f(x)$ принадлежит обобщённому соболевскому классу

$$W_2^\beta(Q) = \left\{ f(x) \in L_2(Q) : \ \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f\|_{L_2(Q)} \leq 1 \right\},$$

$\beta > 0$ — фиксированное действительное число. В качестве методов восстановления рассмотрим всевозможные операторы $\psi\colon l_2^N \to L_2(Q)$.

Назовем погрешностью восстановления метода ψ величину

$$e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) = \sup_{\substack{f \in W_2^\beta(Q),\ \widetilde{f}^N \in l_2^N \\ \|f^N - \widetilde{f}^N\|_{l_2^N} \leq \delta}} \|u - \psi(\widetilde{f}^N)\|_{L_2(Q)}.$$

Погрешностью оптимального восстановления называется величина

$$E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \inf_{\psi\colon l_2^N \to L_2(Q)} e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi),$$

а метод, на котором достигается нижняя грань, называется оптимальным.

Нас будет также интересовать задача об оптимальном выборе множеств A_k, т.е. задача о нахождении величины

$$E_N(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \inf_{\substack{A = \{A_1, \dots, A_{k_0}\} \\ \operatorname{card} A \leq N}} E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta)$$

при фиксированном N и того множества A, на котором эта нижняя грань достигается. Теперь сформулируем две теоремы, соответствующие указанным задачам.

Положим

$$k^* = \begin{cases} \min\bigl(k : k \in \mathbb{N} \setminus \{k : A_k = J_k,\ 1 \le k \le k_0\}\bigr), & \delta^2 < \lambda_1^{-\beta}, \\ 1, & \delta^2 \ge \lambda_1^{-\beta}, \end{cases}$$

$$\widehat{\eta}_1 = \frac{1}{\lambda_1^\alpha}\left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{k^*}}\right)^{(\alpha+\beta)}\right], \quad \widehat{\eta}_2 = \frac{1}{\lambda_{k^*}^{\alpha+\beta}}.$$

Теорема 1. *Пусть δ, α и β — произвольные положительные числа. Тогда*

$$E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\widehat{\eta}_1\delta^2 + \widehat{\eta}_2},$$

а любой из методов

$$\psi(\widetilde{f}^N) = \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k} \omega_{kj} y_{kj} \varphi_{kj}(x), \tag{6}$$

где ω_{kj} удовлетворяют условиям

$$\left|\omega_{kj} - \frac{\widehat{\eta}_1}{\lambda_k^{\alpha/2}(\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2\lambda_k^\beta)}\right| \le \frac{\sqrt{\widehat{\eta}_1\widehat{\eta}_2\lambda_k^\beta(-\lambda_k^{-\alpha} + \widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2\lambda_k^\beta)}}{\widehat{\eta}_1 + \widehat{\eta}_2\lambda_k^\beta}, \tag{7}$$

является оптимальным.

Отметим, что в силу монотонного возрастания λ_k и определения $\widehat{\eta}_1$, $\widehat{\eta}_2$ несложно убедиться в том, что подкоренное выражение в (7) неотрицательно.

Теорема 2. *Пусть N — фиксированное натуральное число, α, β и δ — произвольные положительные числа. Тогда при $r_1 \le N$*

$$E_N(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \sqrt{\frac{1}{\lambda_{k_0}^{\alpha+\beta}} + \frac{\delta^2}{\lambda_1^\alpha}\left[1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_{k_0}}\right)^{(\alpha+\beta)}\right]}\ ,$$

где

$$k_0 = \max\left(k : \sum_{i=1}^k r_i \le N\right),$$

а $A = \{J_1, \ldots, J_{k_0}\}$. При $r_1 > N$

$$E_N(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) = \lambda_1^{-(\alpha+\beta)/2},$$

а $A = \emptyset$.

Сначала докажем вспомогательную лемму, связанную с решением одной экстремальной задачи.

Пусть m — некоторое фиксированное натуральное число, и имеются две последовательности положительных чисел

$$\{\mu_k\}_1^\infty, \quad \mu_k \le \mu_m,\ k > m,$$
$$\{\gamma_k\}_1^\infty, \quad \gamma_m \le \gamma_k,\ k > m.$$

Если $m > 1$ будем предполагать, что

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} \le \mu_k, \quad 1 \le k \le m \\ \gamma_k \le \gamma_{k+1}, \quad 1 \le k \le m. \end{aligned}$$

Пусть $u = \{u_k\}_1^\infty$, $u_k \ge 0$, $J = \{1, \dots, m\}$, и $B \subseteq J$, $B \ne \emptyset$. Рассмотрим следующую экстремальную задачу:

$$(8) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k \to \max, \quad \sum_{k \in B} u_k \le \delta^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k \le 1, \quad u_k \ge 0, \ k \ge 1.$$

Для решения этой задачи применим метод Лагранжа. Функция Лагранжа для задачи (8) имеет вид

$$\mathcal{L}_1(u, \eta_1, \eta_2) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k + \eta_1 \sum_{k \in B} u_k + \eta_2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k,$$

где η_1 и η_2 — множители Лагранжа. Будем использовать в дальнейшем несложно доказываемое

Предложение 1. *Если найдутся неотрицательные $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$, а также допустимая в задаче (8) последовательность $\widehat{u}$ такие, что выполняются условия*

$$\begin{aligned} &(a) \quad \mathcal{L}_1(\widehat{u}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = \min_{u_k \ge 0} \mathcal{L}_1(u, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2), \\ &(b) \quad \widehat{\eta}_1 \left(\sum_{k \in A} \widehat{u}_k - \delta^2 \right) + \widehat{\eta}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \widehat{u}_k - 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

то $\widehat{u}$ — решение этой задачи.

Доказательство. Действительно, пусть $\widehat{u}$, $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$ удовлетворяют условиям утверждения. Пусть u — любая допустимая в задаче (8) последовательность. Тогда, в силу допустимости u и неотрицательности $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$ получим

$$\begin{aligned} -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k &\ge -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k + \widehat{\eta}_1 \left(\sum_{k \in A} u_k - \delta^2 \right) + \widehat{\eta}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k u_k - 1 \right) \\ &= \mathcal{L}_1(u, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) - \widehat{\eta}_1 \delta^2 - \widehat{\eta}_2 \ge \mathcal{L}_1(\widehat{u}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) - \widehat{\eta}_1 \delta^2 - \widehat{\eta}_2 \\ &= -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \widehat{u}_k + \widehat{\eta}_1 \left(\sum_{k \in A} \widehat{u}_k - \delta^2 \right) + \widehat{\eta}_2 \left(\sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \widehat{u}_k - 1 \right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \widehat{u}_k, \end{aligned}$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \widehat{u}_k \ge \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k u_k.$$

$\square$

Перейдём к формулировке леммы. Положим
$$k^*=\begin{cases}\min\bigl(k:\ k\in\mathbb{N}\backslash B\bigr), & \delta^2<\gamma_1^{-1},\\ 1, & \delta^2\geq\gamma_1^{-1}.\end{cases}$$

Лемма 1. *Пусть* $\delta>0$. *Тогда значение задачи* (8) *равно* $\widehat{\eta}_1\delta^2+\widehat{\eta}_2$, *где*
$$\widehat{\eta}_1=\mu_1-\frac{\gamma_1\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\ ,\quad \widehat{\eta}_2=\frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}.$$

Доказательство. Пусть $k^*=1$. Тогда для последовательности $\widehat{u}_1=\gamma_1^{-1}$, $\widehat{u}_k=0$, $k>1$, имеем
$$\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\widehat{u}_k=1.$$
Условие
$$\sum_{k\in B}\widehat{u}_k\leq\delta^2$$
тоже выполняется, так как или $\widehat{u}_1=\gamma_1^{-1}\leq\delta^2$, или 1 не принадлежит множеству B и $\widehat{u}_1$ не входит в эту сумму, следовательно, последовательность $\widehat{u}$ допустима в (8) и условие (b) выполнено. Покажем, что условие (a) также выполнено. В силу того, что $\mu_k\leq\mu_1$ и $\gamma_k\geq\gamma_1$ при $k>1$, получаем, что
$$\mathcal{L}_1(u,\widehat{\eta}_1,\widehat{\eta}_2)=\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(-\mu_k+\frac{\mu_1}{\gamma_1}\gamma_k\biggr)u_k\geq 0$$
для произвольных неотрицательных u_k. Легко убедиться в том, что $\mathcal{L}_1(\widehat{u},\widehat{\eta}_1,\widehat{\eta}_2)=0$, то есть условие ($a$) выполнено. Таким образом, получаем, что последовательность $\widehat{u}$ является решением задачи (8).

Пусть теперь $k^*>1$. Рассмотрим последовательность
$$\widehat{u}_1=\delta^2,\quad \widehat{u}_{k^*}=\frac{1-\delta^2\gamma_1}{\gamma_{k^*}},\quad \widehat{u}_k=0,\ k\geq 2,\ k\neq k^*.$$

Допустимость последовательности $\widehat{u}$ следует из определения k^*, так как $k^*\notin B$. Условие (b) легко проверяется. Остается показать, что выполнено условие (a). Подставив в функцию Лагранжа $\widehat{\eta}_1$ и $\widehat{\eta}_2$, получим, что
$$\mathcal{L}_1(u,\widehat{\eta}_1,\widehat{\eta}_2)=\sum_{k\in B}\biggl(\mu_1-\frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_1\biggr)u_k+\sum_{k=1}^{\infty}\biggl(-\mu_k+\frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_k\biggr)u_k$$
$$=\sum_{k\in B}\biggl(-\mu_k+\mu_1-\frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_1+\frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_k\biggr)u_k+\sum_{k\in\mathbb{N}\backslash B}\biggl(-\mu_k+\frac{\mu_{k^*}}{\gamma_{k^*}}\gamma_k\biggr)u_k\geq 0$$
для всех неотрицательных u_k, так как в первой сумме μ_k и γ_k убывают и возрастают соответственно, а во второй сумме $k\geq k^*$ в силу

определения k^*. Подставляя $\widehat{u}$ в функцию Лагранжа, убеждаемся, что

$$\mathcal{L}_1(\widehat{u}, \widehat{\eta}_1, \widehat{\eta}_2) = 0,$$

то есть условие (a) выполнено. Значение задачи находится подстановкой экстремальной последовательности $\widehat{u}$ в максимизируемую сумму. □

Доказательство теоремы 1. Сначала получим снизу для величины $E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta)$. Пусть ψ — произвольный метод восстановления, $f \in W_2^\beta(Q)$ и $\|f^N\|_{l_2^N} \le \delta$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} &2\|u(x)\|_{L_2(Q)} \le \|u(x) - \psi(0) + u(x) + \psi(0)\|_{L_2(Q)} \\ &\le \|u(x) - \psi(0)\|_{L_2(Q)} + \|u(-x) - \psi(0)\|_{L_2(Q)} \le 2e_{N,2}(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi). \end{aligned}$$

Для выбранного метода ψ, после перехода к верхней грани, получим

$$e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) \ge \sup_{\substack{f(x) \in W_2^\beta(Q), \\ \|f^N\|_{l_2^N} \le \delta}} \|u(x)\|_{L_2(Q)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} E_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta) &= \inf_{\psi:\, l_2^N \to L_2(Q)} e_A(W_2^\beta(Q), \alpha, \delta, \psi) \\ &\ge \sup_{\substack{f(x) \in W_2^\beta(Q), \\ \|f^N\|_{l_2^N} \le \delta}} \|u(x)\|_{L_2(Q)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u(x)\|^2_{L_2(Q)} \to \max, \quad \|f^N\|^2_{l_2^N} \le \delta^2, \quad \|\mathfrak{L}^{\beta/2} f(x)\|^2_{L_2(Q)} \le 1. \tag{10}$$

Используя равенство Парсеваля, перепишем задачу (10) в виде

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\lambda_k^\alpha} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2 \to \max, \quad \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} c_{kj}^2 \le \delta^2, \quad \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\beta \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2 \le 1. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$v_k = \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj}^2, \; k \ge 1, \quad v'_k = \sum_{j \in A_k} c_{kj}^2, \; k = 1, \dots, k_0.$$

Из определения v'_k вытекает, что $v'_k = v_k$, если $J_k = A_k$. Теперь задачу (11) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^\infty \frac{v_k}{\lambda_k^\alpha} \to \max, \quad \sum_{\substack{1 \le k \le k_0 \\ A_k = J_k}} v_k + \sum_{\substack{1 \le k \le k_0 \\ A_k \ne J_k}} v'_k \le \delta^2, \quad \sum_{k=1}^\infty \lambda_k^\beta v_k \le 1, \\ &v_k \ge 0, \; k \ge 1, \; v_k \ge v'_k \ge 0, \; k = 1, \dots, k_0. \end{aligned} \tag{12}$$

Нетрудно убедиться, что значение задачи (12) совпадает со значением задачи

(13)
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k}{\lambda_k^\alpha}\to\max,\quad \sum_{\substack{1\le k\le k_0\\ A_k=J_k}} v_k\le\delta^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^\beta v_k\le 1,\ v_k\ge 0,\ k\ge 1.$$

Из леммы 1 вытекает, что значение этой задачи равно $\widehat{\eta}_1\delta^2+\widehat{\eta}_2$. Из (9) получаем, что

$$E_A(W_2^\beta(Q),\alpha,\delta)\ge\sqrt{\widehat{\eta}_1\delta^2+\widehat{\eta}_2}.$$

Теперь получим оценку сверху и найдем оптимальные методы. Для оценки погрешности методов (6) надо оценить значение следующей экстремальной задачи (для удобства мы переходим к квадрату оцениваемой величины)

$$\|u-\psi(\widetilde{f}^N)\|^2_{L_2(Q)}\to\max,\quad \|f^N-\widetilde{f}^N\|^2_{l_2^N}\le\delta^2\quad f\in W_2^\beta(Q).$$

Эта задача переписывается в виде

(14)
$$\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k}(\lambda^{-\alpha/2}c_{kj}-\omega_{kj}y_{kj})^2+\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_k\setminus A_k}\lambda^{-\alpha}c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\lambda^{-\alpha}c_{kj}^2\to\max,$$
$$\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k}(c_{kj}-y_{kj})^2\le\delta^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\lambda_k^\beta c_{kj}^2\le 1.$$

После замены $y_{kj}=c_{kj}-z_{kj}$ задача (14) примет вид

(15)
$$\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k}((\lambda^{-\alpha/2}-\omega_{kj})c_{kj}+\omega_{kj}z_{kj})^2+\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_k\setminus A_k}\lambda^{-\alpha}c_{kj}^2$$
$$+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\lambda^{-\alpha}c_{kj}^2\to\max,\quad \sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in A_k}z_{kj}^2\le\delta^2,\quad \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\lambda_k^\beta c_{kj}^2\le 1.$$

Учитывая монотонное возрастание коэффициентов λ_k, значение $\widehat{\eta}_2$ и определение k^*, имеем

(16)
$$\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_k\setminus A_k}\lambda_k^{-\alpha}c_{kj}^2+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\lambda_k^{-\alpha}c_{kj}^2 \le\widehat{\eta}_2\Bigg(\sum_{k=1}^{k_0}\sum_{j\in J_k\setminus A_k}\lambda_k^\beta c_{kj}^2+\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{r_k}\lambda_k^\beta c_{kj}^2\Bigg).$$

Если $k^* = 1$, то из (7) следует, что $\omega_{kj} = 0$ и значение задачи (15) оценивается величиной

$$\widehat{\eta}_2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 \le \widehat{\eta}_2.$$

Пусть $k^* > 1$. Тогда из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$((\lambda^{-\alpha/2} - \omega_{kj}) c_{kj} + \omega_{kj} z_{kj})^2 \le \left(\frac{(\lambda_k^{-\alpha/2} - \omega_{kj})^2}{\widehat{\eta}_2 \, \lambda_k^{\beta}} + \frac{\omega_{kj}^2}{\widehat{\eta}_1} \right) (\widehat{\eta}_2 \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 + \widehat{\eta}_1 z_{kj}^2).$$

Пользуясь этим неравенством и неравенством (16), получаем, что значение задачи (15) оценивается величиной

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} \left(\frac{(\lambda_k^{-\alpha/2} - \omega_{kj})^2}{\widehat{\eta}_2 \lambda_k^{\beta}} + \frac{\omega_{kj}^2}{\widehat{\eta}_1} \right) (\widehat{\eta}_2 \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 + \widehat{\eta}_1 z_{kj}^2) \\ + \widehat{\eta}_2 \left(\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 \right).$$

Нетрудно проверить, что условия (7) эквивалентны неравенствам

$$\frac{(\lambda_k^{-\alpha/2} - \omega_{kj})^2}{\widehat{\eta}_2 \lambda_k^{\beta}} + \frac{\omega_{kj}^2}{\widehat{\eta}_1} \le 1. \tag{17}$$

Поэтому значение задачи (15) оценивается величиной

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} (\widehat{\eta}_2 \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 + \widehat{\eta}_1 z_{kj}^2) + \widehat{\eta}_2 \left(\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in J_k \setminus A_k} \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 \right) \\ = \widehat{\eta}_1 \sum_{k=1}^{k_0} \sum_{j \in A_k} z_{kj}^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} \lambda_k^{\beta} c_{kj}^2 \le \widehat{\eta}_1 \delta^2 + \widehat{\eta}_2.$$

Тем самым доказано, что

$$E_A(W_2^{\beta}(Q), \alpha, \delta) \le \sqrt{\widehat{\eta}_1 \delta^2 + \widehat{\eta}_2}$$

и методы (6) оптимальны. □

Рассмотрим теперь вопрос о минимизации информации, необходимой для построения оптимального метода. Если какие-либо из коэффициентов ω_{kj} равны нулю, то информация, связанная с этими коэффициентами не используется в соответствующем методе. Другими словами, для построения оптимального метода измерять данные коэффициенты нет необходимости. Выясним, какие из коэффициентов ω_{kj} можно положить равными нулю при построении оптимальных методов. Для этого подставим $\omega_{kj} = 0$ в неравенства (17). Тогда, с учётом вида $\widehat{\eta}_2$, получим, что

$$\frac{1}{\widehat{\eta}_2\,\lambda_k^{\alpha+\beta}} = \frac{\lambda_{k^*}^{\alpha+\beta}}{\lambda_k^{\alpha+\beta}} \leq 1.$$

Отсюда следует, в силу монотонного возрастания λ_k, что при $k \geq k^*$ можно положить $\omega_{kj} = 0$.

Пусть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{r_k} c_{kj} \varphi_{kj}(x).$$

Назовем k-пачкой группу коэффициентов $c_{kj},\ j = 1, \ldots, r_k$, где r_k — размерность подпространства $\Phi_k \in L_2(Q)$, базисом которого являются функции $\varphi_{k1}(x), \ldots, \varphi_{kr_k}(x)$, соответствующие собственному значению λ_k.

Пусть $\widetilde{f}^N = \{y_{kj}\},\ k = 1, \ldots, k_0,\ j \in A_k$ — вектор, приближённо описывающий функцию $f(x)$ из правой части уравнения (3). Из теоремы 1 получаем следующий результат: если в k-пачке среди коэффициентов $y_{kj},\ 1 \leq k \leq k_0,\ j \in A_k$, отсутствует хотя бы один коэффициент y_{kj} (что соответствует выполнению условия $A_k \neq J_k$), то ни один из коэффициентов этой пачки, равно как и ни один из коэффициентов всех следующих пачек (по возрастанию k), входящих в вектор $\widetilde{f}^N$, при построении оптимального метода можно не использовать.

Отсюда непосредственно вытекает утверждение теоремы 2.

Список литературы

[1] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью // Матем. сб. 2002. Т. 193. №3. С. 79–100.

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.

[3] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М.* On optimal recovery of heat equation solutions. In: Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.), 163–175, Sofia: Marin Drinov Academic Publishing House, 2004.

[4] Осипенко К. Ю. О восстановлении решения задачи Дирихле по неточным исходным данным // Владикавказский мат. журн. 2004. Т. 6, вып. 4. С. 55–62.

[5] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решения задачи Дирихле в кольце // Владикавказский мат. журн. 2006. Т. 8, вып. 2, С. 15–23.

[6] *Балова Е. А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Математические заметки, 2007. Т. 82, вып. 3. С. 323–334.

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функ. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа и восстановление производных по неточной информации // Докл. РАН, 2011, Т. 438. С. 300–302.

[9] *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1983г.

МАТИ — Российский государственный технологический университет им. К. Э. Циолковского