ЖУРНАЛ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, 2020, том 60, № 10, с. 1711–1720

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

УДК 517.9

НАИЛУЧШЕЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПО НЕТОЧНЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ[1)]

© 2020 г. Е. В. Абрамова[1,*], Г. Г. Магарил-Ильяев[2,], Е. О. Сивкова[3,***]**

[1] 111250 Москва, ул. Красноказарменная, 14, НИУ МЭИ, Россия

[2] 119991 Москва, Ленинские горы, 1, МГУ им. М.В. Ломоносова, Россия

[3] 119991 Москва, ул. Малая Пироговская, 1, стр. 1, МПГУ, Россия

*e-mail: el.v.abramova@gmail.com

**e-mail: magaril@mech.math.msu.su

***e-mail: e.o.sivkova@mail.ru

Поступила в редакцию 20.02.2020 г.
Переработанный вариант 20.02.2020 г.
Принята к публикации 09.06.2020 г.

Построено семейство линейных оптимальных методов восстановления решения задачи Дирихле на гиперплоскости по информации о приближенных его измерениях на конечном числе других гиперплоскостей. При этом оптимальные методы используют не всю доступную информацию, а лишь информацию об измерениях решения на не более, чем двух плоскостях. Библ. 14. Фиг. 1.

Ключевые слова: задача Дирихле, оптимальное восстановление, экстремальная задача.

DOI: 10.31857/S0044466920100038

ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается задача Дирихле для полупространства $\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+\}$ и ставится вопрос о наилучшем восстановлении решения этой задачи на гиперплоскости, “параллельной” $\mathbb{R}^d$ по неточным измерениям данного решения на конечном числе других гиперплоскостей, параллельных исходной. Найдены явные выражения для оптимальных методов восстановления и вычислена соответствующая погрешность восстановления. Следует отметить, что оптимальные методы линейны и используют не всю доступную информацию об измерениях решения задачи Дирихле, а лишь информацию о его измерениях на не более, чем двух гиперплоскостях.

Задача, рассматриваемая в данной работе, относится к тематике, связанной с вопросами оптимального восстановления значений линейных функционалов и операторов на множествах элементов, заданных неточно. Эта проблематика возникла во второй половине прошлого века и была инициирована, в идейном плане, работами К. Шеннона и А.Н. Колмогорова. Первая постановка задачи оптимального восстановления линейного функционала на классе элементов, известных приближенно, принадлежит А.С. Смоляку [1]. В дальнейшем эта тематика активно развивалась. Начальный этап ее развития отражен в обзорах [2]–[4]. Впоследствии основное внимание уделялось задачам восстановления функций и их производных по неточно заданному спектру и задачам оптимального восстановления решений уравнений математической физики (см., например, [5]–[13]). Настоящая работа примыкает ко второму циклу задач.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Рассмотрим задачу Дирихле:

$$\begin{gathered} \Delta u = 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{gathered} \tag{1}$$

[1)]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 17-01-00649-а).

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{d+1}$и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в полупространстве $\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\}$ такой, что $u(\cdot,y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ и $u(\cdot,y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В этом случае решение данной задачи единственно и задается интегралом Пуассона (см., например, [14])

$$u(x,y) = u(x,y,f) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{yf(t)}{\left(|x-t|^2 + y^2\right)^{(d+1)/2}} dt, \tag{2}$$

где $|\cdot|$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^d$.

Мы ставим следующую задачу. Пусть заданы числа $\delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, и пусть приближенно известны значения функции $u(\cdot,\cdot)$ на n гиперплоскостях: $y = y_i$, $i = 1, \ldots, n$, где $0 \le y_1 < y_2 < \ldots < y_n$. Точнее говоря, известны функции $z_i(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такие, что

$$\|u(\cdot,y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

По этой информации мы хотим восстановить (по возможности, наилучшим образом) решение задачи Дирихле на гиперплоскости $y = Y$, $Y > 0$, в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Поступаем следующим образом. Любое отображение $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n = L_2(\mathbb{R}^d) \times \ldots \times L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ объявляется методом восстановления. Погрешностью метода φ назовем величину

$$e(Y,\varphi) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\ \bar{z}(\cdot)\in (L_2(\mathbb{R}^d))^n,\\ \|u(\cdot,y_i) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \le \delta_i,\ i=1,\ldots,n}} \|u(\cdot,Y) - \varphi(\bar{z}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $\bar{z}(\cdot) = (z_1(\cdot), \ldots, z_n(\cdot))$ (наборы $(y_1, \ldots, y_n)$ и $(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ фиксированы и поэтому зависимость от них не отмечаем).

Нас интересует наименьшая возможная погрешность, т.е. величина

$$E(Y) = \inf_{\varphi} e(Y,\varphi),$$

где нижняя грань берется по всем отображениям $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^n \to L_2(\mathbb{R}^d)$, которую назовем *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы, на которых эта нижняя грань достигается, т.е. методы $\hat{\varphi}$, для которых

$$E(Y) = e(Y,\hat{\varphi}).$$

Такие методы назовем *оптимальными методами восстановления*.

Перед формулировкой теоремы приведем некоторые определения. На двумерной плоскости (y,t) рассмотрим множество

$$M = \mathrm{co}\{(y_i, \ln(1/\delta_i)),\ i = 1, \ldots, n\} + \{(y,0) : y \ge 0\},$$

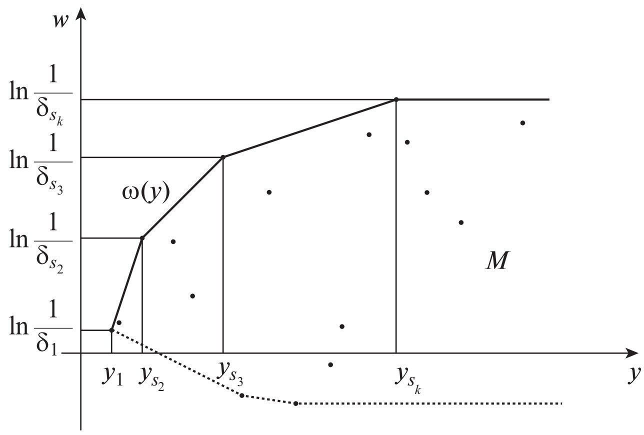
представляющее собой алгебраическую сумму выпуклой оболочки n точек и полупрямой (см. фиг. 1).

Определим функцию $\omega(\cdot)$ на $[0,+\infty)$ по правилу: $\omega(y) = \max\{t \in \mathbb{R} : (y,t) \in M\}$, причем $\omega(y) = -\infty$, если множество в фигурных скобках пусто. Ясно, что $\omega(\cdot)$ — вогнутая ломаная на $[y_1,+\infty)$. Пусть $y_{s_1} < \ldots < y_{s_k}$ — ее точка излома (считаем, что y_1 — также точка излома, т.е. $y_1 = y_{s_1}$).

Если $Y \in (y_{s_j}, y_{s_{j+1}})$, $1 \le j \le k-1$, то положим

$$\hat{\lambda}_{s_j} = \hat{\lambda}_{s_j}(Y) = \frac{y_{s_{j+1}} - Y}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\frac{-2(Y - y_{s_j})}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}},$$

$$\hat{\lambda}_{s_j+1} = \hat{\lambda}_{s_j+1}(Y) = \frac{Y - y_{s_j}}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}} \left(\frac{\delta_{s_j}}{\delta_{s_{j+1}}}\right)^{\frac{2(y_{s_{j+1}} - Y)}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}}.$$



Фиг. 1.

Легко видеть, что это положительные числа, причем $\hat{\lambda}_{s_j} < 1$.

Для данного Y определим еще положительное число

$$\gamma_j = \gamma_j(Y) = -\frac{\ln \hat{\lambda}_{s_j+1}}{Y - y_{s_j}}.$$

Пусть F – преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$. Если $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, то $F[f](\cdot)$ обозначает образ функции $f(\cdot)$ при действии преобразования Фурье.

Для $r > 0$ положим $B(r) = \{\xi \in \mathbb{R}^d : |\xi| \le r\}$ (замкнутый шар в $\mathbb{R}^d$ с центром в нуле радиуса r).

Теорема. *Для любого* $Y \ge 0$ *справедливо равенство*

$$E(Y) = e^{-\omega(Y)}.$$

Если $Y \in (y_{s_j}, y_{s_{j+1}})$, $1 \le j \le k-1$, *то множество измеримых функций* $a(\cdot)$ *на* $\mathbb{R}^d$ *таких, что*

$$\frac{\left|e^{-(Y-y_{s_j})|\xi|} - a(\xi)e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}\right|^2}{\hat{\lambda}_{s_j}} + \frac{|a(\xi)|^2}{\hat{\lambda}_{s_{j+1}}} \le 1 \tag{3}$$

для п.в. $\xi \in B(\gamma_j)$ *и* $a(\xi) = 0$, *когда* $\xi \notin B(\gamma_j)$, *не пусто. Для каждой такой функции* $a(\cdot)$ *метод* $\hat{\varphi}_a$, *определенный формулой*

$$\hat{\varphi}_a(z_1(\cdot), \ldots, z_n(\cdot))(\cdot) = (K_{aj} * z_{s_j})(\cdot) + (K_a * z_{s_{j+1}})(\cdot),$$

где $F[K_{aj}](\xi) = e^{-(Y-y_{s_j})|\xi|} - a(\xi)e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}$ *и* $F[K_a](\xi) = a(\xi)$ *для п.в.* $\xi \in \mathbb{R}^d$, *является оптимальным.*

Если $Y = y_{s_j}$, $1 \le j \le k$, *то метод* $\hat{\varphi}$, *определенный формулой* $\hat{\varphi}(z_1(\cdot), \ldots, z_n(\cdot))(\cdot) = z_{s_j}(\cdot)$, *является оптимальным.*

Если $Y > y_{s_k}$, *то метод* $\hat{\varphi}$, *определенный формулой* $\hat{\varphi}(z_1(\cdot), \ldots, z_n(\cdot))(\cdot) = (K * z_{s_k})(\cdot)$, *где* $F[K](\xi) = e^{-(Y-y_{s_k})|\xi|}$ *для п.в.* $\xi \in \mathbb{R}^d$, *является оптимальным.*

Сделаем некоторые замечания по поводу сформулированной теоремы.

1. Если $y_1 > 0$ и $0 \le Y < y_1$, то $\omega(Y) = -\infty$ и тем самым $E(Y) = +\infty$, т.е. прошлое нельзя восстановить по неточному настоящему. В этом случае любой метод можно считать оптимальным.

2. Из неравенства (3) следует, что функции $a(\cdot)$ ограничены, а так как они равны нулю за пределами некоторого шара, то они принадлежат и $L_2(\mathbb{R}^d)$. Следовательно, формулы для оптимальных методов определены корректно.

3. Оптимальные методы линейны, “сглаживают” наблюдения и используют информацию о не более чем двух измерениях.

4. Если $Y = y_i$ и y_i не является точкой излома функции $\omega(\cdot)$, то оптимальный метод позволяет данное измерение уточнить.

5. Случай $Y > y_{s_k}$ означает, что оптимальный метод есть решение задачи Дирихле на гиперплоскости $y = Y - y_{s_k}$ с начальной функцией $z_{s_k}(\cdot)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Начнем с доказательства того, что

$$E(Y) \geq e^{-\omega(Y)} \tag{4}$$

для любого $Y \geq 0$.

Пусть $Y \geq 0$. Покажем сначала, что $E(Y)$ не меньше значения следующей задачи

$$\begin{gathered}\|u(\cdot, Y, f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|u(\cdot, y_i, f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i, \quad i = 1, \ldots, n, \\ f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d),\end{gathered} \tag{5}$$

т.е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Действительно, пусть функция $f_0(\cdot)$ допустима в задаче (5) (т.е. удовлетворяет ограничениям этой задачи). Тогда функция $-f_0(\cdot)$ также допустима, поскольку $u(\cdot, y, -f_0) = -u(\cdot, y, f_0)$, и мы имеем для любого метода φ

$$\begin{aligned}2\|u(\cdot, Y, f_0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|u(\cdot, Y, f_0) - \varphi(0) - (-u(\cdot, Y, f_0) - \varphi(0))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \\ &\leq \|u(\cdot, Y, f_0) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|u(\cdot, Y, -f_0) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|u(\cdot, y_i, f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i,\ i = 1, \ldots, n}} \|u(\cdot, Y, f) - \varphi(0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d),\ \overline{z}(\cdot) \in (L_2(\mathbb{R}^d))^n, \\ \|u(\cdot, y_i, f) - z_i(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i,\ i = 1, \ldots, n}} \|u(\cdot, Y, f) - \varphi(\overline{z}(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 2e(Y, \varphi).\end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям в задаче (5), а затем справа к нижней грани по всем методам φ, получим, что

$$\sup_{\substack{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|u(\cdot, y_i, f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_i,\ i = 1, \ldots, n}} \|u(\cdot, Y, f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq E(Y). \tag{6}$$

Это и означает, что погрешность оптимального восстановления $E(Y)$ не меньше значения задачи (5). Найдем теперь это значение.

Хорошо известно (см., например, [14]), что

$$F[u(\cdot, y, f)](\xi) = e^{-y|\xi|} F[f](\xi)$$

для любого $y > 0$ и для п.в. $\xi \in \mathbb{R}^d$. Тогда согласно теореме Планшереля

$$\int_{\mathbb{R}^d} |u(x, y, f)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi.$$

Отсюда получаем, что квадрат значения задачи (5) равен значению такой задачи:

$$\begin{gathered}\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 \, d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2y_i|\xi|} |F[f](\xi)|^2 \leq \delta_i^2, \quad i = 1, \ldots, n, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).\end{gathered} \tag{7}$$

Можно считать, что переменными здесь являются положительные меры $d\mu_f(\xi) = (2\pi)^{-d}\left|F[f](\xi)\right|^2 d\xi$ на $\mathbb{R}^d$, порожденные функциями $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Для нахождения значения данной задачи удобно рассмотреть более общую постановку, а именно, задачу на множестве всех положительных борелевских мер на $\mathbb{R}^d$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|}d\mu(\xi) \to \max, \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2y_i|\xi|}d\mu(\xi) \le \delta_i^2, \quad i = 1, \ldots, n, \quad d\mu(\cdot) \ge 0. \tag{8}$$

Сопоставим этой задаче следующую функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot), \lambda) = -\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|}d\mu(\xi) + \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2y_i|\xi|}d\mu(\xi) - \delta_i^2\right),$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ – набор множителей Лагранжа.

Нетрудно проверить, что если существует допустимая в задаче (8) мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ и набор множителей Лагранжа $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n)$ такие, что выполняются условия

а) $\min\limits_{d\mu(\cdot)\ge 0} L(d\mu(\cdot), \hat{\lambda}) = L(d\hat{\mu}(\cdot), \hat{\lambda})$;

б) $\hat{\lambda}_i \ge 0, \quad 1 \le i \le n$;

в) $\hat{\lambda}_i \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2y_i|\xi|}d\hat{\mu}(\xi) - \delta_i^2\right) = 0,\ i = 1, \ldots, n$,

то $d\hat{\mu}(\cdot)$ – решение задачи (8).

Действительно, для любой допустимой в задаче (8) меры $d\mu(\cdot)$ имеем, используя б), а затем а) и в):

$$-\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|}d\mu(\xi) \ge -\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|}d\mu(\xi) + \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2y_i|\xi|}d\mu(\xi) - \delta_i^2\right) \ge$$
$$\ge -\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|}d\hat{\mu}(\xi) + \sum_{i=1}^n \hat{\lambda}_i \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2y_i|\xi|}d\hat{\mu}(\xi) - \delta_i^2\right) = -\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|}d\hat{\mu}(\xi),$$

т.е. $d\hat{\mu}(\cdot)$ – решение задачи (8).

Предъявим теперь допустимую в задаче (8) меру $d\hat{\mu}(\cdot)$ и набор множителей Лагранжа $\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_n)$, для которых выполняются условия а)–в).

Рассмотрим отдельно несколько случаев.

1) Пусть $Y \in [y_1, y_{s_k})$. Тогда $Y \in [y_{s_j}, y_{s_{j+1}})$ для некоторого $1 \le j \le k-1$. Пусть сначала $Y > y_{s_j}$.

Фиксируем вектор $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ такой, что

$$|\xi_0| = \frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}}) - \ln(1/\delta_{s_j})}{y_{s_{j+1}} - y_{s_j}}. \tag{9}$$

Определение корректно, так как выражение справа положительно по построению ломаной $\omega(\cdot)$.

Положим

$$C = \delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}} \delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}} \tag{10}$$

и определим меру $d\hat{\mu}(\cdot)$ по формуле $d\hat{\mu}(\cdot) = C\delta(\cdot - \xi_0)$, где $\delta(\cdot - \xi_0)$ – мера Дирака в точке ξ_0. Ясно, что это положительная борелевская мера на $\mathbb{R}^d$. Покажем, что она допустима в задаче (8).

Действительно, все точки $(y_i, \ln(1/\delta_i))$, $i = 1, 2, \ldots, n$, лежат не выше графика ломаной $\omega(\cdot)$, а так как эта ломаная вогнута, то ее график лежит не выше прямой

$$p(y)=\frac{\ln(1/\delta_{s_{j+1}})-\ln(1/\delta_{s_j})}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}(y-y_{s_j})+\ln\frac{1}{\delta_{s_j}}=\ln\delta_{s_j}^{\frac{y-y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{y_{s_j}-y}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}},$$

соединяющей точки и $(y_{s_j},\ln(1/\delta_{s_j}))$ и $(y_{s_{j+1}},\ln(1/\delta_{s_{j+1}}))$. Используя это обстоятельство и выражения для C и $|\xi_0|$, будем иметь

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2y_i|\xi|}d\hat{\mu}(\xi)=Ce^{-2y_i|\xi_0|}=\delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}}-y_i}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{y_i-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}=e^{-2p(y_i)}\le e^{-2\ln\frac{1}{\delta_i}}=\delta_i^2,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

т.е. мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (8).

Пусть набор множителей Лагранжа $\hat{\lambda}=(\hat{\lambda}_1,\hat{\lambda}_2,\ldots,\hat{\lambda}_n)$ таков, что $\hat{\lambda}_{s_j}$ и $\hat{\lambda}_{s_{j+1}}$ – те, что определены перед формулировкой теоремы и $\hat{\lambda}_i=0$, если $i\ne s_j,s_{j+1}$.

Проверим, что с мерой $d\hat{\mu}(\cdot)$ и набором $\hat{\lambda}$ выполняются выписанные выше условия а)–в).

Ясно, что $\hat{\lambda}_i\ge 0$, $i=1,\ldots,n$, и тем самым условие б) выполнено. Проверим выполнение условия а).

Запишем функцию Лагранжа с данным набором $\hat{\lambda}$ в виде

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\hat{\lambda})=\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2Y|\xi|}h(|\xi|)\,d\mu(\xi)-\hat{\lambda}_{s_j}\delta_{s_j}^2-\hat{\lambda}_{s_{j+1}}\delta_{s_{j+1}}^2,$$

где

$$h(\alpha)=-1+\hat{\lambda}_{s_j}e^{-2(y_{s_j}-Y)\alpha}+\hat{\lambda}_{s_j+1}e^{-2(y_{s_{j+1}}-Y)\alpha},\quad \alpha\in\mathbb{R}. \tag{11}$$

Несложный подсчет показывает, что $h(|\xi_0|)=h'(|\xi_0|)=0$, и поскольку функция $\alpha\mapsto h(\alpha)$, очевидно, выпукла, то $h(\alpha)\ge 0$ для всех $\alpha\in\mathbb{R}$. Учитывая это, будем иметь для любого $d\mu(\cdot)\ge 0$

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\hat{\lambda})\ge-\hat{\lambda}_{s_j}\delta_{s_j}^2-\hat{\lambda}_{s_j+1}\delta_{s_{j+1}}^2=Ce^{-2Y|\xi_0|}h(|\xi_0|)-\hat{\lambda}_{s_j}\delta_{s_j}^2-$$
$$-\hat{\lambda}_{s_j+1}\delta_{s_{j+1}}^2=\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2Y|\xi|}h(|\xi|)d\hat{\mu}(\xi)-\hat{\lambda}_{s_j}\delta_{s_j}^2-\hat{\lambda}_{s_j+1}\delta_{s_{j+1}}^2=\mathcal{L}(d\hat{\mu}(\cdot),\hat{\lambda}),$$

т.е. выполнено условие а).

Далее, легко проверить, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2y_k|\xi|}d\hat{\mu}(\xi)=Ce^{-2y_k|\xi_0|}=\delta_k^2,\quad k=s_j,s_{j+1}, \tag{12}$$

и, значит, выполнено условие (c).

Итак, вследствие доказанного выше, мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ является решением задачи (8).

Подставляя меру $d\hat{\mu}(\cdot)$ в максимизируемый функционал в задаче (8), найдем ее значение:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2Y|\xi|}d\hat{\mu}(\xi)=Ce^{-2Y|\xi_0|}=\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{-\frac{2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}e^{-2Y\frac{\ln(\delta_{s_j}/\delta_{s_{j+1}})}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}=\delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}}-Y}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{Y-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}=e^{-2p(Y)}=e^{-2\omega(Y)}.$$

Случай, когда $Y=y_{s_j}$, рассматривается аналогично, но проще и поэтому на нем не останавливаемся.

2) Пусть $Y\ge y_{s_k}$. Положим $\hat{\lambda}_{s_k}=1$, $\hat{\lambda}_i=0$, $i\ne s_k$ и $d\hat{\mu}(\cdot)=\delta_{s_k}^2\delta(\cdot)$, где $\delta(\cdot)$ – функция Дирака в нуле. Функция $h\mapsto h(\alpha)$ в данном случае имеет вид

$$h(\alpha)=-1+e^{-2(y_{s_k}-Y)\alpha}.$$

Следовательно, $h(|\xi|)\ge 0$ для всех $\xi\in\mathbb{R}^d$, и ясно, что $h(0)=0$. Тогда те же рассуждения, что и выше, показывают, что справедливо условие а).

На полупрямой $[t_{s_k},\infty)$ функция $\omega(\cdot)$ тождественно равна $\ln(1/\delta_{s_k})$, и понятно, что $\ln(1/\delta_i)\le\ln(1/\delta_{s_k})$, $1\le i\le n$. Отсюда получаем, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2y_i|\xi|}d\hat{\mu}(\xi)=\delta_{s_k}^2=e^{-2\ln\frac{1}{\delta_{s_k}}}\le e^{-2\ln\frac{1}{\delta_i}}=\delta_i^2,\quad i=1,\ldots,n,$$

т.е. мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ допустима в задаче (8) и, в частности, выполнено условие в).

Таким образом, мера $d\hat{\mu}(\cdot)$ – решение задач (8) и значение этой задачи таково

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2Y|\xi|}d\hat{\mu}(\xi)=\delta_{s_k}^2e^{-2\ln\frac{1}{\delta_{s_k}}}=e^{-2\omega(Y)}.$$

3) Пусть $y_1>0$ и $Y<y_1$. Покажем, что в этом случае значение задачи (8) равно $+\infty$. Пусть $t_0<0$. Существует, очевидно, прямая $t=ay+b$, $a>0$, которая разделяет точку (Y,t_0) и множество M, т.е. $t_0-aY\ge b\ge t-ay$ для любой пары $(t,y)\in M$. В частности,

$$t_0-aY\ge b\ge\ln\frac{1}{\delta_i}-ay_i,\quad 1\le i\le n. \tag{13}$$

Обозначая $C=e^{-2b}$ и выбирая $\xi_0\in\mathbb{R}^d$ так, чтобы $|\xi_0|^2=a$, получаем из неравенств справа в (13), что $C\exp(-2|\xi_0|^2y_i)\le\delta_i^2$, $1\le i\le n$, т.е. мера Дирака в точке ξ_0, умноженная на C, допустима в задаче (8). Из левого неравенства в (13) следует, что $C\exp(-2|\xi_0|^2Y)\ge\exp(-2t_0)$. Это означает (в силу произвольности t_0), что значение задачи (8) равно $+\infty$. Отсюда, как и в предыдущих случаях, следует, что значение задачи (1) равно $+\infty$.

Итак, доказано, что значение задачи (8) равно $e^{-2\omega(Y)}$ для всех $Y\ge0$.

Очевидно, что значение задачи (8) не меньше значения задачи (7). Покажем, что на самом деле эти значения совпадают.

Пусть $Y\in[y_{s_j},y_{s_{j+1}})$, $1\le j\le k-1$, и вектор $\xi_0=(\xi_{01},\ldots,\xi_{0d})$ (см. (9)) такой, что $\xi_{0i}\ge0$, $i=1,\ldots,d$. Для каждого $k\in\mathbb{N}$ положим $\square_k=\{\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d:\xi_{0i}\le\xi_i\le\xi_{0i}+1/k,\ i=1,\ldots,d\}$ и определим функцию $\psi_k(\cdot)$, $k\in\mathbb{N}$, по формуле

$$\psi_k(\xi)=\begin{cases}(2\pi k)^{d/2}\delta_{s_j}^{\frac{y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}, & \xi\in\square_k;\\ 0, & \xi\notin\square_k.\end{cases}$$

Ясно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $\varphi_k(\cdot)=F^{-1}[\psi_k](\cdot)$ (F^{-1} – обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$) и покажем, что функции $\varphi_k(\cdot)$, $k\in\mathbb{N}$, допустимы в задаче (7).

Действительно, если $\xi\in\square_k$, то $|\xi_0|\le|\xi|\le|\xi_0|+\sqrt{d}/k$ и мы имеем

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2y_i|\xi|}|F[\varphi_k](\xi)|^2d\xi=k^d\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\int\limits_{\square_k}e^{-2y_i|\xi|}d\xi\le e^{-2y_i|\xi_0|}\delta_{s_j}^{\frac{y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}=$$

$$=\delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}}-y_i}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{y_i-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}=e^{-2p(y_i)}\le e^{-2\ln\frac{1}{\delta_i}}=\delta_i^2,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

т.е. функции $\varphi_k(\cdot)$, $k\in\mathbb{N}$, допустимы в задаче (7).

Значение максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях таково

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2Y|\xi|}|F[\varphi_k](\xi)|^2d\xi=k^d\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\int\limits_{\square_k}e^{-2Y|\xi|}d\xi\ge e^{-2Y\sqrt{d}/k}e^{-2Y|\xi_0|}\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}.$$

Если $k\to\infty$, то это выражение стремится к величине

$$e^{-2Y|\xi_0|}\delta_{s_j}^{\frac{2y_{s_{j+1}}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{\frac{-2y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}} = \delta_{s_j}^{2\frac{y_{s_{j+1}}-Y}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}\delta_{s_{j+1}}^{2\frac{Y-y_{s_j}}{y_{s_{j+1}}-y_{s_j}}}e^{-2p(Y)} = e^{-2\omega(Y)}$$

и значит, значение задачи (7) равно $e^{-2\omega(Y)}$.

В случаях, когда $Y \geq y_{s_k}$ или $0 \leq Y < y_1$, рассуждения аналогичны (и проще) и поэтому мы их опускаем.

Итак, для всех $Y \geq 0$ доказано, что значение задачи (7) равно $e^{-2\omega(Y)}$ и тем самым, в силу (6), справедлива оценка (4).

Перейдем теперь к построению оптимальных методов восстановления. Здесь также рассматриваем несколько случаев.

1) Пусть $Y \in (y_{s_j}, y_{s_{j+1}})$, $1 \leq j \leq k-1$. Поскольку в полученной выше оценке снизу для $E(Y)$ участвуют измерения только на гиперплоскостях $y = y_{s_j}$ и $y = y_{s_{j+1}}$, то оптимальные методы будем искать среди тех методов, которые используют только эти измерения. Кроме того, мы восстанавливаем линейный оператор, который в образах Фурье есть умножение на некоторую функцию из $L_\infty(\mathbb{R}^d)$. В этой связи будем искать оптимальные методы среди методов вида

$$\varphi(z_1(\cdot), \ldots, z_n(\cdot)) = \Lambda_j z_{s_j}(\cdot) + \Lambda_{j+1} z_{s_{j+1}}(\cdot).$$

Здесь $\Lambda_k L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $k = j, j+1$, — операторы, которые в образах Фурье действуют для п.в. $\xi \in \mathbb{R}^d$ и любых $z(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ по правилу

$$F[\Lambda_k z](\xi) = a_k(\xi) F[z](\xi), \quad k = j, j+1,$$

где $a_k(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, $k = j, j+1$.

Ясно, что Λ_j и Λ_{j+1} — линейные операторы и легко убедиться, используя теорему Планшереля, что они непрерывны.

Наша цель — найти такие функции $a_j(\cdot)$ и $a_{j+1}(\cdot)$, что погрешность соответствующего метода указанного вида не будет превосходить $e^{-\omega(Y)}$. Тогда в силу оценки (4) такой метод будет оптимальным.

Пусть $a_k(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, $k = j, j+1$. Погрешность метода, соответствующего этим функциям, по определению есть значение следующей задачи

$$\begin{gathered} \left\| u(\cdot, Y, f) - \Lambda_j z_{s_j}(\cdot) - \Lambda_{j+1} z_{s_{j+1}}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \\ \left\| u(\cdot, y_{s_k}, f) - z_{s_k}(\cdot) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \delta_{s_k}, \quad z_{s_k}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad k = j, j+1, \quad f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d). \end{gathered} \tag{14}$$

Переходя к образам Фурье, получим, согласно теореме Планшереля, что квадрат значения задачи (14) равен значению такой задачи

$$\begin{gathered} \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-Y|\xi|} F[f](\xi) - a_j(\xi) F[z_{s_j}](\xi) - a_{j+1}(\xi) F[z_{s_{j+1}}](\xi) \right|^2 d\xi \to \max, \\ \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left| e^{-y_{s_k}|\xi|} F[f](\xi) - F[z_{s_k}](\xi) \right|^2 d\xi \leq \delta_{s_k}^2, \quad z_{s_k}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ k = j, j+1, \quad f(\cdot) \in L_2(R^d). \end{gathered} \tag{15}$$

Пусть $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $z_{s_k}(\cdot) = u(\cdot, y_{s_k}, f)$, $k = j, j+1$. Тогда тройка $(f(\cdot), z_{s_j}(\cdot), z_{s_{j+1}}(\cdot))$ допустима в задаче (14) и подынтегральное выражение в максимизируемом функционале на этой тройке в задаче (15) запишется в виде

$$\begin{aligned} &\left| e^{-Y|\xi|} F[f](\xi) - a_j(\xi) e^{-y_{s_j}|\xi|} F[f](\xi) - a_{j+1}(\xi) e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|} F[f](\xi) \right|^2 = \\ &= \left| \left(e^{-Y|\xi|} - a_j(\xi) e^{-y_{s_j}|\xi|} - a_{j+1}(\xi) e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|} \right) F[f](\xi) \right|^2. \end{aligned}$$

Если выражение в круглых скобках в правой части этого равенства отлично от нуля на множестве положительной меры, то легко подобрать такую функцию $f(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, что все выражение справа будет положительно на некотором множестве положительной меры. Тогда умножая $f(\cdot)$ на достаточно большое по модулю число, получаем, что максимизируемый интеграл в задаче (15) может принимать сколь угодно большие значения, т.е. значение этой задачи (а значит, и задачи (14)) равно $+\infty$. Поскольку нас интересуют методы, погрешность которых не превосходит $e^{-\omega(Y)}$, то этот случай нам не интересен. Поэтому далее считаем, что функции $a_j(\cdot)$ и $a_{j+1}(\cdot)$ связаны соотношением

$$e^{-Y|\xi|}-a_j(\xi)e^{-y_{s_j}|\xi|}-a_{j+1}(\xi)e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}=0 \tag{16}$$

для п.в. $\xi\in\mathbb{R}^d$.

С учетом этого равенства выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале в задаче (15) можно записать следующим образом:

$$\left|a_j(\xi)\left(e^{-y_{s_j}|\xi|}F[f](\xi)-F[z_{s_j}](\xi)\right)+a_{j+1}(\xi)\left(e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}F[f](\xi)-F[z_{s_{j+1}}](\xi)\right)\right|^2. \tag{17}$$

Оценим это выражение. Пусть $\hat\lambda_{s_j}$ и $\hat\lambda_{s_{j+1}}$ – множители Лагранжа, определенные перед формулировкой теоремы. Тогда продолжая (17), будем иметь по неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{gathered}\left|\frac{a_j(\xi)}{\sqrt{\hat\lambda_{s_j}}}\sqrt{\hat\lambda_{s_j}}\left(e^{-y_{s_j}|\xi|}F[f](\xi)-F[z_{s_j}](\xi)\right)+\frac{a_{j+1}(\xi)}{\sqrt{\hat\lambda_{s_{j+1}}}}\sqrt{\hat\lambda_{s_j}}\left(e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}F[f](\xi)-F[z_{s_{j+1}}](\xi)\right)\right|^2\le\\ \le\left(\frac{|a_j(\xi)|^2}{\hat\lambda_{s_j}}+\frac{|a_{j+1}(\xi)|^2}{\hat\lambda_{s_j+1}}\right)\left(\hat\lambda_{s_j}\left|e^{-y_{s_j}|\xi|}F[f](\xi)-F[z_{s_j}](\xi)\right|^2+\hat\lambda_{s_j+1}\left|e^{-y_{s_{j+1}}|\xi|}F[f](\xi)-F[z_{s_{j+1}}](\xi)\right|^2\right).\end{gathered} \tag{18}$$

Обозначим через $S(\cdot)$ функцию в больших скобках в правой части этого неравенства. Ясно, что $S(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Слева в этом неравенстве – выражение под знаком интеграла в максимизируемом функционале в задаче (15). Интегрируя неравенство (18) и учитывая ограничения в задаче (15), получаем, что ее значение не превосходит величины

$$\|S(\cdot)\|_{L_\infty(R^d)}(\hat\lambda_{s_j}\delta_{s_j}^2+\hat\lambda_{s_{j+1}}\delta_{s_{j+1}}^2). \tag{19}$$

Покажем, что

$$\hat\lambda_{s_j}\delta_{s_j}^2+\hat\lambda_{s_{j+1}}\delta_{s_{j+1}}^2=e^{-2\omega(Y)}. \tag{20}$$

Действительно, используя то, что $e^{-2\omega(Y)}$ есть решение задачи (8), равенства (12) и то, что $h(|\xi_0|)=0$, приходим к нужному равенству:

$$\begin{gathered}-e^{-2\omega(Y)}=-\int_{\mathbb{R}^d}e^{-2Y|\xi|}d\hat\mu(\xi)+\hat\lambda_{s_j}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-2y_{s_j}|\xi|}d\hat\mu(\xi)-\delta_{s_j}^2\right)+\hat\lambda_{s_{j+1}}\left(\int_{\mathbb{R}^d}e^{-2y_{s_{j+1}}|\xi|}d\hat\mu(\xi)-\delta_{s_{j+1}}^2\right)=\\ =\int_{\mathbb{R}^d}e^{-2Y|\xi|}h(|\xi|)d\hat\mu(\xi)-\hat\lambda_{s_j}\delta_{s_j}^2-\hat\lambda_{s_j+1}\delta_{s_{j+1}}^2=Ce^{-2Y|\xi_0|}h(|\xi_0|)-\hat\lambda_{s_j}\delta_{s_j}^2-\hat\lambda_{s_j+1}\delta_{s_{j+1}}^2=-\hat\lambda_{s_j}\delta_{s_j}^2-\hat\lambda_{s_j+1}\delta_{s_{j+1}}^2.\end{gathered}$$

Из (19) и (20) следует, что значение задачи (15) не превосходит величины $\|S(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}e^{-2\omega(Y)}$. Сравнивая это с неравенством (4), видим, что если функции $a_j(\cdot)$ и $a_{j+1}(\cdot)$, связанные соотношением (16), таковы, что $\|S(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\le 1$, то соответствующий метод оптимален.

Обозначим $a(\cdot)=a_{j+1}(\cdot)$. Тогда $a_j(\xi)=e^{-(Y-y_{s_j})|\xi|}-a(\xi)e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}$ для п.в. $\xi\in\mathbb{R}^d$ в силу (16). В этих обозначениях условие $\|S(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}^d)}\le 1$ равносильно тому, что

$$\frac{\left|e^{-(Y-y_{s_j})|\xi|}-a(\xi)e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}\right|^2}{\hat{\lambda}_{s_j}}+\frac{|a(\xi)|^2}{\hat{\lambda}_{s_j+1}}\le 1 \tag{21}$$

для п.в. $\xi\in\mathbb{R}^d$, и, следовательно, задача о нахождении оптимальных методов свелась к нахождению таких функций $a(\cdot)\in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, для которых справедливо соотношение (21).

Выделяя полный квадрат, нетрудно проверить, что (21) равносильно такому неравенству

$$\left|a(\xi)-\frac{\hat{\lambda}_{s_{j+1}}e^{-(Y-y_{s_j})|\xi|}}{\hat{\lambda}_{s_j}e^{(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}+\hat{\lambda}_{s_{j+1}}e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}}\right|\le\frac{\sqrt{\hat{\lambda}_{s_j}\hat{\lambda}_{s_{j+1}}}e^{y_{s_{j+1}}|\xi|}}{\hat{\lambda}_{s_j}e^{(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}+\hat{\lambda}_{s_{j+1}}e^{-(y_{s_{j+1}}-y_{s_j})|\xi|}}\sqrt{g(\xi)}, \tag{22}$$

где $g(\xi)=\hat{\lambda}_{s_j}e^{-2y_{s_j}|\xi|}+\hat{\lambda}_{s_{j+1}}e^{-2y_{s_{j+1}}|\xi|}-e^{-2Y|\xi|}$. Поскольку $g(\xi)=e^{-2Y|\xi|}h(|\xi|)$, где функция $\alpha\mapsto h(\alpha)$ на $\mathbb{R}$, определенная формулой (11), неотрицательна, то функция $g(\cdot)$ также неотрицательна.

Функции $a(\cdot)$, удовлетворяющие соотношению (22), очевидно, существуют. Тем самым каждая такая функция удовлетворяет неравенству (21) и при этом, в силу определения γ_j, данное неравенство сохранится, если $a(\xi)=0$, когда $\xi\notin B(\gamma_j)$. Таким образом, для случая, когда $Y\in(y_{s_j},y_{s_{j+1}})$, $1\le j\le k-1$, оптимальные методы построены.

Случаи, когда $Y=y_{s_j}$, $1\le j\le k$, и $Y>y_{s_k}$ рассматриваются аналогично, но значительно проще, и поэтому на этом останавливать не будем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Смоляк С.А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс. М.: МГУ, 1965.
2. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* A survey of optimal recovery. In: Optimal Estimation in Approximation Theory (C.A. Micchelli and T.J. Rivlin, Eds.). P. 1–54. New York: Plenum Press, 1977.
3. *Melkman A.A., Micchelli C.A.* Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal. 1979. P. 87–105.
4. *Micchelli C.A., Rivlin T.J.* Lectures on Optimal Recovery. Lecture Notes in Mathematics. V. 1129. P. 21–93. Berlin: Springer–Verlag, 1985.
5. *Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О неравенствах для производных колмогоровского типа // Матем. сб. 1997. Т. 187. № 12. С. 73–106.
6. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функц. анализ и его прил. 2003. Т. 37. С. 51–64.
7. *Magaril-Il'yaev G.G., Osipenko K.Yu., Tikhomirov V.M.* On Optimal Recovery of Heat Equation Solutions. In Approximation Theory: A Volume Dedicated to B. Bojanov, Ed. by D.K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev. Marin Drinov Acad. Publ. House, Sofia. 2004. P. 163–175.
8. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. С. 76–79.
9. *Магарил-Ильяев Г.Г., Сивкова Е.О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру // Матем. сб. 2012. Т. 203. № 4. С. 119–130.
10. *Балова Е.А.* Об оптимальном восстановлении решений задачи Дирихле по неточным исходным данным // Матем. заметки. 2007. Т. 82. № 3. С. 323–334.
11. *Магарил-Ильяев Г.Г., Осипенко К.Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям // Матем. сб. 2009. Т. 200. № 5. С. 37–54.
12. *Абрамова Е.В.* Восстановление решения задачи Дирихле по неточным граничным данным // Владикавк. матем. журн. 2015. Т. 17. № 1. С. 3–13.
13. *Magaril-Il'yaev G.G., Sivkova E.O.* Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data // Eurasian Mathematical Journal. 2019. Т. 10. С. 4.
14. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. М.: Мир, 1974.