ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2016, том 467, № 5, с. 505–508

МАТЕМАТИКА

УДК 517.977.52

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА. РЕЛАКСАЦИЯ. УПРАВЛЯЕМОСТЬ

© 2016 г. Е. Р. Аваков[1], Г. Г. Магарил-Ильяев[2, 3]

Представлено академиком РАН Р.В. Гамкрелидзе 23.11.2015 г.
Поступило 27.11.2015 г.

Работа посвящена исследованию взаимосвязей необходимых условий минимума в задаче оптимального управления (принципа максимума Понтрягина), условий минимума в соответствующей релаксационной (ослабленной) задаче и достаточных условий локальной управляемости управляемой системы, задающей ограничения в исходной постановке. Рассматривается абстрактная экстремальная задача, моделирующая основные свойства задачи оптимального управления.

DOI: 10.7868/S0869565216110037

Пусть X и Y — нормированные пространства, $\mathcal{U}$ — топологическое пространство, G — открытое подмножество $\mathbb{R}^n \times X$, $f\colon G \to \mathbb{R}$, $h_i\colon G \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$, и $l_i\colon G \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m_2$, — функции переменных $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $x \in X$, а $F\colon G \times \mathcal{U} \to Y$ — отображение переменных ξ, x и $u \in \mathcal{U}$.

Рассмотрим задачу

$$
\begin{gathered}
f(\xi, x) \to \min, \quad F(\xi, x, u) = 0, \quad u \in \mathcal{U}, \\
h_i(\xi, x) \le 0, \\
i = 1, 2, \ldots, m_1, \quad l_i(\xi, x) = 0, \\
i = 1, 2, \ldots, m_2.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Допустимая в этой задаче точка $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ называется сильным минимумом, если найдется такая окрестность $W \subset G$ точки $(\hat{\xi}, \hat{x})$, что $f(\xi, x) \ge f(\hat{\xi}, \hat{x})$ для всех допустимых точек $(\xi, x, u) \in W \times \mathcal{U}$.

Положим $h = (h_1, \ldots, h_{m_1})^{\mathrm{T}}$, $l = (l_1, \ldots, l_{m_2})^{\mathrm{T}}$ ($\mathbb{R}^n$ понимается как совокупность вектор-столбцов, T — знак транспонирования). Тройку отображений (F, h, l), задающих ограничения в задаче (1), назовем управляемой системой.

Наряду с задачей (1) рассмотрим также следующую постановку. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и отображение $\mathcal{F}_k$: $\mathbb{R}^k \times G \times \mathcal{U}^{k+1} \to Y$ определено равенством

$$
\mathcal{F}_k(\alpha, \xi, x, \mathbf{u}) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i\right) F(\xi, x, u_0) + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i F(\xi, x, u_i),
$$

где $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_k)$, и пусть $\Sigma^k = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^k_+ : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \le 1\}$.

Задачу

$$
\begin{gathered}
f(\xi, x) \to \min, \quad \mathcal{F}_k(\alpha, \xi, x, \mathbf{u}) = 0, \\
\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_k) \in \mathcal{U}^{k+1}, \\
\alpha \in \Sigma^k, \quad h_i(\xi, x) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1, \\
l_i(\xi, x) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_2,
\end{gathered} \tag{2}
$$

относительно переменных α, ξ, x и $\mathbf{u}$ назовем релаксацией задачи (1).

Допустимая в этой задаче точка $(\hat{\alpha}, \hat{\xi}, \hat{x}, \hat{\mathbf{u}})$ называется локальным минимумом, если найдется такая окрестность $\mathcal{W} \subset \Sigma^k \times G \times \mathcal{U}^{k+1}$ точки $(\hat{\alpha}, \hat{\xi}, \hat{x}, \hat{\mathbf{u}})$, что $f(\xi, x) \ge f(\hat{\xi}, \hat{x})$ для всех допустимых точек $(\alpha, \xi, x, \mathbf{u}) \in \mathcal{W}$.

Идея рассмотрения релаксации задачи оптимального управления впервые была предложена Р.В. Гамкрелидзе (см. [2, 3]). Рассматриваемая здесь релаксационная задача имеет несколько иной характер.

Помимо необходимых условий минимума в задачах (1) и (2) нас будут интересовать тесно связанные с этими условиями вопросы управляемости управляемой системы (F, h, l).

[1] *Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской Академии наук, Москва*
[2] *Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*
[3] *Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича Российской Академии наук, Москва*
E-mail: magaril@mech.math.msu.su

Определение 1. Пусть $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ – допустимая точка в задаче (1). Скажем, что управляемая система (F, h, l) локально управляема относительно точки $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$, если для каждой окрестности W точки $(\hat{\xi}, \hat{x})$ существует окрестность W_1 нуля в $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ такая, что для любого $y = (y_1, y_2) \in W_1$ найдется элемент $(\xi_y, x_y, u_y) \in W \times \mathcal{U}$, для которого $F(\xi_y, x_y, u_y) = 0$, $h(\xi_y, x_y) \le y_1$ (неравенство понимается покоординатно) и $l(\xi_y, x_y) = y_2$.

Задача (1) представляет собой, как уже говорилось, абстрактную модель задачи оптимального управления. Предположения ниже – это абстрактные варианты предположений и свойств, которые выполняются в стандартной задаче оптимального управления.

Основные предположения:

1) X и Y – банаховы пространства;

2) функция f и отображения h и l непрерывно дифференцируемы на G, отображение F непрерывно на $G \times \mathcal{U}$ вместе со своей производной по (ξ, x);

3) для каждого набора $\mathbf{u} = (u_0, u_1, \ldots, u_k) \in \mathcal{U}^{k+1}$, каждого вектора $\alpha \in \Sigma^k$ и каждого числа $\nu > 0$ найдется такой элемент $M_\nu(\alpha, \mathbf{u}) \in \mathcal{U}$ (который назовем миксом элементов $u_0, u_1, \ldots, u_k$), что $M_\nu(0, \mathbf{u}) = u_0$ для любого ν, а отображение $(\alpha, \mathbf{u}) \mapsto M_\nu(\alpha, \mathbf{u})$ непрерывно на $\Sigma^k \times \mathcal{U}^{k+1}$ равномерно по ν. Кроме того, для любой точки $(\hat{\xi}, \hat{x}) \in G$ существует такая ее окрестность W_0, что

$$F(\xi, x, M_\nu(\alpha, \mathbf{u})) \to \mathcal{F}_k(\alpha, \xi, x, \mathbf{u})$$

при $\nu \to 0$ равномерно по $(\alpha, \xi, x) \in \Sigma^k \times W_0$.

Последнее условие означает, в частности, что замыкание образа отображения $u \mapsto F(\xi, x, u)$ из $\mathcal{U}$ в Y есть выпуклое множество. В задаче оптимального управления, где F – интегральный оператор, соответствующий дифференциальной связи, это всегда выполняется. Понятие микса впервые появилось в работе В.М. Тихомирова [4] (см. также [6]). Микс позволяет неким регулярным образом "добраться" до любой точки из замыкания образа указанного отображения.

Теперь приведем условия регулярности задачи (1). Эти условия, как будет видно из формулируемых ниже утверждений, гарантируют, с одной стороны, "содержательность" необходимых условий минимума в этой задаче, а с другой, управляемость управляемой системы (F, h, l). Но сначала некоторые обозначения.

Пусть Y^* – сопряженное к нормированному пространству Y. Через $\langle y^*, y\rangle$ обозначаем значение линейного функционала $y^* \in Y^*$ на элементе $y \in Y$. Сопряженное $(\mathbb{R}^n)^*$ к $\mathbb{R}^n$ отождествляется с вектор-строками; $(\mathbb{R}^n)^*_+$ – конус положительных функционалов на $\mathbb{R}^n$ (т.е. неотрицательных вектор-строк). Через $|x|$ обозначаем евклидову норму элемента из $\mathbb{R}^n$ или $(\mathbb{R}^n)^*$.

Всюду ниже, если фиксирована точка $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$, то для производных по ξ и x в этой точке, для краткости записи, пишем $\hat{F}_\xi = F_\xi(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$, $\hat{F}_x = F_x(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$, $\hat{f}_\xi = f_\xi(\hat{\xi}, \hat{x})$, $\hat{f}_x = f_x(\hat{\xi}, \hat{x})$ и аналогично для отображений h и l; $\hat{F}^*_\xi$ и $\hat{F}^*_x$ – сопряженные операторы к операторам $\hat{F}_\xi$ и $\hat{F}_x$, и аналогичная запись для сопряженных операторов к $\hat{h}_\xi$, $\hat{h}_x$ и т.д.

Определение 2. Пусть $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ – допустимая точка в задаче (1). Скажем, что управляемая система (F, h, l) регулярна в точке $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$, если система уравнений

$$\hat{F}^*_x y^* + \hat{h}^*_x \lambda_1 + \hat{l}^*_x \lambda_2 = 0,$$

$$\hat{F}^*_\xi y^* + \hat{h}^*_\xi \lambda_1 + \hat{l}^*_\xi \lambda_2 = 0,$$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \langle y^*, F(\hat{\xi}, \hat{x}, u)\rangle = \langle y^*, F(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})\rangle,$$

$$\langle \lambda_1, f(\xi, x)\rangle = 0$$

относительно переменных $y^* \in Y^*$, $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{m_1})^*_+$ и $\lambda_2 \in (\mathbb{R}^{m_2})^*$ имеет только тривиальное решение.

Сформулируем теперь основные результаты: теорему о связи решений задач (1) и (2), теорему о достаточных условиях локальной управляемости управляемой системы (F, h, l) и теорему о необходимых условиях минимума в задаче (1). Во всех этих утверждениях предполагается, что выполнены основные предположения и в соответствующей точке $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ оператор $F_x(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ обратим (что, очевидно, всегда имеет место в задаче оптимального управления).

Теорема 1. *Пусть* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ *– минимум в задаче* (1) *и управляемая система* (F, h, l) *регулярна в точке* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$. *Тогда для каждого* $k \in \mathbb{N}$ *и каждого набора* $\hat{\mathbf{u}} = (\hat{u}, \hat{u}_1, \ldots, \hat{u}_k) \in \mathcal{U}^{k+1}$ *точка* $(0, \hat{\xi}, \hat{x}, \hat{\mathbf{u}})$ *доставляет локальный минимум в задаче* (2).

Теорема 2. *Пусть* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ *– допустимая точка в задаче* (1) *и управляемая система* (F, h, l) *регулярна в* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$. *Тогда система* (F, h, l) *локально управляема относительно точки* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$.

Сопоставим задаче (1) следующую функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}(\xi, x, u, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 f(\xi, x) + \langle y^*, F(\xi, x, u)\rangle +$$
$$+ \langle \lambda_1, h(\xi, x)\rangle + \langle \lambda_2, l(\xi, x)\rangle,$$

где $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, y^*, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R} \times Y^* \times (\mathbb{R}^{m_1})^* \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$ – набор множителей Лагранжа.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ – *допустимая точка в задаче* (1). *Тогда, если* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$ *доставляет минимум в задаче* (1), *то найдется такой ненулевой набор множителей Лагранжа* $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, y^*, \lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}_+ \times Y^* \times (\mathbb{R}^{m_1})^*_+ \times (\mathbb{R}^{m_2})^*$, *что*

$$\mathcal{L}_x(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{f}_x + \hat{F}_x^* y^* + \hat{h}_x^* \lambda_1 + \hat{l}_x^* \lambda_2 = 0,$$

$$\mathcal{L}_\xi(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u}, \boldsymbol{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \lambda_0 \hat{f}_\xi + \hat{F}_\xi^* y^* + \hat{h}_\xi^* \lambda_1 + \hat{l}_\xi^* \lambda_2 = 0,$$

$$\langle \lambda_1, f(\hat{\xi}, \hat{x}) \rangle = 0,$$

$$\min_{u \in \mathcal{U}} \mathcal{L}(\hat{\xi}, \hat{x}, u, \boldsymbol{\lambda}) = \mathcal{L}(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u}, \boldsymbol{\lambda}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \min_{u \in \mathcal{U}} \langle y^*, F(\hat{\xi}, \hat{x}, u) \rangle = \langle y^*, F(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u}) \rangle = 0.$$

Если управляемая система (F, h, l) *регулярна в точке* $(\hat{\xi}, \hat{x}, \hat{u})$, *то* $\lambda_0 \neq 0$.

Последняя теорема, которая и моделирует принцип максимума Понтрягина, является непосредственным следствием как теоремы 1, так и теоремы 2.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления (в канонической форме):

$$\bar{f}(x(t_0), x(t_1)) \to \min, \tag{3}$$

$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), \quad u(t) \in U, \tag{4}$$

$$\bar{h}_i(x(t_0), x(t_1)) \le 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_1, \tag{5}$$

$$\bar{l}_i(x(t_0), x(t_1)) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m_2. \tag{6}$$

Здесь $[t_0, t_1]$ – отрезок прямой, U – непустое подмножество $\mathbb{R}^r$, $\varphi: \Omega_0 \times \mathrm{cl}\,U \to \mathbb{R}^n$ ($\mathrm{cl}\,U$ обозначает замыкание множества U), $f: \Omega \to \mathbb{R}$, $\bar{h}_i: \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m_1$, и $\bar{l}_i: \Omega \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m_2$, где Ω_0 и Ω – открытые множества соответственно в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Пару $(x(\cdot), u(\cdot)) \in \mathrm{AC}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n) \times L_\infty([t_0, t_1], \mathbb{R}^r)$, где $\mathrm{AC}([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ – совокупность абсолютно непрерывных вектор-функций на $[t_0, t_1]$, назовем допустимым процессом в задаче (3)–(6), если $\{(t, x(t)): t \in [t_0, t_1]\} \subset \Omega_0$, $(x(t_0), x(t_1)) \in \Omega$, выполняются соотношения (5), (6) и соотношения (4) для п.в. $t \in [t_0, t_1]$.

Допустимый процесс $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ называется оптимальным процессом (или сильным минимумом), если существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$, для которого $\|x(\cdot) - \hat{x}(\cdot)\|_{C([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)} < \varepsilon$ справедливо неравенство $\bar{f}(x(t_0), x(t_1)) \ge \bar{f}(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$.

Тройку отображений $(\varphi, \bar{h}, \bar{l})$, где $\bar{h} = (\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_{m_1})^{\mathrm{T}}$ и $\bar{l} = (\bar{l}_1, \ldots, \bar{l}_{m_1})^{\mathrm{T}}$, задающих ограничения в задаче (3)–(6), назовем управляемой системой.

Задачу (3)–(6) нетрудно переписать в форме задачи (1), и тогда аналоги теорем 1, 2 и 3 для нее (при стандартных предположениях) непосредственно следуют из этих теорем и приводимых ниже условий регулярности (которые есть расшифровка абстрактного определения 2 для управляемой системы $(\varphi, \bar{h}, \bar{l})$). При этом аналог теоремы 3 для задачи (3)–(6) – это стандартный принцип максимума Понтрягина (см., например, [1, 5]), и поэтому формулировку его здесь не приводим. Приведем здесь лишь аналог теоремы 2 для задачи (3)–(6), который, на наш взгляд, представляет интерес.

Функцию $\bar{f}$ и отображения $\bar{h}$ и $\bar{l}$ рассматриваем как функции переменных $\zeta_1 \in \mathbb{R}^n$ и $\zeta_2 \in \mathbb{R}^n$. Если фиксирована пара $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, то для сокращения записи частные производные этих функций по ζ_1 и ζ_2 в точке $(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1))$ записываем так: $\hat{\bar{f}}_{\zeta_i}$, $\hat{\bar{h}}_{\zeta_i}$ и $\hat{\bar{l}}_{\zeta_i}$, $i = 1, 2$, а также пишем $\hat{\varphi}(t) = \varphi(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$ и $\hat{\varphi}_x(t) = \varphi_x(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$. Сопряженные операторы к $\hat{\bar{h}}_{\zeta_i}$ и $\hat{\bar{l}}_{\zeta_i}$, $i = 1, 2$, обозначаем $\hat{\bar{h}}^*_{\zeta_i}$ и $\hat{\bar{l}}^*_{\zeta_i}$, $i = 1, 2$.

Обозначим через $H(t, x, u, p(t)) = \langle p(t), \varphi(t, x, u) \rangle$ функцию Понтрягина задачи (3)–(6), где $p(\cdot): [t_0, t_1] \to (\mathbb{R}^n)^*$.

О п р е д е л е н и е 3. Пусть $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ – допустимый процесс в задаче (3)–(6). Скажем, что управляемая система $(\varphi, \bar{h}, \bar{l})$ р е г у л я р н а в т о ч к е $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, если система уравнений

$$-\dot{p} = p\hat{\varphi}_x(t), \quad p(t_0) = \hat{\bar{h}}^*_{\zeta_1}\lambda_1 + \hat{\bar{l}}^*_{\zeta_1}\lambda_2,$$

$$p(t_1) = -\hat{\bar{h}}^*_{\zeta_2}\lambda_1 - \hat{\bar{l}}^*_{\zeta_2}\lambda_2,$$

$$\max_{u \in U} H(t, \hat{x}(t), u, p(t)) = H(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t), p(t))$$

$$\forall \text{п.в. } t \in [t_0, t_1],$$

$$\langle \lambda_1, h(\hat{x}(t_0), \hat{x}(t_1)) \rangle = 0$$

относительно переменных $p(\cdot) \in \mathrm{AC}([t_0, t_1], (\mathbb{R}^n)^*)$, $\lambda_1 \in (\mathbb{R}^{m_1})^*_+$ и $\lambda_2 \in (\mathbb{R}^{m_2})^*$ имеет только тривиальное решение.

О п р е д е л е н и е 4. Пусть $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ – допустимый процесс в задаче (3)–(6). Скажем, что управляемая система $(\varphi, \bar{h}, \bar{l})$ л о к а л ь н о у п р а в л я е м а о т н о с и т е л ь н о п р о ц е с с а $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, если для каждой окрестности W точки

$\hat{x}(\cdot)$ существует окрестность W_1 нуля в $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ такая, что для любого $y = (y_1, y_2) \in W_1$ найдется процесс $(x_y(\cdot), u_y(\cdot))$, удовлетворяющий условиям (4) и для которого $x_y(\cdot) \in W$, $\bar{h}(x_y(t_0), x_y(t_1)) \le y_1$ и $\bar{l}(x_y(t_0), x_y(t_1)) = y_2$.

Теорема 4 (о локальной управляемости). *Пусть* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ *– допустимый процесс в задаче* (3)–(6). *Тогда если управляемая система* $(\varphi, \bar{h}, \bar{l})$ *регулярна в точке* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, *то эта система локально управляема относительно процесса* $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$.

Выше было сказано, что теорема 3 есть следствие как теоремы 1, так и теоремы 2. Учитывая приведенную расшифровку условий регулярности для системы $(\varphi, \bar{h}, \bar{l})$, легко заметить, что из теоремы 4 непосредственно следует принцип максимума Понтрягина для задачи (3)–(6). Действительно, если $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$ – оптимальный процесс в этой задаче, то расширенная система $(\varphi, \tilde{h}, \bar{l})$, где $\tilde{h} = (\bar{f}, \bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_{m_1})^{\mathrm{T}}$, не может быть управляема относительно этого процесса. Следовательно, она нерегулярна в точке $(\hat{x}(\cdot), \hat{u}(\cdot))$, т.е. для данной точки выполняется принцип максимума Понтрягина.

Отметим также, что из расшифровки теоремы 1 для задачи (3)–(6) нетрудно получить в регулярном случае для данной задачи необходимые условия минимума второго порядка в форме, приведенной в работе [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14–01–00456, 14–01–00744).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматлит, 1961.
2. *Гамкрелидзе Р.В.* Оптимальные скользящие режимы // ДАН. 1962. Т. 143. № 6. С. 1243–1245.
3. *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси: Изд-во Тбилис. ун-та, 1977. 260 с.
4. *Тихомиров В.М.* Теорема о касательном пространстве и некоторые ее модификации. В сб.: Оптимальное управление. М.: Изд-во МГУ, 1977. В. 7. С. 22–30.
5. *Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.* Оптимальное управление. М.: Наука, 1979. 429 с.
6. *Аваков Е.Р., Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М.* О принципе Лагранжа в задачах на экстремум при наличии ограничений // УМН. 2013. Т. 68. В. 3. С. 5–38.
7. *Osmolovskii N.P., Maurer H.* Applications to Regular and Bang-Bang Control. Second-Order Necessary and Sufficient Conditions Calculus of Variations and Optimal Control // SIAM. 2012. P. 382.