МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени
М.В.ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет
Кафедра общих проблем управления

# «Оптимальное восстановление значения производной функции на классах задаваемых дифференциальными полиномами»

Курсовая работа студентки 4 курса
Д.А. Ахметьевой

Научный руководитель:
К.Ю. Осипенко

Москва
2010

## Оптимальное восстановление значения производной функции на классах задаваемых дифференциальными полиномами.

**Постановка задачи.**

Пусть $X$ - линейное пространство, $Y$ - линейное нормированное пространство, $X'$ - линейный функционал, $I$ - линейный оператор.

Рассматривается задача восстановления значения линейного функционала $X'$ на некотором множестве $W \subseteq X$ по приближенным значениям линейного оператора $I: X \to Y$ ($I$ называется информационным оператором). Будем считать, что $\forall x \in W$ известен элемент $y \in Y$, такой что $\|Ix - y\|_Y \le d$. В качестве методов восстановления $m(y)$ рассмотрим функционалы $m: Y \to \Re$.

Погрешность метода восстановления определим равенством $e(X', W, I, d, m) := \sup|< X', x > - m(y)|$, где верхняя грань берется по всем таким $x \in W$, $y \in Y$, что $\|Ix - y\|_Y \le d$. Тогда погрешностью оптимального метода восстановления назовем следующую величину $E(X', W, d, I) := \inf e(X', W, I, d, m)$, где нижняя грань берется по всем $m: Y \to \Re$.

**Построение оптимального метода в общем виде.**

__**Теорема 1.**__

Пусть $W$ - центрально симметричное множество и для всех $x \in X$ имеет место следующее равенство:

$< X', x > = < \hat{m}, Ix > + < r, x >$ (1),

где $\hat{m}$ - линейный непрерывный функционал. Предположим, что существует $\hat{x} \in W$ такой, что выполнены следующие условия:

1. $< r, \hat{x} > = \sup|< r, x >|$, где верхняя грань берется по всем $x \in W$.
2. $< \hat{m}, I\hat{x} > = d\|\hat{m}\|$.
3. $\|I\hat{x}\|_Y \le d$.

Тогда $\hat{m}$ - оптимальный метод восстановления и $E(X', W, d, I) = < X', \hat{x} >$.

*Доказательство:*

Пусть $m: Y \to \Re$ - произвольный метод. Тогда:

$$2|< X', \hat{x} >| = |< X', \hat{x} > - m(0) + m(0) - < X', -x >| \le$$

$$\le |< X', \hat{x} > - m(0)| + |< X', -\hat{x} > - m(0)|. \qquad (2)$$

Поскольку $\|I\hat{x} - y\|_Y \le d$ верно для $y = 0$, а пары $(\hat{x}, 0), (-\hat{x}, 0)$ лежат во множестве таких пар $(x, y)$, для которых $x \in W$, $y \in Y$ и $\|Ix - y\|_Y \le d$, то (2) можно оценить сверху следующим образом:

$$|< X', \hat{x} > - m(0)| + |< X', -\hat{x} > - m(0)| \le e(X', W, I, d, m) + e(X', W, I, d, m).$$

Итак, получили, что для всех $m: Y \to \Re$ верно $< X', \hat{x} > \le e(X', W, I, d, m)$ из (1) видно, что $< X', \hat{x} > \ge 0$ при выполнении условий 1)-3). Беря нижнюю грань от правой части по всем $m: Y \to \Re$, получаем оценку сверху:

$< X', \hat{x} > \le E(X', W, d, I)$.

Теперь оценим погрешность метода $\hat{m}$:

$$|< X', x > - < \hat{m}, y >| = |< X', x > - < \hat{m}, y > - < \hat{m}, Ix > + < \hat{m}, Ix >| \le$$

$$\le |< X', x > - < m, Ix >| + |< \hat{m}, Ix - y >| \le |< r, x >| + \|\hat{m}\|\|Ix - y\|_Y \le$$

$\le \sup|< r, x >| + \|\hat{m}\| d = < r, \hat{x} > + < \hat{m}, Ix > = < X', \hat{x} > - < \hat{m}, Ix > + < \hat{m}, Ix > = < X', \hat{x} >$,
где $< X', \hat{x} >$ - погрешность, а $\hat{m}$ - оптимальный метод восстановления, т.к.
$< X', \hat{x} > \le E(X', W, d, I) \le e(X', W, I, d, \hat{m}) \le < X', \hat{x} >$, что и требовалось доказать.

**Восстановление значения производной функции в нуле по значениям функции в других точках.**

Рассмотрим соболевский класс функций $W^{P}{}_{\infty}([-1;1]) := \{x(\cdot) : \partial x'(\cdot) \in AC([-1,1]), \|x''(\cdot) + qx(\cdot)\|_{L_\infty[-1,1]} \le 1\}$,
где $P = D^2 + q$, $AC([-1,1])$ - пространство абсолютно непрерывных функций на отрезке [-1,1], $q \in R$.
Рассматривается задача восстановления значения $x'(0)$, где $x(\cdot) \in W^{P}{}_{\infty}([-1;1])$, по значениям функции $x(\cdot)$ в двух различных точках $t_1, t_2$, заданных с погрешностями $d_1, d_2$ соответственно.
Считаем, что для функции $x(\cdot) \in W^{P}{}_{\infty}([-1;1])$ известны точки $y_1, y_2$, такие, что $|x(t_i) - y_i| \le d_i$, $i = 1,2$.

В принятых нами обозначениях задача приобретает вид:
$W = W^{P}{}_{\infty}([-1;1])$ -класс функций, $Y = \Re^2$ - линейное нормированное пространство с нормой
$\|y\|_Y = \max\left\{\frac{|y_1|}{d_1}, \frac{|y_2|}{d_2}\right\}$ и $d = 1$, $\|Ix - y\|_Y \le 1$, то это означает, что $\max\left\{\frac{|\ x(t_1) - y_1\ |}{d_1}, \frac{|\ x(t_2) - y_2\ |}{d_2}\right\} \le 1$,
т.е. $|x(t_i) - y_i| \le d_i$, $i = 1,2$. Информационный оператор $I : W \to \Re^2$ и имеет вид $Ix(\cdot) = (x(t_1), x(t_2))$,
где $t_1, t_2 \in [-1;1]$ и при этом $|x(t_i) - y_i| \le d_i$, $i = 1,2$.
Тогда $e(x'(0), W^{P}{}_{\infty}([-1;1]), d_1, d_2, t_1, t_2, m) = \sup|x'(0) - m(y)|$, где верхняя грань берется по $x(\cdot) \in W^{P}{}_{\infty}([-1;1])$, $y = (y_1, y_2), |x(t_i) - y_i| \le d_i$, $i = 1,2$.

$E(x', W, t_1, t_2 d_1, d_2, m) := \inf e(x', W, t_1, t_2, d_1, d_2, m)$,
где нижняя грань берется по всем $m : Y \to \Re$.

Получим тождество (1) и найдем $\hat{x}$ и $\hat{m}$, удовлетворяющие условиям 1) - 3) теоремы 1.
Для этого необходимо найти представление вида:

$$x(t) = A(t)x(0) + B(t)x'(0) + \int_0^t K(t)(x''(t) + qx(t))dt \ . \ (3)$$

Требуемое разложение получим дифференцированием по частям выражения:

$$\int_0^t K(t)(x''(t) + qx(t))dt \ .$$

Итак, получили следующее:

$$\int_0^t K(t)(x''(t) + qx(t))dt = K(t)x'(t) - K(0)x'(0) - K'(t)x(t) + K'(0)x(0) + \int_0^t x(t)(K''(t) + qK(t))dt \ .$$

Теперь представим наш результат в виде (3):

$$K'(t)x(t) = -K(0)x'(0) + K(t)x'(t) + K'(0)x(0) + \int_0^t x(t)(K''(t) + qK(t))dt - \int_0^t K(t)(x''(t) + qx(t))dt \ . \ (4)$$

Получаем следующие ограничения на $K(t)$:

$$\begin{cases} K(t) = 0, \\ K'(t) = 1, \\ K''(t) + qK(t) = 0. \end{cases}$$

Рассмотрим случаи: $q \in \left(0; \frac{p^2}{4}\right)$.

Решая дифференциальное уравнение, получаем явный вид $K(t)$:

$$K(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \sqrt{q}(t - t).$$

Теперь формула (4) принимает вид:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}t)x'(0) + \cos(\sqrt{q}t)x(0) - \int_0^t \frac{1}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}(t - t))(x''(t) + qx(t))dt \ . (5)$$

Подставим в формулу (5) значения $t_1, t_2$:

$$x(t_1) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}t_1)x'(0) + \cos(\sqrt{q}t_1)x(0) - \int_0^{t_1} \frac{1}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}(t - t_1))(x''(t) + qx(t))dt \ ,$$

$$x(t_2) = \frac{1}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}t_2)x'(0) + \cos(\sqrt{q}t_2)x(0) - \int_0^{t_2} \frac{1}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}(t - t_2))(x''(t) + qx(t))dt \ .$$

Умножаем первое равенство на $l_1$, а второе на $l_2$ и складываем полученные выражения, где $l_1, l_2$ некоторые числа. После преобразований получаем:

$$l_1 x(t_1) + l_2 x(t_2) = x(0)\left(l_1 \cos\sqrt{q}t_1 + l_2 \cos\sqrt{q}t_2\right) + x'(0)\frac{1}{\sqrt{q}}\left(l_1 \sin\sqrt{q}t_1 + l_2 \sin\sqrt{q}t_2\right) +$$

$$+ \int_0^{t_1} \frac{l_1}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}(t_1 - t))(x''(t) + qx(t))dt + \int_0^{t_2} \frac{l_2}{\sqrt{q}} \sin(\sqrt{q}(t_2 - t))(x''(t) + qx(t))dt \ . (6)$$

Сравнивая полученное равенство с тождеством (1) из теоремы 1, получаем ограничения на скаляры $l_1, l_2$:

$$\begin{cases} l_1 \cos\sqrt{q}t_1 + l_2 \cos\sqrt{q}t_2 = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{q}}\left(l_1 \sin\sqrt{q}t_1 + l_2 \sin\sqrt{q}t_2\right) = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно $l_1, l_2$, получаем следующие значения:

$$\begin{cases} l_1 = -\dfrac{\sqrt{q}\cos\sqrt{q}t_2}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}, \\ l_2 = \dfrac{\sqrt{q}\cos\sqrt{q}t_1}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}. \end{cases}$$

Итак, равенство (6) с учетом значений для $l_1, l_2$ преобразуется к виду:

$$x'(0) = \frac{x(t_2)\sqrt{q}\cos\sqrt{q}t_1 - x(t_1)\sqrt{q}\cos\sqrt{q}t_2}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)} - \int_0^{t_1}\frac{\cos\sqrt{q}t_2 \sin\sqrt{q}(t - t_1)}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}(x''(t) + qx(t))dt +$$

$$+\int_0^{t_2}\frac{\cos\sqrt{q}t_1 \sin\sqrt{q}(t - t_2)}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}(x''(t) + qx(t))dt . \qquad (*)$$

Рассмотрим случай: $-1 \le t_1 < 0 < t_2 \le 1$.
Введем обозначение:

$$\int_{-1}^{1} F(t)(x''(t) + qx(t))dt =$$

$$= \int_0^{t_2}\frac{\cos\sqrt{q}t_1 \sin\sqrt{q}(t - t_2)}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}(x''(t) + qx(t))dt - \int_0^{t_1}\frac{\cos\sqrt{q}t_2 \sin\sqrt{q}(t - t_1)}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}(x''(t) + qx(t))dt .$$

Тогда $F(t) = \begin{cases} 0, -1 \le t < t_1, \\ \dfrac{\cos\sqrt{q}t_2 \sin\sqrt{q}(t - t_1)}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}, t_1 \le t < 0, \\ \dfrac{\cos\sqrt{q}t_1 \sin\sqrt{q}(t - t_2)}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}, 0 \le t < t_2, \\ 0, t_2 \le t \le 1. \end{cases}$

Найдем $\hat{x} \in W_\infty^P([-1,1])$, для которого выполнены условия 1) – 3) из теоремы 1.

1) Первое условие имеет вид: $\sup\left|\int_{-1}^{1} F(t)(x''(t) + qx(t))dt\right| = \int_{-1}^{1} F(t)(\hat{x}''(t) + q\hat{x}(t))dt$ , где верхняя грань берется по всем $x(\cdot) \in W_\infty^P([-1,1])$.

$\sup\left|\int_{-1}^{1} F(t)(\hat{x}''(t) + q\hat{x}(t))dt\right| \le \int_{-1}^{1}\left|F(t)(\hat{x}''(t) + qx(t))\right|dt \le \int_{-1}^{1}\left|F(t)\right|dt$ , где верхняя грань берется по всем $x(\cdot) \in W_\infty^P([-1,1])$.

Равенство достигается при $\hat{x}''(t) + q\hat{x}(t) = sign(F(t))$ (6)

2) Второе условие имеет вид: $< \hat{m}, I\hat{x} >= d\|\hat{m}\| = 1 \cdot \|\hat{m}\|$.

Из равенства (5) имеем: $\hat{m}(y)=\dfrac{\sqrt{q}\left(y_1\cos\sqrt{q}t_2-y_2\cos\sqrt{q}t_1\right)}{\sin\sqrt{q}(t_2-t_1)}$, тогда

$$\|\hat{m}(y)\|=\frac{\sqrt{q}\left(d_1\cos\sqrt{q}t_2+d_2\cos\sqrt{q}t_1\right)}{\sin\sqrt{q}(t_2-t_1)}.$$

Из этого следует, что $\hat{x}(t_1)=-d_1$, $\hat{x}(t_2)=d_2$. (7)

3) Условие, очевидно, выполняется, при выполнении равенств (7)

$$x''+qx=signF(t)$$

$$sign\left(\frac{\cos\sqrt{q}t_2\sin\sqrt{q}(t-t_1)}{\sin\sqrt{q}(t_2-t_1)}\right)=1,\ t_1\le t<0$$

$$sign\left(\frac{\cos\sqrt{q}t_1\sin\sqrt{q}(t-t_2)}{\sin\sqrt{q}(t_2-t_1)}\right)=-1,\ 0\le t<t_2$$

$$x=\begin{cases}C_1\sin\sqrt{q}t+C_2\cos\sqrt{q}t+\dfrac{1}{q}, signF(t)=1\\ C_1^*\sin\sqrt{q}t+C_2^*\cos\sqrt{q}t-\dfrac{1}{q}, signF(t)=-1\end{cases}$$

$$x=\begin{cases}C_1\sin\sqrt{q}t+C_2\cos\sqrt{q}t+\dfrac{1}{q}, t\in[-1;0],\\ C_1^*\sin\sqrt{q}t+C_2^*\cos\sqrt{q}t-\dfrac{1}{q}, t\in[0;1].\end{cases}$$

Из непрерывности $\hat{x}(t)$ и $\hat{x}'(t)$ имеем:

$$\begin{cases}C_2^*=C_2+\dfrac{2}{q},\\ C_1\sqrt{q}=C_1^*\sqrt{q}.\end{cases}\qquad(8.1)$$

Воспользовавшись равенством (7) получим:

$$\begin{cases}C_1\sin\sqrt{q}t_1+C_2\cos\sqrt{q}t_1+\dfrac{1}{q}=-d_1,\\ C_1^*\sin\sqrt{q}t_2+C_2^*\cos\sqrt{q}t_2-\dfrac{1}{q}=d_2.\end{cases}\qquad(8.2)$$

Решая систему уравнений, составленную из 8.1 и 8.2, получим:

$$\begin{cases} C_1 = \dfrac{(1/q+d_1)\cos\sqrt{q}t_2 + \cos\sqrt{q}t_1\left(d_2 + 1/q - 2/q\cos\sqrt{q}t_2\right)}{\sin(t_2 - t_1)\sqrt{q}}, \\ C_2 = -\dfrac{\sin\sqrt{q}t_1\left(d_2 + 1/q - 2/q\cos\sqrt{q}t_2\right) + \sin\sqrt{q}t_2(1/q + d_1)}{\sin(t_2 - t_1)\sqrt{q}}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1^* = C_1, \\ C_2^* = C_2 + 2/q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1^* = \dfrac{(1/q+d_1)\cos\sqrt{q}t_2 + \cos\sqrt{q}t_1\left(d_2 + 1/q - 2/q\cos\sqrt{q}t_2\right)}{\sin(t_2 - t_1)\sqrt{q}}, \\ C_2^* = -\dfrac{\sin\sqrt{q}t_2\left(d_1 + 1/q - 2/q\cos\sqrt{q}t_1\right) + \sin\sqrt{q}t_1(1/q + d_2)}{\sin(t_2 - t_1)\sqrt{q}}. \end{cases}$$

Теперь мы можем вычислить погрешность оптимального метода. Из тождества (1) и его интерпретации в нашей задаче (*), следует, что $< x', \hat{x} >= \hat{x}'(0)$ - погрешность оптимального метода восстановления. Получаем:

$$\hat{x}'(0) = \sqrt{q}\,\frac{\cos\sqrt{q}t_2(d_1 + 1/q) + \cos\sqrt{q}t_1\left(d_2 + 1/q - 2/q\cos\sqrt{q}t_2\right)}{\sin\sqrt{q}(t_2 - t_1)}$$

**Минимизация значения погрешности оптимального восстановления.**

Пусть $t_2 = -t_1 = h$, $d_1 = d_2 = d$. Найдем значения $h$ минимизирующие погрешность оптимального метода.

Рассмотрим функцию:

$$f(h) = \sqrt{q}\,\frac{\left(d + \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{q}\cos\sqrt{q}h}{\sin\sqrt{q}h}$$

и найдем ее минимум на отрезке $[-1;1]$ и точку $h$, в которой достигается минимум.

$$f'(h) = \frac{1 - (dq+1)\cos\sqrt{q}h}{\sin^2\sqrt{q}h}$$

Оптимальное значение параметра $h = \min\left\{1, \frac{1}{\sqrt{q}}\arccos\frac{1}{dq+1}\right\}$. Минимальное значение погрешности составляет $f(h) = \sqrt{(dq+2)d}$, при $h = \frac{1}{\sqrt{q}}\arccos\frac{1}{dq+1}$.

Минимальное значение погрешности составляет $\hat{f}(h)=\dfrac{dq+1-\cos\sqrt{q}}{\sqrt{q}\sin\sqrt{q}}$, при $h=1$.

***Итог:***

Решая задачу восстановления значения производной функции в нуле на классе $W^{P}{}_{\infty}([-1;1])$ по двум различным значениям функции в других точках, получили следующий результат:

Оптимальный метод восстановления $\hat{m}(y)=\dfrac{\sqrt{q}\left(y_1\cos\sqrt{q}t_2-y_2\cos\sqrt{q}t_1\right)}{\sin\sqrt{q}(t_2-t_1)}$.

Погрешность оптимального метода восстановления при $-1\le t_1<0<t_2\le 1$, $t_2=-t_1=h$, $d_1=d_2=d$ имеет вид:

$E(x',W,t_1,t_2d_1,d_2,m)=\sqrt{d(dq+2)}$, достигается в точке $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{q}}\arccos\left(\dfrac{1}{dq+1}\right),\dfrac{1}{\sqrt{q}}\arccos\left(\dfrac{1}{dq+1}\right)\right)$,

если $\dfrac{1}{\sqrt{q}}\arccos\dfrac{1}{dq+1}<1$.

$E(x',W,t_1,t_2d_1,d_2,m)=\dfrac{dq+1-\cos\sqrt{q}}{\sqrt{q}\sin\sqrt{q}}$, достигается в точке $(-1,1)$, если $\dfrac{1}{\sqrt{q}}\arccos\dfrac{1}{dq+1}>1$.