Оптимальное восстановление значения производной функции по приближенным значениям в двух точках.

Введение.

В рамках научного направления «Теория приближений и оптимальное восстановление» изучается столь актуальный в настоящее время вопрос о компактных способах компрессии информации о различных объектах. Одним из основателей данного направления является академик А.Н. Колмогоров и его ученик проф. В.М. Тихомиров. В 1936 г. А.Н. Колмогоров опубликовал работу по теории приближений, в которой по сути дела был поставлен вопрос о наилучшем средстве приближения на классе функций, где в качестве аппарата приближения рассматривались всевозможные n-мерные подпространства. В 1965 г. С.А. Смоляк, во многом исходя из идей А.Н. Колмогорова, поставил задачу приближения линейного функционала на некотором множестве, по информации о значениях других функционалов. Первые результаты по оптимальному восстановлению ограниченных аналитических функций были получены в начале семидесятых годов К.Ю. Осипенко. Затем в совместной работе с А.Г. Марчуком была обобщена постановка задачи оптимального восстановления на случай задания информации с погрешностью и был получен основной результат о существовании линейных опимальных методов восстановления на выпуклых ценрально-симметричных множествах.

На основании этого результата, в работе будет рассматриваться задача оптимального восстановления значения производной функции в точке по приближенным значениям функции в двух других различных точках, заданных с погрешностью, и минимизация погрешности метода оптимального восстановления.

Постановка задачи.

Пусть X - линейное пространство, Y - линейное нормированное пространство, X' - линейный функционал, I - линейный оператор

Рассматривается задача восстановления значения линейного функционала X' на некотором множестве $W \subseteq X$ по приближенным значениям линейного оператора $I : X \to Y$ (I называется информационным оператором). Будем считать, что $\forall x \in W$ известен $y \in Y$, такой что $\|Ix - y\|_Y \le d$.

В качестве методов восстановления $m(y)$ рассмотрим функционалы $m : Y \to \Re$. Погрешность метода восстановления определим равенством $e(X', W, I, d, m) := \sup\limits_{\substack{x \in W \\ y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \le d}} |< X', x > - m(y)|$.

Тогда погрешностью оптимального метода восстановления назовем следующую величину $E(X', W, I, d) := \inf\limits_{m: Y \to \Re} |< X', x > - m(y)|$.

Построение оптимального метода в общем виде.

<u>**Теорема 1.**</u>

Пусть W - центрально симметричное множество, для всех $x \in X$ имеет место следующее равенство:

$< X', x > = < \hat{m}, Ix > + < r, x >$ (1),

где $\hat{m}$ - линейный непрерывный функционал. Предположим, что существует $\hat{x} \in W$ такой, что выполнены следующие условия:

1. $< r, x >= \sup\limits_{x\in W} |< r, x >|$.
2. $< \hat{m}, I\hat{x} >= d\|\hat{m}\|_Y$.
3. $\|I\hat{x}\|_Y \le d$.

Тогда $\hat{m}$ - метод оптимального восстановления и $E(X', W, d, I) =< X', \hat{x} >$.

Доказательство:

Приведем оценку для $< X', x >$ сверху. Пусть $m : Y \to \mathfrak{R}$ - произвольный метод. Тогда:

$$2|< X', \hat{x} >| = |< X', \hat{x} > -m(0) + m(0) - < X', -x >| \le$$
$$\le |< X', \hat{x} > -m(0)| + |< X', -\hat{x} > -m(0)| \qquad (2)$$

Поскольку $\|I\hat{x} - y\|_Y \le d$ верно для $y = 0$, а пары $(\hat{x}, 0), (-\hat{x}, 0)$ лежат во множестве таких пар (x, y), для которых $x \in W$, $y \in Y$ и $\|Ix - y\|_Y \le d$, то (2) можно оценить сверху следующим образом:

$$|< X', \hat{x} > -m(0)| + |< X', -\hat{x} > -m(0)| \le e(X', W, I, d, m) + e(X', W, I, d, m).$$

Итак, получили, что для всех $m : Y \to \mathfrak{R}$ верно $< X', \hat{x} >\le e(X', W, I, d, m)$ из (1) видно, что $< X', \hat{x} >\ge 0$ при выполнении условий 1)-3). Беря нижнюю грань от правой части по всем $m : Y \to \mathfrak{R}$, получаем оценку сверху:

$$< X', \hat{x} >\le E(X', W, d, I).$$

Теперь приведем оценку для $< X', x >$ снизу:

$$|< X', x > - < \hat{m}, y >| = |< X', x > - < \hat{m}, y > - < \hat{m}, Ix > + < \hat{m}, Ix >| \le$$
$$\le |< X', x > - < m, Ix >| + |< \hat{m}, Ix - y >| \le |< r, x >| + \|\hat{m}\|\|Ix - y\|_Y \le$$
$$\le \sup |< r, x >| + \|\hat{m}\|d =< r, \hat{x} > + < \hat{m}, Ix >=< X', \hat{x} > - < \hat{m}, Ix > + < \hat{m}, Ix >=< X', \hat{x} >,$$

где $< X', \hat{x} >$ - погрешность, а $\hat{m}$ - оптимальный метод восстановления, т.к. $< X', \hat{x} >\le E(X', W, d, I) \le e(X', W, I, d, \hat{m}) \le < X', \hat{x} >$, что и требовалось доказать.

Восстановление значения производной функции в нуле по значениям функции в других точках.

Рассмотрим соболевский класс функций $W^2{}_\infty([-1;1]) := \{x(\cdot) : \partial x'(\cdot) \in AC([-1,1]), \|x''(\cdot)\|_{L_\infty[-1,1]} \le 1\}$, где $AC([-1,1])$- пространство абсолютно непрерывных функций на отрезке [-1,1].

Рассматривается задача восстановления значения $x'(0)$, где $x(\cdot) \in W^2{}_\infty([-1;1])$, по значениям функции $x(\cdot)$ в двух различных точках t_1, t_2, заданных с погрешностями d_1, d_2 соответственно. Считаем, что для функции $x(\cdot) \in W^2{}_\infty([-1;1])$ известны точки y_1, y_2, такие, что $|x(t_i) - y_i| \le d_i$, $i = 1,2$.

В принятых нами обозначениях задача приобретает вид:
$W = W^2{}_\infty([-1;1])$ -класс функций, $Y = \mathfrak{R}^2$ - линейное нормированное пространство с нормой $\|y\|_Y = \max\left\{\frac{|y_1|}{d_1}, \frac{|y_2|}{d_2}\right\}$ и $d = 1$, $\|Ix - y\|_Y \le 1$, то это означает, что $\max\left\{\frac{|\ x(t_1) - y_1\ |}{d_1}, \frac{|\ x(t_2) - y_2\ |}{d_2}\right\} \le 1$, т.е. $|x(t_i) - y_i| \le d_i$, $i = 1,2$. Информационный оператор $I : W \to \mathfrak{R}^2$ и имеет вид $Ix(\cdot) = (x(t_1), x(t_2))$, где $t_1, t_2 \in [-1;1]$ и при этом $|x(t_i) - y_i| \le d_i$, $i = 1,2$.

Тогда $e\left(x'(0), W^2{}_\infty([-1,1]), d_1, d_2, t_1, t_2, m\right) := \sup\limits_{\substack{x(\cdot)\in W^2{}_\infty([-1,1]) \\ y=(y_1,y_1) \\ \|x(t_i)-y_i\|_Y \le d_i, i=1,2}} \left|x'(0) - m(y)\right|$.

$$E\left(x', W^2{}_\infty([-1,1]), d_1, d_2, t_1, t_2, m\right) := \inf_{m: Y\to\Re} e\left(x', \partial W^2{}_\infty([-1,1]), d_1, d_2, t_1, t_2, m\right).$$

Получим тождество (1) и найдем $\hat{x}$ и $\hat{m}$, удовлетворяющие условиям 1) - 3) теоремы 1.
Для этого запишем формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме:

$x(t) = x(0) + x'(0)t + \int\limits_0^t (t - t)x''(t)dt$. (3)

Подставим в формулу (3) значения t_1, t_2:

$x(t_1) = x(0) + x'(0)t_1 + \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t)x''(t)dt$,

$x(t_2) = x(0) + x'(0)t_2 + \int\limits_0^{t_2} (t_2 - t)x''(t)dt$.

Умножаем первое равенство на l_1, а второе на l_2 и складываем полученные выражения, где l_1, l_2 некоторые числа.
После преобразований получаем:

$l_1 x(t_1) + l_2 x(t_2) = x(0)(l_1 + l_2) + x'(0)(l_1 t_1 + l_2 t_2)t + \int\limits_0^{t_1} (t_1 - t) l_1 x''(t)dt + \int\limits_0^{t_2} (t_2 - t) l_2 x''(t)dt$. (4)

Сравнивая полученное равенство с тождеством (1) из теоремы 1, получаем ограничения на скаляры l_1, l_2:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = 0, \\ l_1 t_1 + l_2 t_2 = 1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно l_1, l_2, получаем следующие значения:

$$\begin{cases} l_1 = -\dfrac{1}{t_2 - t_1}, \\ l_2 = \dfrac{1}{t_2 - t_1}. \end{cases}$$

Итак, равенство (4) с учетом значений для l_1, l_2 преобразуется к виду:

$x'(0) = \dfrac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} + \int\limits_0^{t_1} \dfrac{t_1 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int\limits_0^{t_2} \dfrac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt$. (5)

Рассмотрим следующие случаи:

A) $-1 \le t_1 < 0 < t_2 \le 1$,

B) $0 \le t_1 < t_2 \le 1$.

Случай А):

$-1 \le t_1 < 0 < t_2 \le 1$.

Введем обозначение:

$$\int_{-1}^{1} K(t)x''(t)dt = \int_{0}^{t_1} \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_{0}^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt .$$

Тогда $K(t) = \begin{cases} 0, -1 \le t < t_1, \\ \dfrac{t - t_1}{t_2 - t_1}, t_1 \le t < 0, \\ \dfrac{t - t_2}{t_2 - t_1}, 0 \le t < t_2, \\ 0, t_2 \le t \le 1. \end{cases}$

Найдем $\hat{x}(\cdot) \in W_\infty^{\ 2}([-1,1])$, для которого выполнены условия 1) – 3) из теоремы 1.

1) Первое условие имеет вид: $\sup\limits_{x(\cdot) \in W^2{}_\infty[-1,1]} \left| \int_{-1}^{1} K(t)x''(t)dt \right| = \int_{-1}^{1} K(t)\hat{x}''(t)dt$

$$\sup_{x(\cdot) \in W^2{}_\infty[-1,1]} \left| \int_{-1}^{1} K(t)\hat{x}''(t)dt \right| \le \int_{-1}^{1} |K(t)\hat{x}''(t)|dt \le \int_{-1}^{1} |K(t)|dt$$

Равенство достигается при $\hat{x}''(t) = \begin{cases} 1, t \in [-1;0), \\ -1, t \in [0;1]. \end{cases}$ (6)

2) Второе условие имеет вид: $< \hat{m}, I\hat{x} >= d\|\hat{m}\|_Y = 1 \cdot \|\hat{m}\|_Y$.

Из равенства (5) имеем: $\hat{m}(y) = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$, тогда $\|\hat{m}(y)\|_Y = \dfrac{d_2 + d_1}{t_2 - t_1}$.

Из этого следует, что $\hat{x}(t_1) = -d_1$, $\hat{x}(t_2) = d_2$. (7)

3) Условие, очевидно, выполняется, при выполнении равенств (7)

Из условий (6) и (7) имеем $\hat{x}(t)$ в виде:

$$\hat{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{(t - t_1)^2}{2} + a(t - t_1) - d_1, t \in (-1;0) \\ -\dfrac{(t - t_2)^2}{2} + b(t - t_2) + d_2, t \in (0;1) \end{cases} \qquad (8)$$

Из условий непрерывности $\hat{x}(t)$ и $\hat{x}'(t)$ в нуле имеем следующие ограничения на a, b.

$$\begin{cases} \dfrac{t_1^{\ 2}}{2} - at_1 - d_1 = -\dfrac{t_2^{\ 2}}{2} - bt_2 + d_2 \\ -t_1 + a = t_2 + b \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} a = \dfrac{t_1 + t_2}{2} + \dfrac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1} \\ b = -\dfrac{t_2 + t_1}{2} + \dfrac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1} \end{cases}$$

Теперь мы можем вычислить погрешность оптимального метода. Из тождества (1) и его интерпретации в нашей задаче (5), следует, что $< x', \hat{x} >= \hat{x}'(0)$ - погрешность оптимального метода восстановления. Используя (6), получаем:

$$\hat{x}'(0) = \frac{t_2 - t_1}{2} + \frac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$$

Случай Б):
$0 \le t_1 < t_2 \le 1$.

Введем обозначение:

$$\int_{-1}^{1} K(t)x''(t)dt = \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_0^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt =$$
$$= \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_0^{t_1} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt =$$
$$= \int_0^{t_1} \frac{t_1 - t_2}{t_2 - t_1} x''(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt = -\int_0^{t_1} x''(t)dt - \int_{t_1}^{t_2} \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} x''(t)dt\ .$$

Тогда:

$$K(t) = \begin{cases} 0, -1 \le t < 0, \\ -1, 0 \le t < t_1, \\ \dfrac{t - t_2}{t_2 - t_1}, 0 \le t < t_2, \\ 0, t_2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Необходимо выполнение условий 1) – 3) из теоремы 1.

1) Первое условие имеет вид: $\sup\limits_{x(\cdot)\in W^2{}_\infty[-1,1]} \left| \int_{-1}^{1} K(t) x''(t) dt \right| = \int_{-1}^{1} K(t)\hat{x}''(t) dt$

$$\sup\limits_{x(\cdot)\in W^2{}_\infty[-1,1]} \left| \int_{-1}^{1} K(t) \hat{x}''(t) dt \right| \le \int_{-1}^{1} |K(t)\hat{x}''(t)| dt \le \int_{-1}^{1} |K(t)| dt$$

Равенство достигается на $\hat{x}''(t) = -1, t \in [-1,1]$.

2) Второе условие имеет вид: $<\hat{m}, I\hat{x}>= d\|\hat{m}\|_Y = 1\cdot\|\hat{m}\|_Y$.

Из равенства (5) имеем: $\hat{m}(y) = \dfrac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}$, тогда $\|\hat{m}(y)\|_Y = \dfrac{d_2 + d_1}{t_2 - t_1}$.

Из этого следует, что $\hat{x}(t_1) = -d_1$, $\hat{x}(t_2) = d_2$. (9)

3) Условие, очевидно, выполняется, при выполнении равенств (9).

Теперь постоим $\hat{x}(t)$ из условий:

$$\begin{cases} \hat{x}''(t) = -1, \\ \hat{x}(t_1) = -d_1, \\ \hat{x}(t_2) = d_2. \end{cases}$$

$\hat{x}(t)$ имеет вид $\hat{x}(t) = at^2 + bt + c$.

Подставляя в условия, получаем систему:

$$\begin{cases} \hat{x}''(t) = 2a = -1, \\ \hat{x}(t_1) = at_1{}^2 + bt_1 + c = -d_1, \\ \hat{x}(t_2) = at_2{}^2 + bt_2 + c = d_2. \end{cases}$$

Система имеет единственное решение:

$$\begin{cases} a = -\dfrac{1}{2}, \\ b = \dfrac{d_1 + d_2}{t_2 - t_1} + \dfrac{t_2 + t_1}{2}, \\ c = t_1{}^2 + \dfrac{t_1 t_2}{2} - \dfrac{(d_1 + d_2)t_1}{t_2 - t_1} - d_1. \end{cases}$$

Теперь мы можем вычислить погрешность оптимального метода. Из тождества (1) и его интерпретации в нашей задаче (5), следует, что $< x', \hat{x} >= \hat{x}'(0)$ - погрешность оптимального метода восстановления. Используя (6), получаем:

$$\hat{x}'(0) = \frac{t_2 + t_1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_2 - t_1}.$$

Минимизация значения погрешности оптимального восстановления.

Случай А):
$-1 \le t_1 < 0 < t_2 \le 1$.
Найдем значения t_1, t_2 минимизирующие погрешность оптимального метода.
Рассмотрим функцию: $F(t_1, t_2) = \dfrac{t_2 - t_1}{2} + \dfrac{t_1 t_2 + d_1 + d_2}{t_2 - t_1}$ и найдем, при каких значениях t_1, t_2 она достигает минимума.

Необходимое условие минимума:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1} = \frac{\partial F}{\partial t_2} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial t_1} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{t_2(t_2 - t_1) + t_1 t_2 + d_1 + d_2}{(t_2 - t_1)^2} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial t_2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{t_1(t_2 - t_1) - t_1 t_2 - d_1 - d_2}{(t_2 - t_1)^2} = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение: $\begin{cases} t_1 = -\sqrt{d_1 + d_2}, \\ t_2 = \sqrt{d_1 + d_2}. \end{cases}$

Достаточное условие:
Проверим, выполнены ли следующие условия:
a) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1}\left(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}\right) > 0,$

b) $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1}\left(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}\right) \dfrac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2}\left(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}\right) - \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial t_1 t_2}\left(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}\right)\right)^2 > 0.$

Для этого вычислим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1} = \frac{2\left(t_2^{\,2} + d_1 + d_2\right)}{(t_2 - t_1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2} = -\frac{2(t_1 t_2 + d_1 + d_2)}{(t_2 - t_1)^3},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2} = \frac{2\left(t_1^{\,2} + d_1 + d_2\right)}{(t_2 - t_1)^3}.$$

Теперь найдем значения $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1}$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2}$ и $\dfrac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2}$ в точке $\left(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}\right)$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1}\left(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}\right) = \frac{t_2^{\,2} + d_1 + d_2}{4 t_2^{\,3}} = \frac{\left(\sqrt{d_1 + d_2}\right)^2 + d_1 + d_2}{4\left(\sqrt{d_1 + d_2}\right)^3} = \frac{2\left(\sqrt{d_1 + d_2}\right)^2}{4\left(\sqrt{d_1 + d_2}\right)^3} = \frac{1}{2\sqrt{d_1 + d_2}},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_2}\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)=\frac{-t_2^{\ 2}+d_1+d_2}{4t_1^{\ 3}}=\frac{-\left(\sqrt{d_1+d_2}\right)^2+d_1+d_2}{4\left(-\sqrt{d_1+d_2}\right)^3}=0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2}\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)=\frac{t_2^{\ 2}+d_1+d_2}{4t_2^{\ 3}}=\frac{\left(\sqrt{d_1+d_2}\right)^2+d_1+d_2}{4\left(\sqrt{d_1+d_2}\right)^3}=\frac{2\left(\sqrt{d_1+d_2}\right)^2}{4\left(\sqrt{d_1+d_2}\right)^3}=\frac{1}{2\sqrt{d_1+d_2}}.$$

Итак, очевидно что $\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1}\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{d_1+d_2}}>0$,

$\frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2}\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{d_1+d_2}}>0$.

Теперь вычислим значение следующего выражения:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 \partial t_1}\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)\frac{\partial^2 F}{\partial t_2 \partial t_2}\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)-\left(\frac{\partial^2 F}{\partial t_1 t_2}\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{d_1+d_2}}\ \frac{1}{2\sqrt{d_1+d_2}}-0=\frac{1}{4(d_1+d_2)}>0.$$

Таким образом, точка с координатами $\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)$ является точкой локального минимума функции $F(t_1,t_2)=\frac{t_2-t_1}{2}+\frac{t_1t_2+d_1+d_2}{t_2-t_1}$, если она принадлежит области определения функции $F(t_1,t_2)$.

Область определения функции $F(t_1,t_2)$ представляет собой $[-1,0]\times[0,1]/\{0\}$.
Пусть $\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)\notin[-1,0]\times[0,1]/\{0\}$, чтобы найти глобальный минимум, необходимо рассматривать поведение функции на границе.

Рассмотрим случаи:
а) $t_1=0$.

$F(0,t_2)=\frac{t_2}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2}$.

Будем минимизировать эту функцию по t_2:

$\frac{\partial F}{\partial t_2}=\frac{1}{2}-\frac{d_1+d_2}{t_2^{\ 2}}=0$,

$\frac{t_2^{\ 2}-2(d_1+d_2)}{2t_2^{\ 2}}=0$,

$t_2=\sqrt{2(d_1+d_2)}$, но т.к. $\sqrt{d_1+d_2}>1$, то $\sqrt{2(d_1+d_2)}>1$, а значит, минимальное значение функция $F(0,t_2)=\frac{t_2}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2}$ принимает в точке (0,1).

$F(0,1)=\frac{1}{2}+d_1+d_2$.

b) $t_2 = 0$, аналогично получаем:

$F(t_1,0) = -\frac{t_1}{2} - \frac{d_1 + d_2}{t_1}$,

$\frac{\partial F}{\partial t_1} = -\frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{t_1^{\,2}} = 0$,

$\frac{t_1^{\,2} - 2(d_1 + d_2)}{2t_1^{\,2}} = 0$,

$t_1 = -\sqrt{2(d_1 + d_2)}$, но т.к. $-\sqrt{d_1 + d_2} < -1$, то $-\sqrt{2(d_1 + d_2)} < -1$, а значит, минимальное значение функция $F(t_1,0) = -\frac{t_1}{2} - \frac{d_1 + d_2}{t_1}$ принимает в точке (-1,0).

$F(-1,0) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2$.

c) $t_2 = 1$,

$F(t_1,1) = \frac{1 - t_1}{2} + \frac{t_1 + d_1 + d_2}{1 - t_1}$,

$\frac{\partial F}{\partial t_1} = -\frac{1}{2} + \frac{1 - t_1 + t_1 + d_1 + d_2}{(1 - t_1)^2} = 0$,

$\frac{t_1^{\,2} - 2t_1 - 1 - 2(d_1 + d_2)}{2(1 - t_1)^2} = 0$,

$t_1 = 1 - \sqrt{2 + 2(d_1 + d_2)}$, но т.к. $-\sqrt{d_1 + d_2} < -1$, то $1 - \sqrt{2 + 2(d_1 + d_2)} < -1$, а значит, минимальное значение функция $F(t_1,1) = \frac{1 - t_1}{2} + \frac{t_1 + d_1 + d_2}{1 - t_1}$ принимает в точке (-1,1).

$F(-1,1) = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2}$.

Итак, если $\left(-\sqrt{d_1 + d_2}, \sqrt{d_1 + d_2}\right) \notin [-1,0] \times [0,1] / \{0\}$, то минимальное значение достигается на границе:

$F(0,1) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2$,

$F(-1,0) = \frac{1}{2} + d_1 + d_2$,

$F(-1,1) = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2}$,

Очевидно, $F(0,1) = F(-1,0) > F(-1,1)$, значит, минимальное значение на границе достигается в точке (-1,1) и погрешность оптимального метода восстановления для оптимальных узлов $\hat{t}_1, \hat{t}_2$ равна

$\hat{x}'(0) = \frac{1}{2} + \frac{d_1 + d_2}{2}$.

Случай Б):

$0 \le t_1 < t_2 \le 1$.

Найдем значения t_1, t_2, минимизирующие погрешность оптимального метода.

Рассмотрим функцию: $F(t_1,t_2)=\frac{t_2+t_1}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2-t_1}$ и найдем, при каких значениях t_1,t_2 она достигает минимума.
Необходимое условие:

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}=\frac{\partial F}{\partial t_2}=0.$$

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial t_1}=\frac{1}{2}+\frac{d_1+d_2}{(t_2-t_1)^2}=0,\\ \frac{\partial F}{\partial t_2}=\frac{1}{2}-\frac{d_1+d_2}{(t_2-t_1)^2}=0.\end{cases} \Rightarrow \text{Система несовместна.}$$

Функция не имеет минимума, т.к. не выполняется необходимое условие минимума, следовательно, остается рассмотреть значения функции $F(t_1,t_2)$ на границе области определения. Область определения функции $F(t_1,t_2)$ задается следующей системой:

$$D(F)=\begin{cases}0\le t_1\le 1,\\ 0\le t_2\le 1,\\ t_1<t_2.\end{cases}$$

a) Пусть $t_1=0$,

$$F(0,t_2)=\frac{t_2}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2}.$$

Будем минимизировать эту функцию по t_2:

$$\frac{\partial F}{\partial t_2}=\frac{1}{2}-\frac{d_1+d_2}{t_2^{\ 2}}=0,$$

$$\frac{t_2^{\ 2}-2(d_1+d_2)}{2t_2^{\ 2}}=0,$$

$t_2=\sqrt{2(d_1+d_2)}$ и при $\sqrt{2(d_1+d_2)}<1$ минимальное значение функция $F(0,t_2)=\frac{t_2}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2}$ принимает в точке $\left(0,\sqrt{2(d_1+d_2)}\right)$.

Если $\sqrt{2(d_1+d_2)}>1$, а значит, минимальное значение функция $F(0,t_2)=\frac{t_2}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2}$ принимает в точке (0,1).

b) $t_2=1$,

$$F(t_1,1)=\frac{1+t_1}{2}+\frac{d_1+d_2}{1-t_1},$$

$$\frac{\partial F}{\partial t_1}=\frac{1}{2}+\frac{d_1+d_2}{(1-t_1)^2}=0,$$

$$\frac{(1-t_1)^2+2(d_1+d_2)}{2(1-t_1)^2}=0.$$

Не имеет решений.

Итак, при $\sqrt{2(d_1+d_2)}<1$ минимальное значение функция $F(t_1,t_2)=\frac{t_2+t_1}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2-t_1}$ принимает в точке $\left(0,\sqrt{2(d_1+d_2)}\right)$, а при $\sqrt{2(d_1+d_2)}>1$ минимальное значение функция $F(t_1,t_2)=\frac{t_2+t_1}{2}+\frac{d_1+d_2}{t_2-t_1}$ принимает в точке (0,1).

Итог:
Решая задачу восстановления значения производной функции в нуле по двум различным значениям функции в других точках, получили, что:

Оптимальный метод восстановления $\hat{m}(y)=\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}$, а погрешность оптимального метода восстановления:

А) $-1\le t_1<0<t_2\le 1$,

$E(x',W,t_1,t_2d_1,d_2,m)=\sqrt{d_1+d_2}$, достигается в точке $\left(-\sqrt{d_1+d_2},\sqrt{d_1+d_2}\right)$, если $\sqrt{d_1+d_2}\le 1$,

$E(x',W,t_1,t_2d_1,d_2,m)=\frac{1}{2}+\frac{d_1+d_2}{2}$, достигается в точке $(-1,1)$,если $\sqrt{d_1+d_2}>1$.

Б) $0\le t_1<t_2\le 1$,

$E(x',W,t_1,t_2d_1,d_2,m)=\sqrt{2(d_1+d_2)}$, достигается в точке $\left(0,\sqrt{2(d_1+d_2)}\right)$, если $\sqrt{2(d_1+d_2)}<1$,

$E(x',W,t_1,t_2d_1,d_2,m)=\frac{1}{2}+d_1+d_2$, достигается в точке $(0,1)$, если $\sqrt{2(d_1+d_2)}>1$.