Математические заметки

Том ___ выпуск ___ год ____

УДК 517.9

Оптимальное восстановление линейных операторов на однородном соболевском пространстве

Е. О. Сивкова

Для однопараметрического семейства линейных операторов рассматривается задача оптимального восстановления оператора на однородном соболевском пространстве при данном значении параметра по неточной информации об операторе при другом значении параметра. Построено семейство оптимальных методов восстановления. В качестве следствия получены оптимальные методы восстановления решений некоторых уравнений математической физики.

Библиография: 10 названий.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, оптимальный метод, преобразование Фурье, экстремальная задача.

Введение

В работе рассматривается однопараметрическое семейство линейных непрерывных операторов из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$, и для него ставится задача об оптимальном восстановлении оператора на шаре однородного соболевского пространства на $\mathbb{R}^d$ при данном значении параметра по приближенной информации об операторе с другими значениями параметра. Одной из важных мотиваций такой постановки является задача о восстановлении решения эволюционного уравнения, в частности, некоторых уравнений математической физики. Для рассматриваемого семейства операторов найден набор оптимальных методов восстановления, параметризованный некоторым множеством измеримых существенно ограниченных функций. В качестве непосредственных следствий доказанного результата получены оптимальные методы восстановления решения уравнения теплопроводности и решения задачи Дирихле для полупространства. Следует отметить, что ранее в работе [1] также рассматривалась задача оптимального восстановления семейства операторов, но в несколько иной постановке. Сама тематика, связанная с оптимальным восстановлением линейных функционалов и операторов, возникла в шестидесятые годы прошлого века, начиная с работы С. А. Смоляка [2], и с тех пор активно развивается. Что касается данной статьи, то отметим близкие к ней работы [3]–[9].

Постановка задачи и формулировка основного результата

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Через $\mathbb{R}^d$ обозначаем евклидово пространство всех упорядоченных наборов из d вещественных чисел со скалярным произведением $\langle x,\,\xi\rangle = \sum_{i=1}^d x_i\xi_i$, где $x = (x_1,\dots,x_d)$ и $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_d)$. Евклидову норму (длину, модуль) вектора $\xi \in \mathbb{R}^d$ обозначаем $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2+\ldots+\xi_d^2}$.

Пусть n — целое неотрицательное число. Если $n \geqslant 1$, то положим

$$\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2 d\xi < \infty \,\},$$

где $F[f](\cdot)$ — преобразование Фурье функции $f(\cdot)$.

Пространство $\mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d)$ называется однородным соболевским пространством. Оно играет важную роль в теории функциональных пространств.

Определим следующее множество

$$W_2^n(\mathbb{R}^d) = \{\, f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d) : \quad \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2 d\xi \leqslant 1 \,\},$$

которое будем называть соболевским классом.

Если $n = 0$, то $W_2^0(\mathbb{R}^d)$ — единичный шар в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Пусть $a(\cdot)$ — непрерывная неубывающая функция на $\mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$ и $a(\eta) \to +\infty$ при $\eta \to +\infty$.

Определим семейство операторов $\Lambda_a(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $t \geqslant 0$, действующих в образах Фурье по формулам

$$F[\Lambda_a(t)f(\cdot)](\xi) = e^{-ta(|\xi|)}F[f](\xi) \ \text{ для п. в. } \xi \in \mathbb{R}^d,\ \ \forall\, f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d).$$

Очевидно, что это семейство линейных непрерывных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Мы ставим следующую задачу. Пусть при $t = T > 0$ имеется возможность измерить значение оператора $\Lambda_a(T)$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$ с точностью до $\delta > 0$, т. е. нам известна функция $g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ такая, что

$$\|\Lambda_a(T)f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta \tag{1}$$

при некотором $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$. По этой информации мы хотим восстановить значение оператора $\Lambda_a(\tau)$, где $0 \leqslant \tau < T$.

Точная постановка такова. Под методами восстановления мы понимаем любые отображения $m\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$. Сопоставим каждому такому методу его *погрешность*, которую определим следующим образом

$$e(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta, m) = \sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d),\\ \|\Lambda_a(T)f(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta}} \|\Lambda_a(\tau)f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Это то “наихудшее”, что мы можем получить, используя данный метод, зная соотношение (1) и не зная функции $f(\cdot)$.

Нас интересуют, разумеется, те методы, на которых эта величина минимальна, т. е. такие методы $\widehat{m}$, что

$$e(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta, \widehat{m}) = \inf_m e(\tau, W_2^r(\mathbb{R}^d), \delta, m), \tag{2}$$

где нижняя грань берется по всем отображениям (методам) $m\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$. Такие методы будем называть *оптимальными.*

Величину справа в (2) будем называть *погрешностью оптимального* восстановления и обозначать $E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta)$.

Перед формулировкой основного результата приведем некоторые определения.

Обозначим через $h(\cdot)$ функцию на $\mathbb{R}_+$, заданную параметрически:

$$x(\xi) = |\xi|^{2n} e^{2Ta(|\xi|)}, \quad y(\xi) = e^{2(T-\tau)a(|\xi|)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \tag{3}$$

Нетрудно проверить, что функция $h(\cdot)$ непрерывна, не убывает и $h(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$.

Основное утверждение будет сформулировано в терминах наименьшей вогнутой функции, мажорирующей функцию $h(\cdot)$. В выпуклом анализе хорошо изучен вопрос о существовании наибольшей выпуклой функции, не превосходящей данную. Мы приведем нужные нам факты, но в терминах вогнутости, поскольку если функция $f(\cdot)$ вогнута, то функция $-f(\cdot)$ выпукла.

С каждой функцией $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ свяжем множества

$$\operatorname{dom} \varphi = \{\, x \in \mathbb{R} : \varphi(x) > -\infty \,\}$$

и

$$A(\varphi) = \{\, (x, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \alpha \leqslant \varphi(x), \ \ x \in \operatorname{dom} \varphi \,\}.$$

Если множество $A(\varphi)$ выпукло, то функция φ называется вогнутой. Это равносильно тому, что выполняется неравенство Иенссена

$$\varphi((1-\gamma)x_1 + \gamma x_2) \geqslant (1-\gamma)\varphi(x_1) + \gamma\varphi(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ и $\gamma \in [0, 1]$.

Если множество $A(\varphi)$ замкнуто, то функция φ называется замкнутой. Нетрудно проверить, что если функция φ непрерывна на $\operatorname{dom} \varphi$, то она замкнута.

Будем считать, что функция $h(\cdot)$ определена на всей прямой, полагая $h(x) = -\infty$, если $x < 0$. Теорема о существовании наименьшей вогнутой мажоранты для $h(\cdot)$ звучит так: *если существует аффинная функция, мажорирующая* $h(\cdot)$, *то среди всех замкнутых вогнутых функций, мажорирующих* $h(\cdot)$, *есть наименьшая* (см., например, [8], п. 2.6.3).

Проверим, что существует аффинная функция, которая всюду не меньше $h(\cdot)$. Действительно, поскольку частное $y(\xi)/x(\xi) = e^{-\tau a(|\xi|)}|\xi|^{-2n}$ монотонно стремится к нулю при $|\xi| \to +\infty$, то найдется точка ξ^* такая, что $y(\xi) \leqslant x(\xi)$, если $|\xi| \geqslant |\xi^*|$. А так как функция $x(\xi) = |\xi|^{2n} e^{2Ta(|\xi|)}$ монотонно возрастает при $|\xi| \to +\infty$, то $h(x) \leqslant x$ для всех $x \in [x(\xi^*), +\infty)$.

Рассмотрим аффинную функцию $l(x) = x + y(\xi^*)$. Поскольку функция $y(\xi) = e^{(T-\tau)a(|\xi|)}$ положительна и не убывает при $|\xi| \to +\infty$, то $h(x) \leqslant y(\xi^*) \leqslant x + y(\xi^*)$, если $x \in [0,\ x(\xi^*))$, и $h(x) \leqslant x < x + y(\xi^*)$, если $x \in [x(\xi^*), +\infty)$. Таким образом, $h(x) \leqslant l(x)$ при $x \in \mathbb{R}$.

Следовательно, согласно сказанному выше, существует наименьшая из всех вогнутых замкнутых функций, мажорирующих функцию $h(\cdot)$, которую обозначим

$\theta_\tau(\cdot)$ (нас интересует зависимость от τ этой функции; параметр T и функция $a(\cdot)$ фиксированы и поэтому зависимость от них не отмечаем).

Основным результатом работы является следующая

Теорема 1. *Пусть $0 \leqslant \tau < T$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) = \delta\sqrt{\theta_\tau(\delta^{-2})}\,. \tag{4}$$

Существуют положительные числа $\lambda_i = \lambda_i(\tau, T, \delta, a(\cdot))$, $i = 1, 2$, такие, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$ на $\mathbb{R}^d$, для которых выполнено неравенство

$$\frac{|\omega(\xi)|^2 e^{2Ta(|\xi|)}}{\lambda_1} + \frac{|1-\omega(\xi)|^2}{\lambda_2\,|\xi|^{2n}} \leqslant e^{2\tau a(|\xi|)} \tag{5}$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, непусто, и для каждой такой функции $\omega(\cdot)$ метод $\widehat{m}_\omega$, определенный в образах Фурье формулой

$$F[\widehat{m}_\omega(g)](\xi) = \omega(\xi) e^{(T-\tau)a(|\xi|)} F[g](\xi) \tag{6}$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, является оптимальным.

Сделаем некоторые замечания по поводу сформулированной теоремы.

1) Среди оптимальных методов можно выделить серию методов, для которых функции ω равны нулю за пределами некоторого компакта. Действительно, положим

$$D = \{\,\xi \in \mathbb{R}^d : \lambda_2|\xi|^{2n} e^{2\tau a(|\xi|)} \leqslant 1\,\}.$$

Для каждой функции $\omega(\cdot)$, удовлетворяющей неравенству (5) для п.в. $\xi \in D$ и равной нулю вне D, метод $\widehat{m}_\omega$, определенный формулой

$$\widehat{m}_\omega(g(\cdot))(\cdot) = (K * g)(\cdot),$$

где $F[K](\xi) = \omega(\xi)e^{(T-\tau)a(|\xi|)}$ для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, является оптимальным.

2) Оптимальные методы определены корректно. Действительно, из (5) следует, что сомножитель при $F[g](\cdot)$ в формуле (6) есть существенно ограниченная функция, и значит, произведение принадлежит $L_2(\mathbb{R}^d)$.

По поводу методов, определенных сверткой, заметим, что поскольку функция $\omega(\cdot)$ равна нулю вне множества D, то преобразование Фурье функции $K(\cdot)$ также равно нулю вне D и, очевидно, ограничено на D. Следовательно, $F[K](\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и поэтому $K(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, а тогда $\widehat{m}_\omega(g(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ как свертка двух функций из $L_2(\mathbb{R}^d)$.

3) Если $\theta_\tau(\cdot) = h(\cdot)$ и функция $h(\cdot)$ дифференцируема, то числа λ_i, $i = 1, 2$ могут быть найдены явно (см. примеры ниже).

Отметим еще, что оптимальные методы линейны и представляют собой “сглаживание“ исходного наблюдения.

Доказательство теоремы

Перед непосредственным доказательством теоремы докажем следующее

Предложение 1. *Если точка $x_0 > 0$ такова, что $\theta_\tau(x_0) > h(x_0)$, то существует конечный интервал $(x_1, x_2) \subset (0, +\infty)$, содержащий точку x_0, такой, что $\theta_\tau(x_j) = h(x_j)$, $j = 1, 2$, и функция $\theta_\tau(\cdot)$ на (x_1, x_2) совпадает с некоторой возрастающей аффинной функцией.*

Доказательство. Пусть $0 < \widehat{x} < +\infty$. Так как функция $h(\cdot)$ непрерывна, то существует окрестность $\widehat{x}$, в которой $h(\cdot)$ не меньше некоторого числа. Тогда $\theta_\tau(\cdot)$ в этой окрестности не меньше того же числа и значит, в силу вогнутости, непрерывна на $(0, +\infty)$ (см. [10], п. 2.6.2).

Отсюда следует, что функция $\theta_\tau(\cdot)$ непрерывна и в нуле, поскольку в противном случае она была бы незамкнутой.

Кроме того, вследствие свойств функции $h(\cdot)$, легко видеть, что функция $\theta_\tau(\cdot)$ возрастает.

Рассмотрим множество

$$M = \{\, x \in \mathbb{R}_+ : \theta_\tau(x) = h(x) \,\}$$

и покажем, что оно непусто и неограничено.

Докажем, что $0 \in M$. Предположим, что это не так, т. е. $\theta_\tau(0) > h(0) = 1$. Обозначим $c = \theta_\tau(0) - 1$. В силу непрерывности функций $\theta_\tau(\cdot)$ и $h(\cdot)$ найдется отрезок $[0, \delta]$ такой, что $\theta_\tau(x) \geqslant \theta(0) - c/2$ и $h(x) \leqslant 1 + c/2$ для всех $x \in [0, \delta]$.

Если теперь провести отрезок, соединяющий точки $(0, 1 + c/2)$ и $(\delta, \theta_\tau(\delta))$, то получим вогнутую непрерывную (и тем самым замкнутую) функцию, мажорирующую $h(\cdot)$ и которая меньше $\theta_\tau(\cdot)$ на $[0,\ \delta)$, что противоречит определению функции $\theta_\tau(\cdot)$.

Таким образом, $0 \in M$ и тем самым $M \neq \emptyset$. Множество M, очевидно, замкнуто. Докажем, что оно неограничено.

Предположим, что оно ограничено. Тогда существует наибольшее число $\widehat{x} \in M$. Покажем, что в этом случае график функции $\theta_\tau(\cdot)$ на $[\widehat{x}, +\infty)$ совпадает с графиком некоторой аффинной функции.

Пусть $x_0 > \widehat{x}$ и $a = \theta_\tau(x_0) - h(x_0)$. Снова, в силу непрерывности функций $\theta_\tau(\cdot)$ и $h(\cdot)$, найдется отрезок $[x_1, x_2] \subset (\widehat{x}, +\infty)$, $x_1 < x_0 < x_2$, такой, что $h(x) \leqslant h(x_0) + a/2$ и $\theta_\tau(x) \geqslant \theta_\tau(x_0) - a/2$ для всех $x \in [x_1, x_2]$. Определим аффинную функцию $l(\cdot)$ равенством

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}\theta_\tau(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}\theta_\tau(x_2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ясно, что на $[x_1, x_2]$ график этой функции — отрезок с концами в точках $(x_1, \theta_\tau(x_1))$ и $(x_2, \theta_\tau(x_2))$.

Рассмотрим функцию $\widehat{\theta}$ на $\mathbb{R}$, определенную формулой

$$\widehat{\theta}(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in (-\infty, 0), \\ \theta_\tau(x), & x \notin [x_1, x_2], \\ l(x), & x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\widehat{\theta}(\cdot)$ — вогнутая непрерывная функция, мажорирующая функцию $h(\cdot)$, причем $\widehat{\theta}(x) = \theta_\tau(x)$ при $x \notin (x_1, x_2)$, и $\widehat{\theta}(x) \leqslant \theta_\tau(x)$ при $x \in (x_1, x_2)$. Если $\theta_\tau(x) > l(x) = \widehat{\theta}(x)$ в какой-нибудь точке $x \in (x_1, x_2)$, то это противоречит тому, что

$\theta_\tau(\cdot)$ — наименьшая из вогнутых замкнутых функций, мажорирующих $h(\cdot)$. Следовательно, на отрезке $[x_1, x_2]$ функция $\theta_\tau(\cdot)$ совпадает с аффинной функцией.

Это верно для любой точки $x_0 > \widehat{x}$, поэтому на $[\widehat{x}, +\infty)$ график $\theta_\tau(\cdot)$ представляет собой прямую с угловым коэффициентам $k > 0$ (поскольку $h(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$).

Рассмотрим теперь прямую $y = k_1 x$, $x \in \mathbb{R}_+$, где $0 < k_1 < k$. Аналогично предыдущему, легко показать, что найдется точка $x' > \widehat{x}$ такая, что $h(x) \leqslant k_1 x$ для всех $x \in [x', +\infty)$. Положим

$$\theta'(x) = \begin{cases} -\infty, & x \in (-\infty, 0), \\ \theta_\tau(x), & x \in [0, x'), \\ k_1(x - x') + \theta(x'), & x \in [x', +\infty). \end{cases}$$

Легко видеть, что $\theta'(\cdot)$ — непрерывная на $\mathbb{R}_+$ вогнутая функция, мажорирующая функцию $h(\cdot)$. На интервале $[x', +\infty)$ функция $\theta_\tau(\cdot)$, очевидно, имеет вид $\theta_\tau(x) = k(x-x') + \theta_\tau(x')$ и поэтому для всех x из этого интервала $\theta_\tau(x) - \theta'(x) = (k - k_1)(x - x') > 0$ в противоречии с тем, что $\theta_\tau(\cdot)$ — наименьшая из вогнутых замкнутых функций, мажорирующих $h(\cdot)$. Пришли к противоречию и тем самым множество M неограничено.

Пусть точка $x_0 > 0$ такова, что $\theta_\tau(x_0) > h(x_0)$ и пусть (x_1, x_2) — максимальный интервал, содержащий x_0, где $\theta_\tau(x) > h(x)$. Этот интервал конечен в силу неограниченности M и на его концах $\theta_\tau(\cdot)$ совпадает с $h(\cdot)$. Для каждой точки этого интервала существует ее окрестность, где $\theta_\tau(\cdot)$ совпадает с аффинной функцией и значит, на всем интервале $\theta_\tau(\cdot)$ совпадает с аффинной функцией.

Теперь приступим непосредственно к доказательству теоремы. Общая схема рассуждений такова. Мы сначала докажем неравенство

$$E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) \geqslant \delta\sqrt{\theta_\tau(\delta^{-2})}, \tag{7}$$

а затем покажем, что погрешность методов (6) равна величине справа в (7). Отсюда будет следовать оптимальность этих методов и равенство (4).

Сначала докажем, что справедлива следующая оценка

$$E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) \geqslant \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d), \\ \|\Lambda_a(T) f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta}} \|\Lambda_a(\tau) f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{8}$$

Действительно, пусть $f_0(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$ и $\|\Lambda_a(T) f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$. Очевидно, функция $-f_0(\cdot)$ также удовлетворяет этим соотношениям, и тогда для любого $m\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned} 2\|\Lambda_a(\tau) f_0(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|\Lambda_a(\tau) f_0(\cdot) - m(0)(\cdot) - (\Lambda_a(\tau)(-f_0(\cdot)) - m(0)(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d), \\ \|\Lambda_a(T) f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta}} \|\Lambda_a(\tau) f(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d),\ g(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d), \\ \|\Lambda_a(T) f(\cdot) - g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta}} \|\Lambda_a(\tau) f(\cdot) - m(g(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 2e(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta, m). \end{aligned}$$

Переходя слева к верхней грани по всем функциям $f(\cdot)$ таким, что $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$ и $\|\Lambda_a(T)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta$, приходим к неравенству

$$\sup_{\substack{f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d),\\ \|\Lambda_a(T)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta}} \|\Lambda_a(\tau)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant e(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta, m).$$

Метод m был выбран произвольно и поэтому переходя справа к нижней грани по всем методам m, получаем соотношение (8).

Величина справа в (8) есть значение следующей экстремальной задачи

$$\|\Lambda_a(\tau)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \to \max, \quad \|\Lambda_a(T)f(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2 d\xi \leqslant 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d), \tag{9}$$

т. е. точная верхняя грань максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Согласно теореме Планшереля

$$\|\Lambda_a(t)f(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2ta(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\, d\xi.$$

Учитывая это, получим, что квадрат значения задачи (9) равен значению такой задачи

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\, d\xi \to \max,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Ta(|\xi|)}|F[f](\xi)|^2\, d\xi \leqslant \delta^2,$$
$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\, d\xi \leqslant 1, \quad f(\cdot) \in \mathcal{W}_2^n(\mathbb{R}^d) \tag{10}$$

Эту задачу можно рассматривать как задачу на множестве конечных положительных мер вида $d\mu_f(E) = (2\pi)^{-d}\int_E |F[f](\xi)|^2\, d\xi$ на σ-алгебре Σ измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}^d$, когда $f(\cdot)$ пробегает все допустимые функции. Но удобно рассмотреть ее расширенный вариант, когда переменными являются все конечные положительные меры на Σ. Это будет задача выпуклого программирования, для которой хорошо известны необходимые и достаточные условия существования решения (теорема Каруша–Куна–Таккера, см., например, [11]). Нетрудно найти решение этой задачи, представляющее собой либо одну, либо две δ-функции Дирака. Можно выбрать δ-образную последовательность допустимых в задаче (10) функций, аппроксимирующую решение расширенной задачи. Это дает оценку снизу для задачи (10), которая, как оказывается, совпадает со значением расширенной задачи, т. е. значения задачи (10) и ее расширения одинаковы. Опуская все эти рутинные рассуждения (которые в разных вариантах использовались и ранее, см., например, [5], [6]), мы сразу предъявляем последовательность, которая дает нужную оценку.

Перейдем к построению соответствующих δ-образных последовательностей. Функция $\xi \mapsto x(\xi)$ равна нулю в нуле и монотонно возрастает при $|\xi| \to +\infty$. Следовательно, для данного $\delta > 0$ существует $\xi_0 = \xi_0(\delta)$ такое, что $x(\xi_0) = |\xi_0|^{2n}e^{2Ta(|\xi_0|)} =$

δ^{-2}. Рассмотрим отдельно два возможных случая: $y(\xi_0) = \theta_\tau(x(\xi_0))$ и $y(\xi_0) < \theta_\tau(x(\xi_0))$ (напомним, $\theta_\tau(\cdot)$ — наименьшая из всех вогнутых замкнутых функций, мажорирующих функцию $h(\cdot)$).

1) Пусть $y(\xi_0) = \theta_\tau(x(\xi_0))$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\square_k$ куб в $\mathbb{R}^d$, образованный векторами $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, для которых $\xi_{0i} \leqslant \xi_i \leqslant \xi_{0i} + 1/k$, если $\xi_{0i} \geqslant 0$ и $\xi_{0i} - 1/k \leqslant \xi_i \leqslant \xi_{0i}$, если $\xi_{0i} < 0$.

Определим функции $\psi_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, по формулам

$$\psi_k(\xi) = \begin{cases} \left(|\xi_0| + \dfrac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-n} (2\pi k)^{d/2}, & \xi \in \square_k; \\ 0, & \xi \notin \square_k. \end{cases}$$

Ясно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $\varphi_k = F^{-1}[\psi_k]$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$, и покажем, что функции φ_k, $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (10).

Действительно, если $\xi \in \square_k$, то легко видеть, что $|\xi_0| \leqslant |\xi| \leqslant |\xi_0| + \sqrt{d}/k$ и тогда, учитывая определение ξ_0 и то, что $e^{-2Ta(|\xi|)} \leqslant e^{-2Ta(|\xi_0|)}$, будем иметь

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2Ta(|\xi|)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 \, d\xi = \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-2n} k^d \int\limits_{\square_k} e^{-2Ta(|\xi|)} \, d\xi$$
$$\leqslant \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-2n} e^{-2Ta(|\xi_0|)} = \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-2n} \delta^2 |\xi_0|^{2n} < \delta^2$$

и

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\xi|^{2n} |F[\varphi_k](\xi)|^2 \, d\xi = \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-2n} k^d \int\limits_{\square_k} |\xi|^{2n} \, d\xi$$
$$\leqslant \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-2n} \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{2n} = 1.$$

Таким образом, последовательность $\varphi_k(\cdot)$ допустима в задаче (10).

Оценим значения максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях. Учитывая, что $e^{-2\tau a(|\xi|)} \geqslant e^{-2\tau a(|\xi_0| + \sqrt{d}/k)}$, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-2\tau a(|\xi|)} |F[\varphi_k](\xi)|^2 \, d\xi$$
$$= \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-2n} k^d \int\limits_{\square_k} e^{-2\tau a(|\xi|)} \, d\xi \geqslant \left(|\xi_0| + \frac{\sqrt{d}}{k}\right)^{-2n} e^{-2\tau a(|\xi_0| + \sqrt{d}/k)}.$$

Ясно, что величина справа стремится к величине

$$|\xi_0|^{-2n} \, e^{-2\tau a(|\xi_0|)} = \frac{\theta_\tau(x(\xi_0))}{x(\xi_0)} = \delta^2 \theta_\tau(\delta^{-2}).$$

Отсюда следует, что значение задачи (10) не меньше этой величины и тем самым в случае $y(\xi_0) = \theta_\tau(x(\xi_0))$ получена оценка (7).

2) Пусть $y(\xi_0) < \theta_\tau(x(\xi_0))$. Согласно доказанному предложению существует конечный интервал $(x(\xi_1), x(\xi_2)) \subset (0, +\infty)$, содержащий точку $x(\xi_0)$, такой, что $\theta_\tau(x(\xi_j)) = y(\xi_j)$, $j = 1, 2$, и функция $\theta_\tau(\cdot)$ на $[x(\xi_1), x(\xi_2)]$ совпадает с возрастающей аффинной функцией

$$l(x(\xi)) = \frac{x(\xi_2) - x(\xi)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)}\, y(\xi_1) + \frac{x(\xi) - x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)}\, y(\xi_2), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Для каждого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $\square_{j,k}$, $j = 1, 2$ кубы в $\mathbb{R}^d$, образованные векторами $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, для которых $\xi_{ji} \leqslant \xi_i \leqslant \xi_{ji} + 1/k$, если $\xi_{ji} \geqslant 0$ и $\xi_{ji} - 1/k \leqslant \xi_i \leqslant \xi_{ji}$, если $\xi_{ji} < 0$. Ясно, что $\square_{1,k} \cap \square_{2,k} = \emptyset$ при достаточно больших k. Положим

$$K_1 = \frac{x(\xi_2) - x(\xi_0)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} \left(\frac{|\xi_1|}{|\xi_1| + \sqrt{d}/k} \right)^{2n} e^{2Ta(|\xi_1|)},$$
$$K_2 = \frac{x(\xi_0) - x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} \left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_2| + \sqrt{d}/k} \right)^{2n} e^{2Ta(|\xi_2|)}.$$

Определим функции $\psi_k(\cdot)$, $k \in \mathbb{N}$, по формулам

$$\psi_k(\xi) = \begin{cases} (2\pi k)^{d/2} \delta \sqrt{K_1}, & \xi \in \square_{1,k}; \\ (2\pi k)^{d/2} \delta \sqrt{K_2}, & \xi \in \square_{2,k}; \\ 0, & \xi \notin \square_{1,k} \cup \square_{2,k}. \end{cases}$$

Ясно, что эти функции принадлежат $L_2(\mathbb{R}^d)$. Положим $\varphi_k = F^{-1}[\psi_k]$, где F^{-1} — обратное преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^d)$, и покажем, что функции φ_k, $k \in \mathbb{N}$, допустимы в задаче (10).

Действительно, если $\xi \in \square_{j,k}$ $j = 1, 2$, то легко видеть, что $|\xi_j| \leqslant |\xi| \leqslant |\xi_j| + \sqrt{d}/k$ и тогда, учитывая то, что $e^{-2Ta(|\xi|)} \leqslant e^{-2Ta(|\xi_j|)}$, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2Ta(|\xi|)} |F[\varphi_k](\xi)|^2\, d\xi &= \delta^2 k^d K_1 \int_{\square_{k,1}} e^{-2Ta(|\xi|)}\, d\xi + \delta^2 k^d K_2 \int_{\square_{k,2}} e^{-2Ta(|\xi|)}\, d\xi \\ &\leqslant \delta^2 \left(K_1 e^{-2Ta(|\xi_1|)} + K_2 e^{-2Ta(|\xi_2|)} \right) \\ &\leqslant \delta^2 \left(\frac{x(\xi_2) - x(\xi_0)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} \left(\frac{|\xi_1|}{|\xi_1| + \sqrt{d}/k} \right)^{2n} + \frac{x(\xi_0) - x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} \left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_2| + \sqrt{d}/k} \right)^{2n} \right) \\ &\leqslant \delta^2 \left(\frac{x(\xi_2) - x(\xi_0)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} + \frac{x(\xi_0) - x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} \right) = \delta^2 \end{aligned}$$

и

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[\varphi_k](\xi)|^2\,d\xi=\delta^2k^dK_1\int\limits_{\square_{1,k}}|\xi|^{2n}\,d\xi+\delta^2k^dK_2\int\limits_{\square_{2,k}}|\xi|^{2n}\,d\xi$$
$$\leqslant\delta^2K_1\left(|\xi_1|+\sqrt{d}/k\right)^{2n}+\delta^2K_2\left(|\xi_2|+\sqrt{d}/k\right)^{2n}$$
$$=\delta^2\left(\frac{x(\xi_2)-x(\xi_0)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}|\xi_1|^{2n}e^{2Ta(|\xi_1|)}+\frac{x(\xi_0)-x(\xi_1)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}|\xi_2|^{2n}e^{2Ta(|\xi_2|)}\right)$$
$$=\delta^2\left(\frac{x(\xi_2)-x(\xi_0)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}\,x(\xi_1)+\frac{x(\xi_0)-x(\xi_1)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}\,x(\xi_2)\right)=\delta^2x(\xi_0)=1.$$

Таким образом, последовательность $\varphi_k(\cdot)$ допустима в задаче (10).

Оценим значения максимизируемого функционала в этой задаче на этих функциях. Учитывая то, что $e^{-2\tau a(|\xi|)}\geqslant e^{-2\tau a(|\xi_j|+\sqrt{d}/k)}$, получаем

$$\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2\tau a(|\xi|)}|F[\varphi_k](\xi)|^2\,d\xi=\delta^2k^dK_1\int\limits_{\square_{k_1}}e^{-2\tau a(|\xi|)}\,d\xi+\delta^2k^dK_2\int\limits_{\square_{k_2}}e^{-2\tau a(|\xi|)}\,d\xi$$
$$\geqslant\delta^2\left(\frac{x(\xi_2)-x(\xi_0)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}\left(\frac{|\xi_1|}{|\xi_1|+\sqrt{d}/k}\right)^{2n}e^{2Ta(|\xi_1|)-2\tau a(|\xi_1|+\sqrt{d}/k)}\right.$$
$$\left.+\frac{x(\xi_0)-x(\xi_1)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}\left(\frac{|\xi_2|}{|\xi_2|+\sqrt{d}/k}\right)^{2n}e^{2Ta(|\xi_2|)-2\tau a(|\xi_2|+\sqrt{d}/k)}\right)$$

Выражение справа стремится к величине

$$\delta^2\left(\frac{x(\xi_2)-x(\xi_0)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}\,y(\xi_1)+\frac{x(\xi_0)-x(\xi_1)}{x(\xi_2)-x(\xi_1)}\,y(\xi_2)\right)=\delta^2\theta_\tau(x(\xi_0))=\delta^2\theta_\tau(\delta^{-2}).$$

Значит, значение задачи (10) не меньше этой величины, и этим доказано неравенство (7) в рассматриваемом случае.

Теперь докажем оценку сверху для погрешности оптимального восстановления и оптимальность метода восстановления из утверждения теоремы.

Выберем положительные числа λ_i, $i=1,2$ так, чтобы множество функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (5), было не пусто. Выделяя полный квадрат, нетрудно убедиться, что соотношение (5) равносильно следующему неравенству

$$\left|\omega(\xi)-\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2n}e^{2Ta(|\xi|)}}\right|$$
$$\leqslant\frac{\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,e^{-(T-\tau)a(|\xi|)}\,|\xi|^n}{\lambda_1e^{-2Ta(|\xi|)}+\lambda_2|\xi|^{2n}}\sqrt{\lambda_1e^{-2Ta(|\xi|)}+\lambda_2|\xi|^{2n}-e^{-2\tau a(|\xi|)}}\qquad(11)$$

для п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим функцию

$$\eta(\xi)=-e^{-2(T-\tau)a(|\xi|)}+\lambda_1+\lambda_2|\xi|^{2n}e^{2Ta(|\xi|)},\quad \xi\in\mathbb{R}^d.$$

Функция под знаком корня отличается от функции $\eta(\cdot)$ на положительный множитель. Поэтому для того, чтобы величина справа в (11) была определена, функция $\eta(\cdot)$ должна быть неотрицательна для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$. Итак, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ нужно выбрать так, чтобы

$$-e^{-2(T-\tau)a(|\xi|)} + \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2n} e^{2Ta(|\xi|)} \geqslant 0, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Учитывая (3), это неравенство можно записать в виде

$$y(\xi) \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 x(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть сначала $y(\xi_0) = \theta_\tau(x(\xi_0))$. Так как функция $\theta_\tau(\cdot)$ вогнута и непрерывна, то множество опорных прямых к $\theta_\tau(\cdot)$ в точке $x(\xi_0)$ (т. е. таких аффинных функций $p(\cdot)$, что $p(x(\xi_0)) = \theta_\tau(x(\xi_0))$ и $p(x) \geqslant \theta_\tau(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$), непусто (см. [11]).

Фиксируем некоторую опорную прямую $\widehat{p}(\cdot)$. Очевидно, она имеет вид $\widehat{p}(x) = \lambda_1 + \lambda_2 x$ для любого $x \in \mathbb{R}$. Поскольку $\theta_\tau(\cdot)$ возрастает, то $\lambda_2 > 0$, а $\lambda_1 = p(0) \geqslant \theta_\tau(0) = 1$ (последнее равенство доказано в предложении).

Далее, так как для любого $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$y(\xi) \leqslant \theta_\tau(x(\xi)) \leqslant \widehat{p}(x(\xi)) = \lambda_1 + \lambda_2 x(\xi),$$

т. е. $-y(\xi) + \lambda_1 + \lambda_2 x(\xi) \geqslant 0$ и значит, учитывая (3),

$$-e^{-2(T-\tau)a(|\xi|)} + \lambda_1 + \lambda_2 |\xi|^{2n} e^{2Ta(|\xi|)} \geqslant 0, \ \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть теперь $y(\xi_0) < \theta_\tau(x(\xi_0))$. Как показано выше, существует конечный интервал $(x(\xi_1), x(\xi_2)) \subset (0, +\infty)$, содержащий точку $x(\xi_0)$, такой, что $\theta_\tau(x(\xi_i)) = y(\xi_i)$, $i = 1, 2$, и функция $\theta_\tau(\cdot)$ на $[x(\xi_1),\, x(\xi_2)]$ совпадает с возрастающей аффинной функцией

$$\begin{aligned} l(x(\xi)) = \frac{x(\xi_2) - x(\xi)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)}\, y(\xi_1) + \frac{x(\xi) - x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)}\, y(\xi_2) \\ = \frac{y(\xi_2) - y(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)}\, x(\xi) + \frac{y(\xi_1)x(\xi_2) - y(\xi_2)x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^d. \end{aligned}$$

Положим

$$\lambda_1 = \frac{y(\xi_1)x(\xi_2) - y(\xi_2)x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} = \frac{\theta(x(\xi_1))x(\xi_2) - \theta(x(\xi_2))x(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)};$$

$$\lambda_2 = \frac{y(\xi_2) - y(\xi_1)}{x(\xi_2) - x(\xi_1)} = \frac{\theta(x(\xi_2)) - \theta(x(\xi_1))}{x(\xi_2) - x(\xi_1)}\,,$$

и тогда $l(x(\xi)) = \lambda_1 + \lambda_2 x(\xi)$.

Поскольку $l(\cdot)$ возрастает, то $\lambda_2 > 0$. Далее, легко видеть, что $\theta(x(\xi)) \leqslant l(x(\xi))$ при $\xi \in \mathbb{R}^d$ и значит, $\lambda_1 = l(x(0)) \geqslant \theta(x(0)) = y(0) = 1$.

Итак, в данном случае имеем

$$y(\xi) \leqslant \theta(x(\xi)) \leqslant l(x(\xi)) = \lambda_1 + \lambda_2 x(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Отсюда, очевидно, следует, что множество измеримых функций $\omega(\cdot)$, удовлетворяющих неравенству (5), не пусто.

Докажем теперь оптимальность методов (6). Пусть измеримая функция $\omega(\cdot)$ удовлетворяет неравенству (5) для п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$. Оценим погрешность метода $\widehat{m}_\omega$.

Для любых $f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d)$ и $g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\|\Lambda_a(T)f(\cdot)-g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta$ имеем по теореме Планшереля (обозначая, для краткости, $z(\xi)=e^{-Ta(|\xi|)}F[f](\xi)-F[g](\xi)$

$$
\begin{aligned}
\|\Lambda_a(\tau)f(\cdot)-\widehat{m}_\omega(g)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|e^{-\tau a(|\xi|)}F[f](\xi)-\omega(\xi)e^{(T-\tau)a(|\xi|)}F[g](\xi)|^2\,d\xi\\
&=\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}e^{-2\tau a(|\xi|)}|(1-\omega(\xi))F[f](\xi)+\omega(\xi)e^{Ta(|\xi|)}z(\xi)|^2\,d\xi. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

Оценим по неравенству Коши–Буняковского выражение под интегралом справа в (12). Имеем для п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$

$$
\begin{aligned}
&e^{-2\tau a(|\xi|)}|(1-\omega(\xi))F[f](\xi)+\omega(\xi)e^{Ta(|\xi|)}z(\xi)|^2\\
&\quad= e^{-2\tau a(|\xi|)}\left|\frac{1-\omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_2}\,|\xi|^n}\sqrt{\lambda_2}\,|\xi|^n\,F[f](\xi)+\frac{\omega(\xi)}{\sqrt{\lambda_1}}\sqrt{\lambda_1}\,e^{Ta(|\xi|)}z(\xi)\right|^2\\
&\quad\leqslant e^{-2\tau a(|\xi|)}\left(\frac{|1-\omega(\xi)|^2}{\lambda_2\,|\xi|^{2n}}+\frac{|\omega(\xi)|^2e^{2Ta(|\xi|)}}{\lambda_1}\right)\left(\lambda_2\,|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2+\lambda_1|z(\xi)|^2\right). \qquad (13)
\end{aligned}
$$

Согласно (5) произведение двух первых множителей в правой части этого неравенства не превосходит единицы для п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$.

Учитывая это обстоятельство, будем иметь

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}(\lambda_2\,|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2+\lambda_1|z(\xi)|^2)\,d\xi\\
&\quad=\frac{\lambda_2}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2n}|F[f](\xi)|^2\,d\xi+\frac{\lambda_1}{(2\pi)^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|e^{-Ta(|\xi|)}F[f](\xi)-F[g](\xi)|^2\,d\xi\\
&\quad\leqslant\lambda_2+\lambda_1\delta^2.
\end{aligned}
$$

В силу выбора λ_1 и λ_2, в каждом из двух рассматриваемых случаев ($y(\xi_0)=\theta_\tau(x(\xi_0))$ и $y(\xi_0)<\theta_\tau(x(\xi_0))$) получаем

$$
\lambda_2+\lambda_1\delta^2=\frac{\theta_\tau(x(\xi_0))}{x(\xi_0)}=\delta^2\theta(\delta^{-2}).
$$

Тогда из этого равенства, предыдущей оценки, (12) и (13) следует, что

$$
\|\Lambda_a(\tau)f(\cdot)-\widehat{m}_\omega(g)(\cdot)\|^2_{L_2(\mathbb{R})}\leqslant\frac{\theta(x(\xi_0))}{x(\xi_0)}=\delta^2\theta_\tau(\delta^{-2}).
$$

Поскольку это верно для любых $f(\cdot)\in W_2^n(\mathbb{R}^d)$ и $g(\cdot)\in L_2(\mathbb{R}^d)$, для которых $\|\Lambda_a(T)f-g(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta$, то справедливо неравенство

$$
e(\tau,W_2^n(\mathbb{R}^d),\delta,\widehat{m}_\omega)\leqslant\sqrt{\frac{\theta_\tau(x(\xi_0))}{x(\xi_0)}}=\delta\sqrt{\theta_\tau(\delta^{-2})}.
$$

Отсюда и из доказанной оценки (7) заключаем, что

$$\sqrt{\frac{\theta_\tau(x(\xi_0))}{x(\xi_0)}} = \delta\sqrt{\theta_\tau(\delta^{-2})} \leqslant E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) \leqslant e(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta, \widehat{m}_\omega)$$

$$\leqslant \sqrt{\frac{\theta_\tau(x(\xi_0))}{x(\xi_0)}} = \delta\sqrt{\theta_\tau(\delta^{-2})}.$$

Этим доказаны равенство (4) и оптимальность методов (6).

Примеры

Рассмотрим теперь в качестве примера задачу об оптимальном восстановлении решения уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^d$. Распространение тепла на $\mathbb{R}^d$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

(Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^d$ и $(t,x) \mapsto u(t,x)$ — функция на $[0,+\infty) \times \mathbb{R}^d$) с начальныи распределением температуры $u(0,\cdot) = f(\cdot)$.

Мы предполагаем, что $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Единственное решение данное задачи дается для всех $t > 0$ интегралом Пуассона

$$u(t,x) = u(t,x;f(\cdot)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y)\,dy$$

и при этом $u(t,\cdot;f(\cdot)) \to f(\cdot)$ при $t \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

Итак, мы имеем семейство операторов $\Lambda(t)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda(t)f(\cdot) = u(t,\cdot)$ и, как хорошо известно, преобразование Фурье решения уравнения теплопроводности имеет вид

$$F[\Lambda(t)f(\cdot)](\xi) = F[u(t,x;f(\cdot))](\xi) = e^{-t|\xi|^2}F[f](\xi) \text{ для п.в. } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Таким, образом, если поставить задачу об оптимальном восстановлении температуры в $\mathbb{R}^d$ в момент времени $\tau > 0$ по преобразованию Фурье распределения температуры с начальной функцией $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$, известному точно или приближенно в момент времени $T > \tau$, то ее решение дается доказанной теоремой при $a(|\xi|) = |\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

В качестве второго примера рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u(\cdot,0) = f(\cdot), \end{cases}$$

где Δ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^{d+1}$ и $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, заключающуюся в нахождении гармонической функции $u(\cdot,\cdot)$ в верхнем полупространстве $\{\,(x,y) \in \mathbb{R}^{d+1} : y > 0\,\}$ такой, что $u(\cdot,y) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ для любого $y > 0$, $\sup_{y>0} \|u(\cdot,y)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} < \infty$ и $u(\cdot,y) \to f(\cdot)$ при $y \to 0$ в метрике $L_2(\mathbb{R}^d)$.

В этом случае решение задачи Дирихле единственно и выражается интегралом Пуассона (см. [12])

$$u(x,y) = u(x,y;f) = \frac{\Gamma((d+1)/2)}{\pi^{(d+1)/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{yf(t)}{(|x-t|^2 + y^2)^{(d+1)/2}}\,dt.$$

Как и в предыдущем примере, мы имеем семейство операторов $\Lambda(y)\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, $\Lambda(y)f(\cdot) = u(\cdot, y)$, которые в образах Фурье имеют вид

$$F[\Lambda(y)f](\xi) = F[u(x, y; f)](\xi) = e^{-y|\xi|}F[f](\xi).$$

Пусть граничная функция $f(\cdot) \in W_2^n(\mathbb{R}^d)$. Если поставить задачу об оптимальном восстановлении значений гармонической функции на гиперплоскости $y = b > 0$ по преобразованию Фурье этой функции, известному точно или приближенно на гиперплоскости $y = B > b$, то ее решение дается доказанной здесь теоремой, когда $a(|\xi|) = |\xi|$, $\xi \in \mathbb{R}^d$.

Нетрудно показать, что в рассмотренных примерах $\theta_\tau(\cdot) = h(\cdot)$ и $h(\cdot)$ — дифференцируемая функция. Тогда, как отмечено выше, коэффициенты λ_1, λ_2 могут быть найдены явно.

В случае уравнения теплопроводности

$$\lambda_1 = \frac{n + 2\tau|\xi_0|^2}{n + 2T|\xi_0|^2}e^{2(T-\tau)|\xi_0|^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{2(T-\tau)}{|\xi_0|^{2n-2}(n + 2T|\xi_0|^2)}e^{-2\tau|\xi_0|^2}$$

и погрешность оптимального восстановления

$$E(\tau, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) = \delta e^{(T-\tau)|\xi_0|^2},$$

где ξ_0 — решение уравнения

$$|\xi_0|^n e^{T|\xi_0|^2} = \frac{1}{\delta}\,,$$

а в случае задачи Дирихле

$$\lambda_1 = \frac{n + b|\xi_0|}{n + B|\xi_0|}e^{2(B-b)|\xi_0|}, \qquad \lambda_2 = \frac{B - b}{|\xi_0|^{2n-1}(n + B|\xi_0|)}e^{-2b|\xi_0|}$$

и

$$E(b, W_2^n(\mathbb{R}^d), \delta) = \delta e^{(B-b)|\xi_0|},$$

где ξ_0 — решение уравнения

$$|\xi_0|^n e^{B|\xi_0|} = \frac{1}{\delta}\,.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации”, *Труды МИАН, Теория функций и дифференциальные уравнения, Сборник статей. К 105-летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского*, **269** (2010), 181—192.

[2] С. А. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них. Канд. дисс.*, МГУ, М., 1965.

[3] G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, V. M. Tikhomirov, “On optimal recovery of heat equation solutions”, *Approximation Theory: A volume dedicated to B. Bojanov (D. K. Dimitrov, G. Nikolov, and R. Uluchev, Eds.)*, Marin Drinov Academic Publishing House, Sofia, 2004, 163–175.

[4] Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37–54.

[5] G. G. Magaril-Il’yaev, E. O. Sivkova, “Optimal recovery of the semi-group operators from inaccurate data”, *Eurasian Mathematical Journal*, **10**:4 (2019), 75–84.

[6] Е. В. Абрамова, Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова, “Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по неточным измерениям”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физ.*, **60**:10 (2020), 1711–1720.

[7] Е. О. Сивкова, “Оптимальное восстановление семейства операторов по неточным измерениям на компакте”, *Владикавк. матем. журн.*, **25**:2 (2023), 124–135.

[8] Г. Г. Магарил-Ильяев, Е. О. Сивкова, “О наилучшем восстановлении семейства операторов на многообразии $\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^m$”, *Труды МИАН*, **323** (2023), 196–203.

[9] Е. В. Абрамова, Е. О. Сивкова, “О наилучшем восстановлении семейства операторов на классе функций по неточно заданному их спектру”, *Владикавк. матем. журн.*, **26**:1 (2024), 13–26.

[10] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 2005.

[11] Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, УРСС, изд 5-ое, доп., М., 2020.

[12] И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974.

Е. О. Сивкова
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
Национальный исследовательский университет «МЭИ»
E-mail: e.o.sivkova@mail.ru