Московский Государственный Университет
им. М. В. Ломоносова
Механико-Математический факультет

Кафедра Общих Проблем Управления

Курсовая работа
студента 507 группы
Семочкина И. М.

Оптимальное восстановление с нормально распределенными погрешностями

Научный руководитель:
профессор Осипенко К. Ю.

Москва, 2025г

Введение.

В работе рассматривается проблема восстановления значений оператора по информации, заданной с нормально распределенной погрешностью. Ведется поиск оптимального линейного метода восстановления, предлагается пример нелинейного метода и ищется его погрешность. В конце работы проводится сравнение погрешностей оптимального линейного и предложенного нелинейного методов.

Постановка задачи поиска оптимального метода восстановления

Пусть дано некоторое линейное пространство $\mathcal{W}$ и $W \in \mathcal{W}$ — класс в этом пространстве. Рассмотрим заданный оператор $T : \mathcal{W} \to U$, где U — линейное нормированное пространство. Будем решать задачу о восстановлении значений оператора T на элементах W по неточной информации об этих элементах. Имеются информационные операторы $I^0 : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^N$,
$I : \mathcal{W} \to \mathbb{R}^N$, где $N \in \mathbb{N}$. Значение информационного оператора I^0 является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Предполагается, что $I^0 f = If + X$, где $\mathbb{M}(I^0 f) = If$; а X — случайный вектор погрешности, X$\sim \mathcal{N}(0, \sigma^2\Sigma)$.
Σ — ковариационная матрица вектора X.

Задача состоит в оптимальном восстановлении значений оператора T на классе W по значениям оператора I^0.
Пусть задан метод восстановления — отображение $\varphi : \mathbb{R}^N \to U$.
Погрешность метода восстановления — это величина

$$e(T, W, I, \varphi) = \left(\sup_{f \in W,\, X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2\Sigma)} \mathbb{M}(\|Tf - \varphi(If + X)\|_U) \right)^{1/2}.$$

Требуется найти погрешность оптимального метода восстановления

$$E(T, W, I) = \inf_{\varphi : \mathbb{R}^N \to U} e(T, W, I, \varphi). \quad (1)$$

Исследование 1-мерного случая

В 1-мерном случае $\mathcal{W} = \mathbb{R}, W = \{x \in \mathbb{R} : |x| \le \nu\}$. $X = \xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. $Tx = \mu x$, $Ix = x$.
Оценим линейные методы $\varphi(y) = \alpha y, \alpha \in \mathbb{R}$ — то есть величину
$E_{lin}(T, W, I) = \inf\limits_{\varphi(y) = \alpha y, \alpha \in \mathbb{R}} e(T, W, I, \varphi)$.
Теорема 1. ([1]). Погрешность оптимального линейного метода: $E_{lin}(T, W, I) = \frac{\mu\nu\sigma}{\sqrt{\nu^2+\sigma^2}}$.
Доказательство. Выражение для погрешности имеет вид:

$$e^2(T, W, I, \varphi) = \sup_{x \in W,\, \xi \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)} \mathbb{M}(|Tx - \varphi(y(x))|^2) = \sup_{x \in W,\, \xi \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)} \mathbb{M}(|\mu x - \alpha(x + \xi)|^2) =$$

$$= \sup_{x \in W, \xi \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)} ((\mu - \alpha)^2 x^2 + \alpha^2 \mathbb{M}(\xi^2) - 2x(\mu - \alpha)\alpha\mathbb{M}(\xi)) = (\mu - \alpha)^2\nu^2 + \alpha^2\sigma^2.$$

Минимизируем погрешность по α. Получаем, что $\alpha = \mu\nu^2/(\nu^2+\sigma^2)$. Подставляя, находим погрешность оптимального линейного метода восстановления:

$$E^2_{lin}(T,W,I) = \Big(\mu - \frac{\mu\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}\Big)^2\nu^2 + \Big(\frac{\mu\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}\Big)^2\sigma^2 = \frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2} => E_{lin}(T,W,I) = \frac{\mu\nu\sigma}{\sqrt{\nu^2+\sigma^2}}. \quad (2)$$

Теорема 1 доказана.

Теперь рассмотрим нелинейный метод $\varphi_0(y) = \begin{cases} \alpha y, |y| \le \beta \\ \mu\nu \operatorname{sgn} y, |y| \ge \beta \end{cases}$; $\beta := \nu + \sigma^2/\nu > 0.$ (3)

Для $|y| \ge \beta$ значение метода φ_0 не попадает на отрезок $[-\mu\nu, \mu\nu]$, поэтому метод $\varphi_0(y)$ будет давать лучшую погрешность восстановления. Найдем ее.

Оценка погрешности нелинейного метода

Теорема 2. Погрешность нелинейного метода φ_0, заданного по формуле (3), имеет вид:

$$e^2(T,W,I,\varphi_0) \le \frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}\left[1 - \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} + \frac{3}{2}\nu\right)\left(1 + 2\nu + \frac{\sigma^2}{\nu}\right)^{-2} \exp\left\{-\left(1+2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)^2/(2\sigma^2)\right\}\right].$$

Доказательство.

$$e^2(T,W,I,\varphi_0) = \sup_{x\in W,\, \xi\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)} \mathbb{M}(|Tx - \varphi_0(y(x))|^2) = \sup_{x\in W,\, \xi\sim\mathcal{N}(0,\sigma^2)} [\mathbb{M}(|Tx - \varphi(y(x))|^2) - f(x)].$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{|x+\xi|\ge\beta} (|\mu x - \varphi(x+\xi)|^2 - |\mu x - \varphi_0(x+\xi)|^2) e^{\frac{-\xi^2}{2\sigma^2}}\, d\xi.$$

Заметим, что $f(x) > 0 \ \forall x \in W$. Сделаем замену $y = x + \xi$:

$$f(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{|y|\ge\beta} \left(\left|x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}y\right|^2 - |x - \nu \operatorname{sgn} y|^2\right) e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где

$$f_1(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{y\ge\beta} \left(\left|x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}y\right|^2 - |x - \nu|^2\right) e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2}}\, dy,$$

$$f_2(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{y\le-\beta} \left(\left|x - \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}y\right|^2 - |x + \nu|^2\right) e^{\frac{-(y-x)^2}{2\sigma^2}}\, dy.$$

Сделаем замену $y = \beta + z$:

$$f_1(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_0^{+\infty} \left(\left| x - \nu - \frac{\nu^2}{\nu^2 + \sigma^2} z \right|^2 - |x - \nu|^2 \right) e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} z^2 + 2(\nu - x) \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} z \right) e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} z^2 + 2(\nu - x) z \right) e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} \int\limits_0^{+\infty} z^2 e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} 2(\nu - x) \int\limits_0^{+\infty} z e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz.$$

Во втором интеграле — замену $y = -\beta + z$:

$$f_2(x) = \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\left| x + \nu - \frac{\nu^2}{\nu^2 + \sigma^2} z \right|^2 - |x + \nu|^2 \right) e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} z^2 - 2(x + \nu) \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} z \right) e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} \int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} z^2 - 2(x + \nu) z \right) e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz =$$

$$= \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} \int\limits_{-\infty}^{0} z^2 e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz - \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} 2(\nu + x) \int\limits_{-\infty}^{0} z e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \, dz.$$

Отдельно оценим снизу экспоненту. Имеем $\nu > 0, \beta = \nu + \sigma^2/\nu > 0, -\nu \leq x \leq \nu$.
Поэтому $-\nu - \beta \leq x - \beta, -\nu - \beta \leq x + \beta$. А также $e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \leq e^{\frac{-(x+\beta)^2}{2\sigma^2}}, e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \leq e^{\frac{-(x-\beta)^2}{2\sigma^2}}$.
Тогда получаем:

$$e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} = e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{z(x-\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\beta)^2}{2\sigma^2}} \geq e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{-z(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}}, z \geq 0;$$

$$e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} = e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{z(x+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(x+\beta)^2}{2\sigma^2}} \geq e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{z(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}}, z \leq 0.$$

Заметим, что $-\frac{1}{\sigma^2} - \frac{z^2}{2\sigma^2} < -\frac{z \operatorname{sgn} z}{\sigma^2}$. Поэтому $e^{-\frac{1}{\sigma^2} - \frac{z^2}{2\sigma^2}} < e^{-\frac{z \operatorname{sgn} z}{\sigma^2}}$. Тогда оценка для экспоненты примет вид:

$$e^{\frac{-(z+\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \geq e^{\frac{-z^2(1+\nu+\beta)}{2\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}}, z \geq 0;$$

$$e^{\frac{-(z-\beta-x)^2}{2\sigma^2}} \geq e^{\frac{-z^2(1+\nu+\beta)}{2\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}}, z \leq 0.$$

$$f_1(x) \geq \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \int\limits_0^{+\infty} z^2 e^{\frac{-z^2(1+\nu+\beta)}{2\sigma^2}}\, dz +$$

$$+ \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{2(\nu-x)\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \int\limits_0^{+\infty} z e^{\frac{-z^2(1+\nu+\beta)}{2\sigma^2}}\, dz,$$

$$f_2(x) \geq \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{0} z^2 e^{\frac{-z^2(1+\nu+\beta)}{2\sigma^2}}\, dz -$$

$$- \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{2(\nu+x)\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{0} z e^{\frac{-z^2(1+\nu+\beta)}{2\sigma^2}}\, dz.$$

Примем обозначение $A = 1+\nu+\beta$. С учетом найденных оценок для $f_1(x), f_2(x)$, получаем:

$$f(x) \geq \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}A}\, dz -$$

$$-2x \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}A}\, dz +$$

$$+2\nu \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \left[\int\limits_0^{+\infty} z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}A}\, dz - \int\limits_{-\infty}^{0} z e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}A}\, dz \right]. \quad (4)$$

Оценка интегралов

Найдем следующий неопределенный интеграл для $A > 0$:
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}A}\, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \Big[-\frac{\sigma^2 z e^{-\frac{Az^2}{2\sigma^2}}}{A} + \int \frac{\sigma^2 e^{-\frac{Az^2}{2\sigma^2}}}{A}\, dz \Big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \Big[-\frac{\sigma^2 z e^{-\frac{Az^2}{2\sigma^2}}}{A} + \frac{\sqrt{\pi}\sigma^3}{\sqrt{2}A^{3/2}} \int \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-u^2}\, du \Big] =$
$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \Big[-\frac{\sigma^2 z e^{-\frac{Az^2}{2\sigma^2}}}{A} + \frac{\sqrt{\pi}\sigma^3}{\sqrt{2}A^{3/2}} \operatorname{erf}\Big(\frac{\sqrt{A}z}{\sqrt{2}\sigma_1}\Big) \Big] = \frac{\sigma^2}{2A^{3/2}} \operatorname{erf}\Big(\frac{\sqrt{A}z}{\sqrt{2}\sigma}\Big) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{z\sigma}{A} e^{-\frac{Az^2}{2\sigma^2}} + C.$
Здесь $\operatorname{erf}(w) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^w e^{-t^2}\, dt$ - функция ошибок Гаусса. $\operatorname{erf}(+\infty) = 1, \operatorname{erf}(-\infty) = -1$. Поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}A}\, dz = \frac{\sigma^2}{A^{3/2}}. \quad (I)$$

Найдем неопределенный интеграл для $A > 0$:
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}A}\, dz = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}A} \int e^v\, dv = -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}A} e^{-\frac{Az^2}{2\sigma^2}} + C.$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}A}\, dz = 0, \quad (II)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{0}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}A}\, dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int\limits_{-\infty}^{0} z e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}A}\, dz = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}A} + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}A} = \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}A}. \, (III)$$

Завершение поиска оценки погрешности нелинейного метода

Итак, получим окончательный вариант оценки погрешности метода (3). Для этого подставим найденные значения интегралов $(I), (II), (III)$ в выражение (4):

$$f(x) \geq \mu^2 \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{A^{3/2}} + 2\nu\mu^2 \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{\frac{-(\nu+\beta)}{\sigma^2}} e^{\frac{-(\nu+\beta)^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}A} >$$

$$> \mu^2 \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{\frac{1}{\sigma^2}} e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{A^2} + \nu\mu^2 \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{\frac{1}{\sigma^2}} e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma}{A} >$$

$$> \mu^2 \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}} \frac{\sigma^2}{A^2} + \nu\mu^2 \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sigma}{A}.$$

Сравним дроби $\frac{\sigma^2}{A^2}$ и $\frac{\sigma}{A}$. Это равносильно сравнению $\frac{\sigma}{A}$ и 1, а это равносильно сравнению $1+\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}$ и σ. Поделим на σ и получим сравнение $\frac{1}{\sigma} + \frac{\nu}{\sigma} + \frac{\sigma}{\nu}$ с 1. Правая часть всегда меньше, поскольку $\frac{\nu}{\sigma} + \frac{\sigma}{\nu} \geq 2$. Поэтому $A \geq \sigma => \frac{\sigma^2}{A^2} \leq \frac{\sigma}{A}$. Тогда

$$f(x) \geq \frac{\sigma^2}{A^2} e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}} \left[\mu^2 \frac{\nu^4}{(\nu^2+\sigma^2)^2} + \frac{3}{2}\nu\mu^2 \frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} \right] =: \frac{\sigma^2}{A^2} e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}} B, B > 0.$$

Таким образом, для функции $f(x)$ выполнено:

$$f(x) \geq \frac{\sigma^2}{A^2} B e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}}, A = 1 + 2\nu + \sigma^2/\nu, B = \frac{\mu^2\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} \Big(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2} + \frac{3}{2}\nu \Big).$$

Тогда оценка погрешности метода φ_0 (5) такова:

$$e^2(T, W, I, \varphi_0) = E^2_{lin}(T, W, I) - f(x) \leq \frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2} - \frac{\sigma^2}{A^2} B e^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}}. \quad (5)$$

Теорема 2 полностью доказана.

Оценка отношения погрешностей для методов, рассматриваемых в работе

Напомним, что имелось распределение $\mathcal{N}(x,\sigma^2)$. $W=\{x\in\mathbb{R}:|x|\leq\nu\}$.
$Ix=x$ — информационный оператор, $Tx=\mu x$ — восстанавливаемый оператор на классе W. Была получена формула (2) для погрешности наилучшего линейного метода восстановления: $E^2_{lin}(T,W,I)=\frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}$. После этого был взят метод φ_0 (3) и была найдена оценка для его погрешности — формула (5):

$$e^2(T,W,I,\varphi_0)\leq\frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}-\frac{\sigma^2}{A^2}Be^{\frac{-A^2}{2\sigma^2}},$$

$$e^2(T,W,I,\varphi_0)\leq\frac{\mu^2\nu^2\sigma^2}{\nu^2+\sigma^2}\left[1-\left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}+\frac{3}{2}\nu\right)\left(1+2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)^{-2}\exp\left\{-\left(1+2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)^2/(2\sigma^2)\right\}\right].$$

Рассмотрим $\chi=\frac{E_{lin}(T,W,I)}{e(T,W,I,\varphi_0)}=\chi(\nu,\sigma^2)$.
Пусть $\nu=1$. Оценим сверху величину $\chi^*=\sup\limits_{\sigma>0}\chi(1,\sigma^2)$.
Теорема 3. При $\nu=1$ выполнено: $e(T,W,I,\varphi_0)\leq E_{lin}(T,W,I)<1,00035\cdot e(T,W,I,\varphi_0)$.
Доказательство. Оценка снизу очевидна. Докажем оценку сверху

$$\chi(\nu,\sigma^2)=\left[1-\left(\frac{\nu^2}{\nu^2+\sigma^2}+\frac{3}{2}\nu\right)*\left(1+2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)^{-2}*\exp\left\{-\left(1+2\nu+\frac{\sigma^2}{\nu}\right)^2/(2\sigma^2)\right\}\right]^{-1/2}. \quad (6)$$

$$\chi(1,\sigma^2)=\left[1-\left(\frac{1}{1+\sigma^2}+\frac{3}{2}\right)*\left(3+\sigma^2\right)^{-2}*\exp\left\{-\left(3+\sigma^2\right)^2/(2\sigma^2)\right\}\right]^{-1/2}.$$

Требуется оценить это выражение сверху. Имеем $\chi(1,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{1-h(\sigma^2)}}$. Искомая оценка получается при оценке сверху $h(\sigma^2)=\left(\frac{1}{1+\sigma^2}+\frac{3}{2}\right)\frac{1}{(3+\sigma^2)^2}e^{-(3+\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$. Оценим:
$h(\sigma^2)\leq\frac{5}{2}*\frac{1}{9}e^{-(3+\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$. Максимум экспоненты считаем с помощью производной:
$\left(e^{-(3+\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}\right)'=e^{-(3+\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}*\left(\frac{9}{2\sigma^4}-\frac{1}{2}\right)$, откуда критическая точка $\sigma^2=3$, она является точкой максимума. Значит, $h(\sigma^2)\leq\frac{5}{18}e^{-6}$. То есть, $\chi(1,\sigma^2)\leq\left[1-\frac{5}{18}e^{-6}\right]^{-1/2}<1,00035$.
Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] L. Plaskota "Noisy Information and Computational Complexity" — Cambrige University Press, 1996.