Московский Государственный Университет
им. М.В. Ломоносова
Механико-Математический Факультет

Кафедра общих проблем управления

Курсовая работа
студента 332 группы
Сугробова П.Е.

Оптимальное восстановление первой производной функции в классе Харди

Научный руководитель:
профессор Осипенко К.Ю.

Москва - 2015

1. Постановка задачи

Обозначим через $\mathbb{T}$ единичную окружность, реализованную как отрезок $[-\pi, \pi]$ с идентифицированными концами. Через $\mathcal{H}_2(D)$ обозначим пространство аналитических функций в $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $x(\cdot)$, удовлетворяющих условию:

$$\|x(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} = \sup_{0<p<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |x(pe^{it})|^2 dt \right)^{1/2} < \infty.$$

Через $H_2^r(D)$ обозначим множество функций x$(\cdot)$, аналитических в D, для которых $\|x^{(r)}(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} \le 1$.

Рассмотрим задачу оптимального восстановления первой производной на классе $H_2^2(D)$ по информации о коэффициентах степенного ряда самой функции, заданных с погрешностью δ в норме пространства l_2. Иными словами, мы считаем, что для каждой функции $x(\cdot) \in H_2^2(D)$ такой, что

$$x(z) = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} a_j z^j,$$

известны числа $\{y_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ такие, что

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}_+} |a_j - y_j|^2 \le \delta^2.$$

Погрешностью данного метода называется величина

$$e(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta, m) = \sup_{\substack{x(\cdot) \in H_2^2,\ y \in l_2 \\ \|\Lambda x(\cdot) - y\|_{l_2} \le \delta}} \|x'(\cdot) - m(y)(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)},$$

где $\Lambda x(\cdot) = \{a_j\}_{j \in \mathbb{Z}_+}$ — коэффициенты степенного ряда $x(\cdot)$. Задача заключается в нахождении величины

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta) = \inf_{m\colon l_2 \to \mathcal{H}_2(D)} e(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta, m)$$

и соответствующего оптимального метода, т.е. метода, на котором эта нижняя грань достигается.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1.

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta) \ge \sup_{\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \le \delta} \|x'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}. \tag{1}$$

Доказательство. Для любого метода m при всех $x(\cdot) \in H_2^2$ таких, что $\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \le \delta$, имеем

$$2||x'(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)} \le ||x'(\cdot) + m(0)||_{\mathcal{H}_2(D)} + ||x'(\cdot) - m(0)||_{\mathcal{H}_2(D)} \le 2e(x'(\cdot), m)$$

Следовательно, для любого метода m

$$e(x'(\cdot), m) \geq \sup_{\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2} \leq \delta} ||x'(\cdot)||_{\mathcal{H}_2(D)},$$

откуда сразу вытекает требуемая оценка.

$\square$

Так как x(·) - аналитическая в D, имеем

$$x(\cdot) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j, \quad x'(\cdot) = \sum_{j=1}^{\infty} j a_j z^{j-1}, \quad x''(\cdot) = \sum_{j=2}^{\infty} j(j-1) a_j z^{j-2}.$$

Из определения нормы в $\mathcal{H}_2(D)$ вытекает, что

$$\|x(\cdot)\|^2_{\mathcal{H}_2(D)} = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2.$$

Тогда экстремальная задача в правой части неравенства (1) сводится к следующей

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2 |a_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \leq \delta, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 (j-1)^2 |a_j|^2 \leq 1.$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть $\delta > 0$ таково, что $\dfrac{1}{(s+1)s} \leq \delta \leq \dfrac{1}{s(s-1)}$, где $s \in \mathbb{N}$ и удовлетворяет данным неравенствам (если $\delta \geq \dfrac{1}{2}$, то s положим равным 1), а*

$$\lambda_1 = \frac{4s^3 - (2s+1)(s-1)^2}{4s}, \quad \lambda_2 = \frac{2s+1}{4s^3}.$$

Тогда

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), F) = \sqrt{\lambda_1 + \delta^2 \lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j \alpha_j y_j z^j$$

для всех α_j таких что

$$\left| \alpha_j - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + j^2 (j-1)^2 \lambda_1} \right|^2 \leq \frac{\lambda_2 + j^2 (j-1)^2 \lambda_1 - j^2}{(j-1)^2 \lambda_1 \lambda_2}.$$

является оптимальным.

4. Доказательство

Из Леммы 1 вытекает, что для оценки снизу погрешности оптимального восстановления нам необходимо решить экстремальную задачу

$$\sup_{\|\Lambda x(\cdot)\|_{l_2}\le\delta} \|x'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)}$$

или

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j|^2 \to \max, \quad \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|^2 \le \delta, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \le 1.$$

Для этого воспользуемся следующим результатом.

Пусть X — некоторое множество и на нем заданы функции $f_j\colon X \to \mathbb{R}$, $j = 0, 1, \dots, n$. Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \to \max, \quad f_j(x) \le 0, \quad x \in X. \tag{2}$$

Лемма 2. *Пусть $\widehat{x} \in X$ и $\overline{\lambda}$, $\lambda_j \ge 0$, $j = 1, \dots, n$, таковы что*

1)
$$\min_{x\in X} \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda}),$$

2)
$$\overline{\lambda}_j f_j(\widehat{x}) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

где

$$\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) = -f_0(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x)$$

— называется функцией Лагранжа задачи (2). *Тогда $\widehat{x}$ — решение* (2).

Доказательство.

$$-f_0(x) = \mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x)$$

Тогда

$$\sup_{x\in X} f_0(x) = \inf_{x\in X} (\mathcal{L}(x, \overline{\lambda}) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j(x)) = \mathcal{L}(\widehat{x}, \overline{\lambda}) = f_0(\widehat{x}).$$

Следовательно $\widehat{x}$ — решение (2).

□

В нашей задаче имеем

$$\mathcal{L} = \textstyle\sum_{j=0}^{\infty}(-j^2|a_j|^2 + \lambda_1|a_j|^2 + \lambda_2 j^2(j-1)^2|a_j|^2) =$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-j^2 + \lambda_1 + \lambda_2 j^2(j-1)^2)|a_j|^2.$$

Тогда по лемме 2, если λ_1, λ_2 и $\widehat{a_j}$ такие, что

$$1)\min_{a_j}\mathcal{L}(\{a_j\},\lambda_1,\lambda_2)=\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\},\lambda_1,\lambda_2),$$

$$2)\lambda_1(\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|^2-\delta^2)=0,$$

$$3)\lambda_2(\sum_{j=0}^{\infty}j^2(j-1)^2|a_j|^2-1)=0,$$

то $\widehat{a_j}$ является решением экстремальной задачи.

Начнем с поиска $\widehat{a}_j$. Пусть ненулевыми являются только $\widehat{a}_s, \widehat{a}_{s+1}$. Тогда из условий 2 и 3 имеем

$$\begin{cases} |\widehat{a}_s|^2+|\widehat{a}_{s+1}|^2=\delta^2. \\ s^2(s-1)^2|\widehat{a}_s|^2+(s+1)^2s^2|\widehat{a}_{s+1}|^2=1. \end{cases}$$

Тогда $|a_s|^2=\dfrac{\delta^2(s+1)^2s^2-1}{4s^3}$, $\quad |a_{s+1}|^2=\dfrac{1-\delta^2s^2(s-1)^2}{4s^3}$. Чтобы данные равенства имели место, необходимо, чтобы

$$\begin{cases} 1-s^2(s-1)^2\delta^2\geq 0. \\ \delta^2(s+1)^2s^2-1\geq 0. \end{cases}$$

Откуда следует, что $\dfrac{1}{(s+1)^2s^2}\leq\delta^2\leq\dfrac{1}{s^2(s-1)^2}$.

Получили что для заданного δ нам нужно подобрать такое s, чтобы δ попало в заданный выше интервал (заметим, что если $\delta\geq\dfrac{1}{2}$, то s можно принять равным 1).

Осталось найти такие λ_1,λ_2, удовлетворяющие 1-ому пункту леммы 2. Для этого нарисуем график

$$\begin{cases} x=j^2(j-1)^2. \\ y=j^2. \end{cases}$$

Покажем что этот график вогнут при $x\geq 1$. Для этого найдем вторую производную $x=y(\sqrt{y}-1)^2$:

$$x'=(\sqrt{y}-1)^2+2(\sqrt{y}-1)\frac{1}{2\sqrt{y}}y=2y-3\sqrt{y}+1$$

$$x''=2-\frac{3}{2\sqrt{y}}$$

Тогда точка перегиба $(x,y)=(9/256,9/16)$.

Проведем прямую через точки, отвечающие параметрам s и s+1, получили прямую $\lambda_2x+\lambda_1=y$.

Очевидно, что при таких λ_1 и λ_2 функция Лагранжа $\mathcal{L}(\{\widehat{a_j}\},\lambda_1,\lambda_2)$ равна нулю, а $\mathcal{L}(\{a_j\},\lambda_1,\lambda_2)\geq 0$, так как график является вогнутым для $s\geq 1$. Действительно, точка перегиба достигается при значении параметра $s = \dfrac{3}{4}$, а при $s \geq \dfrac{3}{4}$ имеем $x'' \geq 0$ Значит 1-ый пункт леммы 2 выполнен.

Путем несложных вычислений получим, что

$$\lambda_1 = \frac{4s^3 - (2s+1)(s-1)^2}{4s}, \quad \lambda_2 = \frac{2s+1}{4s^3}.$$

Осталось подставить a_s и a_{s+1} в $\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j|^2$, решив тем самым нашу экстремальную задачу окончательно. Подставив и проведя элементарные преобразования получим, что

$$s^2|a_s|^2 + (s+1)^2|a_{s+1}|^2 = \frac{\delta^2(4s^3 - (s-1)^2(2s+1))}{4s} + \frac{2s+1}{4s^3} = \lambda_1\delta^2 + \lambda_2.$$

Или окончательно

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), \delta) \geq \sup_{\substack{x(\cdot)\in H_2^2(D) \\ |x(\cdot)|\leq\delta}} \|x'(\cdot)\|_{\mathcal{H}_2(D)} = \sqrt{\lambda_1\delta^2 + \lambda_2}.$$

Займемся теперь построением оптимального метода. Будем искать его в виде

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j y_j z^j,$$

где α_j некоторые числа (сглаживающие множители). Тогда, чтобы найти погрешность данного метода, необходимо решить экстремальную задачу

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j - \alpha_j y_j|^2 \to \max, \ \sum_{j=0}^{\infty}(j-1)^2 j^2|a_j|^2 \leq 1, \ \sum_{j=0}^{\infty}|a_j - y_j|^2 \leq \delta^2.$$

Положив $z_j = a_j - y_j$, эту задачу можно переписать в виду

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j(1-\alpha_j)+\alpha_j z_j|^2 \to \max, \ \sum_{j=0}^{\infty} j^2(j-1)^2|a_j|^2 \leq 1, \ \sum_{j=0}^{\infty}|z_j|^2 \leq \delta^2.$$

Из неравенства Коши-Буняковского имеем

$$|(1-\alpha_j)a_j + \alpha_j z_j|^2 \leq \left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_1} + \frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_2}\right)(\lambda_1(j-1)^2|a_j|^2 + j^{-2}\lambda_2|z_j|^2).$$

Покажем, что существуют такие α_j, что $\forall j$ выполняется

$$\left(\frac{|1-\alpha_j|^2}{(j-1)^2\lambda_1} + \frac{j^2|\alpha_j|^2}{\lambda_2}\right) \leq 1.$$

Для этого извлечем в этом неравенстве полный квадрат. Пусть

$$A = \frac{1}{(j-1)^2\lambda_1}, B = \frac{j^2}{\lambda_2}.$$

Тогда неравенство выглядит как

$$A|1-\alpha_j|^2 + B|\alpha_j|^2 \leq 1.$$

Выделяя в нем полный квадрат можно прийти к виду

$$\left|\alpha_j - \frac{A}{A+B}\right|^2 \leq \frac{A+B-AB}{(A+B)^2}.$$

Или после подстановки

$$\left|\alpha_j - \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + j^2(j-1)^2\lambda_1}\right|^2 \leq \frac{\lambda_2 + j^2(j-1)^2\lambda_1 - j^2}{(j-1)^2\lambda_1\lambda_2}.$$

Тогда для существования необходимых α_j достаточно будет доказать, что

$$\frac{\lambda_2 + j^2(j-1)^2\lambda_1 - j^2}{(j-1)^2\lambda_1\lambda_2} \geq 0 \ \forall j.$$

Но знаменатель ≥ 0, а числитель ≥ 0 потому что график
$\begin{cases} x = j^2(j-1)^2. \\ y = j^2. \end{cases}$
Вогнут, а все его точки лежат ниже прямой $\lambda_2 x + \lambda_1 = y$

Возвращаясь к неравенству Коши-Буняковского имеем

$$|(1-\alpha_j)a_j + \alpha_j z_j|^2 \leq (\lambda_1(j-1)^2|a_j|^2 + j^{-2}\lambda_2|z_j|^2).$$

Вспоминая нашу экстремальную задачу, получаем

$$\sum_{j=0}^{\infty} j^2|a_j(1-\alpha_j) + \alpha_j z_j|^2 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_1 j^2(j-1)^2|a_j|^2 + \lambda_2|z_j|^2 \leq \lambda_1 + \delta^2\lambda_2.$$

Или

$$e(x'(\cdot), H_2^2(D), F, m) \leq \sqrt{\lambda_1 + \delta^2\lambda_2}.$$

Учитывая оценку сверху получаем, что

$$E(x'(\cdot), H_2^2(D), F) = \sqrt{\lambda_1 + \delta^2\lambda_2},$$

а метод

$$\widehat{m}(y)(t) = \sum_{j=0}^{\infty} j\alpha_j y_j z^j$$

является оптимальным.

Список литературы

[1] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Тихомиров В. М. Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления, Пробл. передачи информ, — 2003, 39, 118-133.

[2] Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с ошибкой, Мат. сб., — 2002, 193, 79-100.