О ВОССТАНОВЛЕНИИ СИГНАЛОВ ПО СПЕКТРУ

Г. Г. МАГАРИЛ-ИЛЬЯЕВ, К. Ю. ОСИПЕНКО

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Восстановление сигнала по его спектру (т. е. по его преобразованию Фурье или, как говорят, по его частотам), который задан неполно и/или неточно, — одна из основных проблем во многих прикладных задачах. Существуют различные способы восстановления, но наиболее распространенный из них — это регуляризация по А. Н. Тихонову. Она заключается в предъявлении некоторого алгоритма восстановления и доказательству его сходимости к исходному сигналу (скажем, в данной точке) при стремлении к нулю погрешности измерения. При этом остаются без внимания, по крайней мере, следующие вопросы: возможен ли лучший способ восстановления? Можно ли доказать эффективность предъявленного алгоритма, не устремляя погрешность к нулю, ведь она обусловлена неточностями измерения и не может быть сделана сколь угодно малой?

В данной работе мы хотим продемонстрировать, на ряде совсем простых примеров, подход к задаче восстановления сигнала по спектру, основанный на идеях А. Н. Колмогорова. Этот подход представляет определенную альтернативу регуляризационному подходу в том смысле, что он позволяет строить наилучшие среди всех возможных методы восстановления сигнала, и с учетом той погрешности, которая есть на самом деле. При этом важно отметить, что оптимальные методы выписываются явно и используют далеко не всю имеющуюся информацию о спектре (даже если она измерена точно), и если эта информация известна с погрешностью, то указывается порог (зависящий от погрешности измерения), за пределами которого информация о спектре вообще не нужна — оптимальный метод ее не использует. Полезная же информация, т. е. та, которая используется, подвергается определенному “сглаживанию”. Следует сказать, что это вполне соответствует тому, что происходит на практике — высокие частоты отбрасываются, а низкие сглаживаются.

Краткий комментарий по поводу сформулированных здесь утверждений приведен в конце работы.

Мы начинаем с примера из учебника В. А. Ильина и Э. Г. Позняка [1], демонстрирующего возможности регуляризации по Тихонову.

Пусть 2π-периодическая функция $x(\cdot)$ такова, что ее ряд Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № № 14-01-00456, 14-01-00744).

где

$$\begin{aligned} a_k =& a_k(x(\cdot)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\cos kt\,dt, \quad k = 0,1,2,\ldots, \\ b_k =& b_k(x(\cdot)) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\sin kt\,dt, \quad k = 1,2,\ldots, \end{aligned}$$

сходится к $x(\cdot)$ равномерно.

Вместо точных коэффициентов Фурье функции известны их приближенные значения $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$ такие, что

$$\frac{(a_0-\widetilde{a}_0)^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}((a_k-\widetilde{a}_k)^2 + (b_k-\widetilde{b}_k)^2) \le \delta^2. \tag{1}$$

По этой информации требуется восстановить значение функции $x(\cdot)$ в некоторой точке τ.

Нетрудно показать, что как бы быстро не сходился исходный ряд к $x(\tau)$ и как бы не было мало $\delta > 0$, можно указать такие числа $\widetilde{a}_k$, $\widetilde{b}_k$, удовлетворяющие (1), что сумма ряда

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widetilde{a}_k\cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt)$$

будет отличаться от $x(\tau)$ на любое наперед заданное число или даже ряд будет расходиться.

Предлагается следующая процедура восстановления. В качестве приближенного значения функции в точке τ рассматривается ряд

$$\frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2\alpha}(\widetilde{a}_k\cos k\tau + \widetilde{b}_k \sin k\tau),$$

где α того же порядка малости, что и δ (например, можно положить $\alpha = \delta$).

Доказывается, что если функция $x(\cdot)$ принадлежит пространству $L_2(\mathbb{T})$ ($\mathbb{T}$ — отрезок $[-\pi,\pi]$ с идентифицированными концами) с нормой

$$\|x(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})} = \left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2}.$$

и $x(\cdot)$ непрерывна в τ, то данный ряд сходится к $x(\tau)$ при $\delta \to 0$.

При этом авторы в заключительном замечании пишут (выделено жирным шрифтом нами):

... должны ли мы, желая получить как можно более точное представление об интересующем нас физическом процессе, неограниченно совершенствовать точность прибора или путь к этому лежит через развитие таких математических методов обработки результатов измерений, которые позволяют при **имеющейся точности** *измерения частотных характеристик извлечь* **максимальную** *информацию об изучаемом процессе.*

Подход, который предлагается здесь к исследованию подобного рода задач, предполагает наличие некоторой априорной информации о функции $x(\cdot)$. Но тогда появляется возможность учитывать имеющуюся точность измерения и ставить вопрос о нахождении наилучшего метода среди всех возможных.

Априорная информация о функции будет состоять в том, что эта функция принадлежит некоторому классу. Обозначим через $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$ пространство 2π-периодических абсолютно непрерывных функций $x(\cdot)$, у которых первая производная $\dot{x}(\cdot)$ принадлежит $L_2(\mathbb{T})$. В

данной работе будем рассматривать следующий класс функций
$$W_2^1(\mathbb{T})=\{\,x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T}):\|\dot{x}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}\le 1\,\}.$$
Если $x(\cdot)\in\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то для каждого $t\in\mathbb{T}$ справедливо равенство
$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$
Приведем теперь несколько примеров нахождения оптимальных методов восстановления функций из класса $W_2^1(\mathbb{T})$.

1. Восстановление функции в точке, когда все коэффициенты Фурье известны приближенно в метрике l_2. Здесь мы рассматриваем пример, приведенный выше, но с позиций оптимального восстановления.

Обозначим через l_2 пространство суммируемых с квадратом вещественных последовательностей со скалярным произведением
$$\langle y,y'\rangle=\frac{y_0y_0'}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}y_ky_k',$$
где $y=(y_0,y_1,\dots)$, $y'=(y_0',y_1',\dots)$ и с соответствующей нормой
$$\|y\|_{l_2}=\left(\frac{y_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}y_k^2\right)^{1/2}.$$
Если функция $x(\cdot)$ принадлежит $\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})$, то ее коэффициенты Фурье принадлежат l_2. Пусть $F\colon\mathcal{W}_2^1(\mathbb{T})\to l_2$ — преобразование Фурье $x(\cdot)$, т. е. $Fx(\cdot)=(a_0(x(\cdot)),a_1(x(\cdot)),b_1(x(\cdot)),\dots)$ — набор коэффициентов Фурье функции $x(\cdot)$.

Предположим, что о каждой функции $x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны приближенно ее коэффициенты Фурье, а именно, известен вектор
$$y=(\widetilde{a}_0,\widetilde{a}_1,\widetilde{b}_1\dots)\in l_2$$
такой, что
$$\|Fx(\cdot)-y\|_{l_2}\le\delta,$$
где $\delta>0$.

Любой метод восстановления $x(\tau)$ должен сопоставлять вектору (наблюдению) y число, которое, согласно данному методу, есть некоторое приближение к $x(\tau)$. Таким образом, любой метод — это некоторая функция $\varphi\colon l_2\to\mathbb{R}$. *Погрешностью* данного метода назовем величину
$$e(W_2^1(\mathbb{T}),F,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_2\\ \|Fx(\cdot)-y\|_{l_2}\le\delta}}|x(\tau)-\varphi(y)|.$$
Нас интересует величина
$$E(W_2^1(\mathbb{T}),F,\delta)=\inf_{\varphi\colon l_2\to\mathbb{R}}e(W_2^1(\mathbb{T}),F,\delta,\varphi),$$
называемая *погрешностью оптимального восстановления* и метод $\widehat{\varphi}$, на котором достигается нижняя грань, называемый *оптимальным методом восстановления*, т. е. такой метод $\widehat{\varphi}$, что
$$E(W_2^1(\mathbb{T}),F,\delta)=e(W_2^1(\mathbb{T}),F,\delta,\widehat{\varphi}).$$

Теорема 1 ([2]). *Для любого $\delta > 0$*

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta) = (\widehat{a} + \delta^2)\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+\widehat{a}k^2)^2}\right)^{1/2},$$

где $\widehat{a} = \widehat{a}(\delta)$ — единственное решение уравнения

$$\frac{\dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+ak^2)^2}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{(1+ak^2)^2}} = \delta^2.$$

Метод $\widehat{\varphi}$, действующий по правилу

$$\widehat{\varphi}(y) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+\widehat{a}k^2}(\widetilde{a}_k \cos k\tau + \widetilde{b}_k \sin k\tau),$$

является оптимальным.

Как видно из формулировки теоремы, для любого $\delta > 0$ метод регуляризации, предложенный в [1], является оптимальным на классе $W_2^1(\mathbb{T})$ при $\alpha = \widehat{a}(\delta)$. Кроме того, минимальная ошибка оценивания $x(\tau)$ дается величиной $E(W_2^1(\mathbb{T}), F, \delta)$, которая стремится к нулю при $\delta \to 0$.

2. Восстановление функции в точке по неточно заданному конечному набору ее коэффициентов Фурье. Здесь также моделируется ситуация, рассмотренная выше, но в более естественной, на наш взгляд, постановке: мы располагаем лишь конечным набором коэффициентов Фурье, известных по модулю с точностью до некоторого δ.

Итак, рассматривается задача восстановления функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ в точке $\tau \in \mathbb{T}$ по следующей информации: известны числа $\widetilde{a}_k, \widetilde{b}_k$, для которых

$$|a_k - \widetilde{a}_k| \le \delta, \quad k \in A, \quad |b_k - \widetilde{b}_k| \le \delta, \quad k \in B,$$

где A и B — некоторые конечные множества из $\mathbb{N}$. Положим $N = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$ и

$$F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_k\}_{k\in A}, \{b_k\}_{k\in B}).$$

Через l_∞^N обозначим пространство векторов $y = (y_1, \dots, y_N)$ с нормой

$$\|y\|_{l_\infty^N} = \max_{1\le k\le N} |y_k|.$$

Таким образом, можно сказать, что информация о функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ состоит в том, что вместо набора ее коэффициентов Фурье $F_{A,B}x(\cdot)$ нам известны их приближенные значения

$$y = (\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\widetilde{b}_k\}_{k\in B})$$

такие, что

$$\|F_{A,B}x(\cdot) - y\|_{l_\infty^N} \le \delta.$$

Как и выше, для каждого метода $\varphi\colon l_\infty^N \to \mathbb{R}$ его погрешность определяется так

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_\infty^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot)-y\|_{l_\infty^N}\le\delta}} |x(\tau) - \varphi(y)|.$$

Погрешность оптимального восстановления определяется формулой

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_\infty^N \to \mathbb{R}} e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Метод $\widehat{\varphi}$ называется оптимальным, если выполняется соотношение

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \widehat{\varphi}).$$

Нетрудно убедиться, что если $0 \notin A$, то погрешность оптимального восстановления равна бесконечности (достаточно рассмотреть лишь константы из класса $W_2^1(\mathbb{T})$). Поэтому в дальнейшем будем считать, что $0 \in A$.

Положим $\widetilde{A} = A \setminus \{0\}$ и рассмотрим вектор

$$\left(\left\{\frac{\cos k\tau}{k^2}\right\}_{k\in\widetilde{A}}, \left\{\frac{\sin k\tau}{k^2}\right\}_{k\in B}\right).$$

Пусть

$$|\gamma_2| \geq \ldots \geq |\gamma_N| \tag{2}$$

— модули компонентов этого вектора, упорядоченные по убыванию. Если $\gamma_s = k_s^{-2}\cos k_s\tau$, то соответствующий индекс будем обозначать через $k_s(A)$, а если $\gamma_s = k_s^{-2}\sin k_s\tau$, то — через $k_s(B)$. Для каждого $2 \leq s \leq N$ обозначим через A_s и B_s подмножества индексов $k_2(C), \ldots, k_s(C)$ при $C = A$ и $C = B$, соответственно. Для удобства обозначений будем считать, что $A_1 = B_1 = \emptyset$ (сумма по пустому множеству индексов будет считаться равной нулю).

Положим

$$p = p(\delta) = \max\left\{ s : \gamma_{k_s}^2\left(1 - \delta^2 \sum_{k\in A_s\cup B_s} k^2\right) \right.$$
$$\left. > \delta^2 \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_s} \frac{\cos^2 k\tau}{k^2} + \delta^2 \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_s} \frac{\sin^2 k\tau}{k^2},\ 2 \leq s \leq N \right\}$$

(считая $p = 1$, если множество в скобках пусто),

$$\lambda = \left(\frac{\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_p} \frac{\cos^2 k\tau}{k^2} + \sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_p} \frac{\sin^2 k\tau}{k^2}}{\displaystyle 1 - \delta^2 \sum_{k\in A_p\cup B_p} k^2}\right)^{1/2}$$

и

$$\lambda_s = k_s^2(C)(|\gamma_s| - \lambda\delta), \quad \widetilde{c}_s = \begin{cases} \operatorname{sign}\gamma_s\, \widetilde{a}_{k_s(C)}, & C = A, \\ \operatorname{sign}\gamma_s\, \widetilde{b}_{k_s(C)}, & C = B. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для любого* $\delta > 0$

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \frac{\delta}{2} + \delta\sum_{s=2}^{p} \lambda_s + \lambda$$

и оптимальный метод имеет вид

$$\widehat{\varphi}(y)=\frac{\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{s=2}^{p}\lambda_s\widetilde{c}_s. \tag{3}$$

Отметим, что, во-первых, оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю имеющуюся информацию (суммирование идет до p, которое может быть достаточно малым, если δ достаточно большое), во-вторых, используемая информация “сглаживается” коэффициентами λ_s и наконец, коэффициенты Фурье, которые выбирает оптимальный метод, идут, вообще говоря, не подряд. Это свойство характерно для так называемых “жадных” алгоритмов.

Доказательство. Определим последовательности $\widehat{a}_k$ и $\widehat{b}_k$ по правилу

$$\widehat{a}_k=\begin{cases}\delta\operatorname{sign}\cos k\tau, & k\in A_p\cup 0\,;\\ \dfrac{\cos k\tau}{\lambda k^2}, & k\notin A_p\cup 0\,.\end{cases}\qquad \widehat{b}_k=\begin{cases}\delta\operatorname{sign}\sin k\tau, & k\in B_p\,;\\ \dfrac{\sin k\tau}{\lambda k^2}, & k\notin B_p\,.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\widehat{a}_k^2+\widehat{b}_k^2)=1. \tag{4}$$

Покажем, что $|\widehat{a}_k|\le\delta$ для всех $k\in A$ и $|\widehat{b}_k|\le\delta$ для всех $k\in B$. При $p=N$ это очевидно. Пусть $p<N$. Если при некотором $k>0$ и $k\in A\setminus A_p$ выполнялось бы неравенство $|\widehat{a}_k|>\delta$ или при некотором $k\in B\setminus B_p$ выполнялось бы неравенство $|\widehat{b}_k|>\delta$, то нашелся бы элемент γ_s, $2\le s\le N$, для которого имело бы место неравенство

$$\gamma_s^2>\delta^2\lambda^2.$$

В силу (2) отсюда вытекало бы неравенство

$$\gamma_{p+1}^2>\delta^2\lambda^2. \tag{5}$$

Предположим, что

$$\gamma_{p+1}^2=\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^4(A)}\,.$$

Тогда неравенство (5) можно записать так

$$\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^4(A)}\left(1-\delta^2\sum_{k\in A_p\cup B_p}k^2\right)>\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_p}\frac{\cos^2 k\tau}{k^2}+\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_p}\frac{\sin^2 k\tau}{k^2}.$$

Поскольку $A_{p+1}=A_p\cup\{k_{p+1}\}$, а $B_{p+1}=B_p$, то последнее неравенство записывается в виде

$$\frac{\cos^2 k_{p+1}(A)\tau}{k_{p+1}^4(A)}\left(1-\delta^2\sum_{k\in A_{p+1}\cup B_{p+1}}k^2\right)>\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_{p+1}}\frac{\cos^2 k\tau}{k^2}+\delta^2\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_{p+1}}\frac{\sin^2 k\tau}{k^2}.$$

Но такое неравенство противоречит определению p. Случай, когда

$$\gamma_{p+1}^2=\frac{\sin^2 k_{p+1}(B)\tau}{k_{p+1}^4(B)}\,,$$

рассматривается аналогично.

Докажем, что для любых последовательностей $\{a_k\}$, $k=0,1,\ldots$, и $\{b_k\}$, $k=1,2,\ldots$, таких, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2+b_k^2)<\infty,$$

имеет место тождество

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\tau+b_k\sin k\tau)=\sum_{s=2}^{p}\lambda_s c_s+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\widehat{a}_k a_k+\widehat{b}_k b_k), \tag{6}$$

где

$$c_s=\begin{cases}\operatorname{sign}\gamma_s\, a_{k_s(C)}, & C=A,\\ \operatorname{sign}\gamma_s\, b_{k_s(C)}, & C=B.\end{cases}$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}\sum_{s=2}^{p}\lambda_s c_s+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\widehat{a}_k a_k+\widehat{b}_k b_k)&=\sum_{s=2}^{p}k_s^2|\gamma_{k_s}|c_s-\lambda\delta\sum_{s=2}^{p}k_s^2 c_s\\ &+\lambda\delta\sum_{s=2}^{p}k_s^2c_s+\lambda\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus A_p}k^2\frac{\cos k\tau}{\lambda k^2}a_k+\lambda\sum_{k\in\mathbb{N}\setminus B_p}k^2\frac{\sin k\tau}{\lambda k^2}b_k\\ &=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\tau+b_k\sin k\tau).\end{aligned}$$

Заметим, что $\lambda_p>0$ в силу определения p, а $\lambda_s>0$ в силу (2) для всех $s=2,\ldots,p-1$.

Найдем теперь величину погрешности оптимального восстановления и покажем, что метод (3) является оптимальным. Оценим его погрешность. Пусть функция $x(\cdot)\in W_2^r(\mathbb{T})$. Используя (6) и неравенство Коши–Буняковского, получим

$$\begin{aligned}|x(\tau)-\widehat{\varphi}(y)|&=\left|\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\tau+b_k\sin k\tau)-\frac{\widetilde{a}_0}{2}-\sum_{s=2}^{p}\lambda_s\widetilde{c}_s\right|\\ &=\left|\frac{a_0-\widetilde{a}_0}{2}+\sum_{s=2}^{p}\lambda_s(c_s-\widetilde{c}_s)+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\tau+b_k\sin k\tau)-\sum_{s=2}^{p}\lambda_s c_s\right|\\ &\le\frac{\delta}{2}+\delta\sum_{s=2}^{p}\lambda_s+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}k^2(\widehat{a}_k^2+\widehat{b}_k^2)\sum_{k=1}^{\infty}k^2(a_k^2+b_k^2)\le\frac{\delta}{2}+\delta\sum_{s=2}^{p}\lambda_s+\lambda.\end{aligned}$$

Тем самым

$$e(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B},\delta,\widehat{\varphi})\le\frac{\delta}{2}+\delta\sum_{s=2}^{p}\lambda_s+\lambda.$$

Отсюда вытекает оценка сверху для оптимальной погрешности восстановления

$$E(W_2^1(\mathbb{T}),F_{A,B},\delta)\le\frac{\delta}{2}+\delta\sum_{s=2}^{p}\lambda_s+\lambda. \tag{7}$$

Получим теперь оценку снизу. Рассмотрим функцию

$$\widehat{x}(t) = \frac{\widehat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{a}_k \cos kt + \widehat{b}_k \sin kt).$$

Из (4) вытекает, что $\widehat{x}(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$. Кроме того, было показано, что $\|F_{A,B}\widehat{x}(\cdot)\|_{l_\infty^N} \le \delta$.

Для произвольного метода восстановления φ имеем

$$2|\widehat{x}(\tau)| = |\widehat{x}(\tau) - \varphi(0) - (-\widehat{x}(\tau) - \varphi(0))| \le |\widehat{x}(\tau) - \varphi(0)| + |-\widehat{x}(\tau) - \varphi(0)| \\ \le 2e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Вследствие произвольности φ получаем

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \ge |\widehat{x}(\tau)| = \left|\frac{\widehat{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\widehat{a}_k \cos k\tau + \widehat{b}_k \sin k\tau)\right|.$$

Учитывая тождество (6), имеем

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) \ge \frac{\delta}{2} + \delta\sum_{s=2}^{p}\lambda_s + \lambda.$$

Отсюда и (7) следует, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \frac{\delta}{2} + \delta\sum_{s=2}^{p}\lambda_s + \lambda,$$

а метод $\widehat{\varphi}$ является оптимальным. □

3. Восстановление по точным значениям коэффициентов Фурье в метрике L_2. Рассмотрим ситуацию, аналогичную предыдущему случаю, но восстанавливать функцию будем не в точке, а в метрике L_2. Причем сначала будем предполагать, что коэффициенты Фурье функции вообще известны точно.

Итак, пусть $A \subset \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ и $B \subset \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — конечные множества (одно из них может быть пустым) и о каждой функции $x(\cdot) \in W_2^1(\mathbb{T})$ нам известны ее коэффициенты Фурье $\{a_k\}_{k\in A}$ и $\{b_k\}_{k\in B}$, т. е. $x(\cdot)$ соответствует набор $F_{A,B}x(\cdot) = (\{a_k\}_{k\in A}, \{b_k\}_{b\in B})$ из N чисел, где $N = \operatorname{card} A + \operatorname{card} B$. Будем считать, для определенности, что $F_{A,B}x(\cdot) = (a_{k_1}, \ldots, a_{k_{N_1}}, b_{l_1}, \ldots, b_{l_{N_2}})$, где $k_1 < \ldots < k_{N_1}$ и $l_1 < \ldots < l_{N_2}$.

Любой метод φ, призванный восстановить $x(\cdot)$ по набору $F_{A,B}x(\cdot)$, сопоставляет этому набору функцию $\varphi(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot) \in L_2(\mathbb{T})$, т. е. φ есть отображение из $\mathbb{R}^N$ в $L_2(\mathbb{T})$. Погрешностью этого метода назовем величину

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \varphi) = \sup_{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T})} \|x(\cdot) - \varphi(F_{A,B}x(\cdot))(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}.$$

Как и раньше, нас интересует тот метод, погрешность которого минимальна. Точнее говоря, нас интересует величина погрешности оптимального восстановления:

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \inf_{\varphi\colon \mathbb{R}^N \to L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \varphi)$$

и оптимальные методы, т. е. такие методы $\widehat{\varphi}$, что

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \widehat{\varphi}).$$

Свяжем со множествами A и B число

$$k_0 = k_0(A,B) = \min\{\min_{k\in\mathbb{N}\setminus A} k,\ \min_{k\in\mathbb{N}\setminus B} k\}. \tag{8}$$

Теорема 3.

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \begin{cases} +\infty, & 0\notin A, \\ \dfrac{1}{k_0}, & 0\in A. \end{cases}$$

Для любых наборов чисел $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_{k_0-1})$ *и* $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_{k_0-1})$ *таких, что*

$$|\alpha_k - 1| \le \frac{k}{k_0}, \qquad |\beta_k - 1| \le \frac{k}{k_0}, \quad k = 1,\ldots,k_0-1,$$

метод

$$\widehat{\varphi}_{\alpha,\beta}(F_{A,B}x(\cdot))(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k_0-1}(\alpha_k a_k\cos kt + \beta_k b_k \sin kt)$$

является оптимальным.

Отметим, что оптимальных методов “много”. В частности, подходят числа $\alpha_k = \beta_k = 1$, $k = 1,\ldots,k_0-1$, и тогда мы получаем так называемый естественный метод: подставляем то, что наблюдаем. Если добавить сюда все остальные наблюдения, то легко показать, что метод останется оптимальным. Но принципиально важно то, что даже тогда, когда коэффициенты Фурье известны точно, для построения оптимального метода достаточно лишь $2k_0 - 1$ коэффициентов.

Поставим теперь такой вопрос. Пусть имеется возможность измерить N коэффициентов Фурье. Какие коэффициенты лучше всего взять, чтобы погрешность оптимального восстановления была минимальной. Из теоремы 3 вытекает следующий результат.

Теорема 4. *Пусть* $N\in\mathbb{N}$. *Тогда*

$$\inf_{\operatorname{card} A + \operatorname{card} B \le N} E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}) = \begin{cases} \dfrac{2}{N}, & N \text{ четное}, \\ \dfrac{2}{N+1}, & N \text{ нечетное}. \end{cases}$$

Если N *четно, то множества* A_1 *и* B_1, *на которых нижняя грань достигается и для которых величина* $\operatorname{card} A + \operatorname{card} B$ *минимальна, таковы*

$$A_1 = \{0,1,\ldots,N/2-1\}, \quad B_1 = \{1,\ldots,N/2-1\},$$

причем $B_1 = \emptyset$, *если* $N = 2$.

Если N *нечетно, то множества* A_2 *и* B_2, *на которых достигается нижняя грань имеют вид*

$$A_2 = \{0,1,\ldots,[N/2]\}, \quad B_2 = \{1,\ldots,[N/2]\},$$

причем $B_2 = \emptyset$, *если* $N = 1$.

Заметим, что $\operatorname{card} A_1 + \operatorname{card} B_1 = N - 1$.

4. Восстановление по неточным значениям коэффициентов Фурье в метрике L_2. Здесь мы имеем точно ту же ситуацию, что и в пункте 2, но восстанавливаем функцию в метрике L_2.

В данном случае погрешность метода $\varphi\colon l_\infty^N \to L_2(\mathbb{T})$ и погрешность оптимального восстановления определяются, естественно, формулами

$$e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{x(\cdot)\in W_2^1(\mathbb{T}),\ y\in l_\infty^N \\ \|F_{A,B}x(\cdot)-y\|_{l_\infty^N}\le\delta}} \|x(\cdot)-\varphi(y)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{T})}$$

и

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \inf_{\varphi\colon l_\infty^N\to L_2(\mathbb{T})} e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \varphi).$$

Оптимальные методы $\widehat{\varphi}$ — это те методы, для которых

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = e(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta, \widehat{\varphi}).$$

Положим

$$\widehat{p} = \widehat{p}(\delta) = \max\{\, p \in \mathbb{Z}_+ : \delta^2 p(p+1)(2p+1) < 3 \,\}$$

и $p_0 = p_0(A,B,\delta) = \min\{\,\widehat{p}, k_0 - 1\,\}$, где k_0 определено в предыдущем пункте.

Теорема 5.

$$E(W_2^1(\mathbb{T}), F_{A,B}, \delta) = \begin{cases} +\infty, & 0 \notin A, \\ \dfrac{1}{p_0+1}\sqrt{1+\dfrac{\delta^2}{6}(p_0+1)(8p_0^2+13p_0+3)}\,, & 0 \in A. \end{cases}$$

Метод

$$\widehat{\varphi}((\{\widetilde{a}_k\}_{k\in A}, \{\widetilde{b}_k\}_{k\in B}))(t) = \frac{\widetilde{a}_0}{2} + \sum_{k=1}^{p_0}\left(1-\left(\frac{k}{p_0+1}\right)^2\right)(\widetilde{a}_k\cos kt + \widetilde{b}_k \sin kt)$$

является оптимальным.

Отметим, что оптимальный метод, как и в предыдущем примере, использует не все доступные для измерения коэффициенты Фурье, а те, которые использует, “сглаживает”. При этом, чем хуже измерения (δ большое), тем меньше p_0.

Отметим еще, что если в этой теореме формально положить $\delta = 0$ (т. е. коэффициенты Фурье известны точно), то $p_0 = k_0 - 1$, и мы получаем утверждение теоремы 3, но с оптимальным методом, когда $\alpha_k = \beta_k = 1 - (k/k_0)$, $k = 1, \ldots, k_0 - 1$,

Комментарий. Теорема 2 является, фактически, расшифровкой более общего результата из работы [3]. Теоремы 3 и 5 доказаны в [2], но в более общей ситуации. Ряд результатов о восстановлении функции и ее производных по преобразованию Фурье можно найти в работах [4]–[8].

Список литературы

[1] *В. А. Ильин, Э. Г. Позняк* Основы математического анализа. Часть II. М.: Наука, 1973.

[2] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* О наилучшем гармоническом синтезе периодических функций// Фундамент. и прикл. матем. 2013. Т. 18, №5. 155–174.

[3] *Osipenko K. Yu.* Optimal recovery of periodic functions from Fourier coefficients given with an error// J. Complexity. 1996. V. 12. 35–46.

[4] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью// Матем. сб. 2002. Т. 193, № 3. 79–100.

[5] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных// Функ. анализ и его прил. 2003. Т. 37. 51–64.

[6] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление значений функций и их производных по неточно заданному преобразованию Фурье// Матем. сб. 2004. Т. 195, №10. 67–82.

[7] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру// Функц. анализ и его прил. 2010. Т. 44. 76—79.

[8] *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Как наилучшим образом восстановить функцию по неточно заданному спектру?// Матем. заметки. 2012. Т. 92, №1. 59—67.