УДК 517.98

К. Ю. Осипенко

О построении семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов

Предлагается некоторый подход к построению семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов по неточно заданной информации. Предложенный метод построения применяется для восстановления производных по неточно заданным другим производным в многомерном случае и для восстановления решений уравнения теплопроводности по неточно заданным распределениям температур в некоторые моменты времени.

Библиография: 25 наименований.

Ключевые слова: оптимальное восстановление, линейные операторы, уравнение теплопроводности, разностные уравнения.

DOI: https://doi.org/10.4213/im9384

§ 1. Введение

Пусть X – линейное пространство, Y, Z – линейные нормированные пространства. Задача об оптимальном восстановлении линейного оператора $\Lambda\colon X \to Z$ по неточно заданным значениям линейного оператора $I\colon X \to Y$ на множестве $W \subset X$ ставится как задача нахождения величины

$$E(\Lambda, W, I, \delta) = \inf_{\varphi\colon Y \to Z} \sup_{\substack{x \in W,\, y \in Y \\ \|Ix - y\|_Y \leqslant \delta}} \|\Lambda x - \varphi(y)\|_Z,$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления*, и отображения φ, на котором достигается нижняя грань, называемым *оптимальным методом восстановления* (здесь $\delta \geqslant 0$ – параметр, характеризующий ошибку задания значений оператора I). Первоначально эта задача была поставлена для случая, когда Λ – линейный функционал, Y – конечномерное пространство и информация известна точно ($\delta = 0$), в работе С. А. Смоляка [1]. Фактически эта постановка являлась обобщением задачи А. Н. Колмогорова о наилучшей квадратурной формуле на классе функций [2], в которой интеграл и значения функций заменены на произвольные линейные функционалы и нет условия линейности метода восстановления. В дальнейшем обобщениям этой задачи было посвящено много работ (см. [3]–[10], а также библиографию в этих работах).

Одной из первых работ, в которой рассматривалась задача построения оптимального метода восстановления для линейного оператора, была работа [4]. Дальнейшее развитие эта тематика получила в работах [11]–[19]. Оказалось, что в некоторых случаях удается построить целое семейство оптимальных методов восстановления линейного оператора. Изучение таких семейств началось в работе [20] и продолжилось в работах [21], [22], [14] и [19].

Цель работы – предложить некоторый подход к построению семейств оптимальных методов восстановления линейных операторов и продемонстрировать его применение к ряду конкретных задач.

§ 2. Общая постановка и построение семейств оптимальных методов

Будем рассматривать случай, когда в задаче оптимального восстановления само множество W (априорная информация об элементах из X) задается в виде ограничений, связанных с некоторым набором линейных операторов. Пусть $Y_0,\dots,Y_n$ – линейные нормированные пространства, а $I_j\colon X\to Y_j$, $j=0,\dots,n$, – линейные операторы. Пусть, кроме того, заданы числа $\delta_1,\dots,\delta_n\geqslant 0$ и задано множество натуральных чисел $J\subset\{1,\dots,n\}$. Положим $\overline{J}=\{1,\dots,n\}\setminus J$.

Задача состоит в оптимальном восстановлении оператора I_0 на множестве

$$W_J=\{x\in X\colon \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\ j\in J\}$$

по значениям операторов I_j, заданным с погрешностью δ_j, $j\in\overline{J}$ (при $J=\varnothing$ полагаем $W=X$). Точнее говоря, будем считать, что для каждого $x\in W$ нам известен вектор

$$y=\{y_j\}_{j\in\overline{J}}\in Y_{\overline{J}}=\prod_{j\in\overline{J}}Y_j$$

такой, что $\|I_jx-y_j\|_{Y_j}\leqslant\delta_j$, $j\in\overline{J}$. В качестве методов восстановления будем рассматривать произвольные отображения $\varphi\colon Y_{\overline{J}}\to Y_0$. *Погрешностью метода* $\varphi(\,\cdot\,)$ называется величина

$$e_J(I,\delta,\varphi)=\sup_{\substack{x\in W_J,\,y\in Y_{\overline{J}}\\ \|I_jx-y_j\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\,j\in\overline{J}}}\|I_0x-\varphi(y)\|_{Y_0},$$

а *погрешностью оптимального восстановления* – величина

$$E_J(I,\delta)=\inf_{\varphi\colon Y_{\overline{J}}\to Y_0}e_J(I,\delta,\varphi) \tag{2.1}$$

(здесь $I=(I_0,\dots,I_n)$, $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_n)$). Методы, на которых достигается нижняя грань в (2.1) (если таковые существуют), называются *оптимальными*.

Теорема 1. *Пусть* $1\leqslant p<+\infty$. *Предположим, что существуют* $\widehat{\lambda}_j\geqslant 0$, $j=1,\dots,n$, *такие, что*

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\,j=1,\dots,n}}\|I_0x\|_{Y_0}^p\geqslant\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^p.$$

Пусть, кроме того, множество линейных операторов $S_j\colon Y_j\to Y_0$, $j=1,\dots,n$, *таково, что*

$$I_0=\sum_{j=1}^nS_jI_j \tag{2.2}$$

и

$$\left\|\sum_{j=1}^n S_jz_j\right\|_{Y_0}^p\leqslant\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\|z_j\|_{Y_j}^p \tag{2.3}$$

для всех $z_j\in Y_j$, $j=1,\dots,n$. *Тогда для любого* $J\subset\{1,\dots,n\}$ *методы*

$$\widehat{\varphi}(y)=\sum_{j\in\overline{J}}S_jy_j \tag{2.4}$$

являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления, а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E_J(I,\delta)=\left(\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^p\right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $\varphi\colon Y_{\overline{J}}\to Y_0$ – произвольный метод восстановления и $x\in X$ такой, что $\|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j$, $j=1,\dots,n$. Тогда

$$\begin{aligned}2\|I_0x\|_{Y_0}&=\|I_0x-\varphi(0)-(I_0(-x)-\varphi(0))\|_{Y_0}\\&\leqslant\|I_0x-\varphi(0)\|_{Y_0}+\|I_0(-x)-\varphi(0)\|_{Y_0}\leqslant 2e_J(I,\delta,\varphi).\end{aligned}$$

Отсюда

$$e_J^p(I,\delta,\varphi)\geqslant\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\,j=1,\dots,n}}\|I_0x\|_{Y_0}^p\geqslant\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^p.$$

В силу произвольности метода $\varphi(\,\cdot\,)$ получаем

$$E_J^p(I,\delta)\geqslant\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^p. \tag{2.6}$$

Для оценки p-й степени погрешности метода $\widehat{\varphi}(\,\cdot\,)$ надо оценить значение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{gathered}\left\|I_0x-\sum_{j\in\overline{J}}S_jy_j\right\|_{Y_0}^p\to\max,\qquad\|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\quad j\in J,\\ \|I_jx-y_j\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\qquad j\in\overline{J},\quad x\in X.\end{gathered}$$

Положим $z_j=I_jx-y_j$, $j\in\overline{J}$. Тогда эта задача переписывается в виде

$$\begin{gathered}\left\|\left(I_0-\sum_{j\in\overline{J}}S_jI_j\right)x+\sum_{j\in\overline{J}}S_jz_j\right\|_{Y_0}^p\to\max,\qquad\|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\quad j\in J,\\ \|z_j\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\qquad j\in\overline{J},\quad x\in X.\end{gathered} \tag{2.7}$$

В силу равенства (2.2) и условия (2.3) получаем

$$\begin{aligned}\left\|\left(I_0-\sum_{j\in\overline{J}}S_jI_j\right)x+\sum_{j\in\overline{J}}S_jz_j\right\|_{Y_0}^p&=\left\|\sum_{j\in J}S_jI_jx+\sum_{j\in\overline{J}}S_jz_j\right\|_{Y_0}^p\\&\leqslant\sum_{j\in J}\widehat{\lambda}_j\|I_jx\|_{Y_j}^p+\sum_{j\in\overline{J}}\widehat{\lambda}_j\|z_j\|_{Y_j}^p\leqslant\sum_{j=1}^n\widehat{\lambda}_j\delta_j^p.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$E_J^p(I,\delta) \leqslant e_J^p(I,\delta,\widehat{\varphi}) \leqslant \sum_{j=1}^{n} \widehat{\lambda}_j \delta_j^p,$$

что вместе с (2.6) доказывает теорему.

Отметим, что двойственная экстремальная задача

$$\|I_0 x\|_{Y_0} \to \max, \qquad \|I_j x\|_{Y_j} \leqslant \delta_j, \quad j=1,\dots,n,$$

"не различает", какие из операторов I_j являются информационными, а какие из них задают класс, на котором рассматривается задача восстановления. Иными словами, двойственная экстремальная задача не отличает априорную информацию от апостериорной. В силу этого из теоремы 1 вытекает, что если найдены операторы $S_j\colon Y_j \to Y_0$, $j=1,\dots,n$, удовлетворяющие условиям (2.2) и (2.3), то решены сразу 2^n задач восстановления. Причем для получения соответствующего оптимального метода достаточно в методе

$$\widehat{\varphi}(y) = S_1 y_1 + \dots + S_n y_n$$

положить $y_j = 0$ для $j \in J$.

§ 3. Восстановление в $L_p(\mathbb{R}^d)$

Обозначим через $L_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leqslant p < \infty$, совокупность всех измеримых функций $x(\,\cdot\,)$, для которых

$$\|x(\,\cdot\,)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x(\xi)|^p\,d\xi\right)^{1/p} < \infty.$$

Пусть $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Для $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $(i\xi)^\alpha = (i\xi_1)^{\alpha_1}\cdots(i\xi_d)^{\alpha_d}$, $|\xi|^\alpha = |\xi_1|^{\alpha_1}\cdots|\xi_d|^{\alpha_d}$. Для $\alpha^0,\dots,\alpha^n \in \mathbb{R}_+^d$ положим

$$I_j x(\xi) = (i\xi)^{\alpha^j} x(\xi), \qquad j=0,\dots,n.$$

Множество измеримых функций $x(\,\cdot\,)$, для которых $\|I_j x(\,\cdot\,)\|_{L_p(\mathbb{R}^d)} < \infty$, $j = 1,\dots,n$, обозначим через X. Рассмотрим задачу (2.1) для $Y_0 = Y_1 = \dots = Y_n = L_p(\mathbb{R}^d)$.

Положим

$$Q = \operatorname{co}\left\{\left(\alpha^1, \ln\frac{1}{\delta_1}\right),\dots,\left(\alpha^n, \ln\frac{1}{\delta_n}\right)\right\},$$

где $\operatorname{co} M$ обозначает выпуклую оболочку множества M, и определим функцию $S(\,\cdot\,)$ на $\mathbb{R}^d$ по формуле

$$S(\alpha) = \max\{z \in \mathbb{R}\colon (\alpha, z) \in Q\}, \tag{3.1}$$

считая, что $S(\alpha) = -\infty$, если множество в фигурных скобках пусто.

Пусть $\alpha^0 \in \operatorname{co}\{\alpha^1,\dots,\alpha^n\}$. Тогда точка $(\alpha^0, S(\alpha^0))$ принадлежит границе выпуклого многогранника Q. Проведем опорную гиперплоскость к выпуклому многограннику Q в точке $(\alpha^0, S(\alpha^0))$. Ее можно записать в виде $z = \langle \alpha, \widehat{\eta}\,\rangle + \widehat{a}$ при некоторых $\widehat{\eta} = (\widehat{\eta}_1, \dots, \widehat{\eta}_d) \in \mathbb{R}^d$ и $\widehat{a} \in \mathbb{R}$ (через $\langle \alpha, \widehat{\eta}\,\rangle$ обозначается скалярное произведение векторов α и $\widehat{\eta}$). По теореме Каратеодори найдутся точки $(\alpha^{j_k}, \ln 1/\delta_{j_k})$, $k = 1, \dots, s$, $s \leqslant d+1$, из этой гиперплоскости такие, что

$$\alpha^0 = \sum_{k=1}^{s} \theta_{j_k} \alpha^{j_k}, \qquad \theta_{j_k} > 0, \quad k = 1, \dots, s, \quad \sum_{k=1}^{s} \theta_{j_k} = 1. \tag{3.2}$$

Положим $J_0 = \{j_1, \dots, j_s\}$ и

$$\widehat{\lambda}_j = \frac{\theta_j}{\delta_j^p} e^{-pS(\alpha^0)}, \qquad j \in J_0.$$

Теорема 2. *Пусть* $\alpha^0 \in \operatorname{co}\{\alpha^1, \dots, \alpha^n\}$. *Тогда для любого* $J \subset \{1, \dots, n\}$

$$E_J(I, \delta) = e^{-S(\alpha^0)}.$$

При этом все методы

$$\widehat{\varphi}(y) = \sum_{j \in \overline{J} \cap J_0} a_j(\xi) y_j,$$

где измеримые функции $a_j(\,\cdot\,)$, $j \in J_0$, *удовлетворяют условиям*

$$\sum_{j \in J_0} (i\xi)^{\alpha^j} a_j(\xi) = (i\xi)^{\alpha^0}, \tag{3.3}$$

$$\sum_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}} \leqslant 1, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \textit{если} \ \ 1 < p < \infty, \tag{3.4}$$

$$\max_{j \in J_0} \frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j} \leqslant 1, \quad \textit{если} \ \ p = 1, \tag{3.5}$$

для п. в. $\xi \in \mathbb{R}^d$, *являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления.*

Доказательство. Оценим значение экстремальной задачи

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^0} x(\xi)|^p \, d\xi \to \max, \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x(\xi)|^p \, d\xi \leqslant \delta_j^p, \quad j = 1, \dots, n. \tag{3.6}$$

Положим $\widehat{A} = e^{-p\widehat{a}}$, $\widehat{\xi}_j = e^{-\widehat{\eta}_j}$, $j = 1, \dots, d$, $\widehat{\xi} = (\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_d)$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ рассмотрим куб

$$B_\varepsilon = \{\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d \colon \widehat{\xi}_j - \varepsilon \leqslant \xi_j \leqslant \widehat{\xi}_j, \, j = 1, \dots, d\}$$

и функцию

$$x_\varepsilon(\xi) = \begin{cases} \left(\dfrac{\widehat{A}}{|B_\varepsilon|}\right)^{1/p}, & \xi \in B_\varepsilon, \\ 0, & \xi \notin B_\varepsilon \end{cases}$$

(через $|B_\varepsilon|$ обозначен объем куба B_ε). Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi \leqslant \widehat{A}|\widehat{\xi}|^{p\alpha^j} = e^{-p(\langle \alpha^j,\widehat{\eta}\,\rangle+\widehat{a})}.$$

В силу того, что $z=\langle\alpha,\widehat{\eta}\,\rangle+\widehat{a}$ – уравнение опорной гиперплоскости к Q, имеем

$$\langle\alpha^j,\widehat{\eta}\,\rangle+\widehat{a}\geqslant \ln\frac{1}{\delta_j}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^j} x_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi \leqslant \delta_j^p, \qquad j=1,\dots,n.$$

Тем самым $x_\varepsilon(\,\cdot\,)$ – допустимая функция в задаче (3.6). Следовательно,

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\,j=1,\dots,n}} \|I_0x\|_{Y_0}^p \geqslant \int_{\mathbb{R}^d} |(i\xi)^{\alpha^0} x_\varepsilon(\xi)|^p\,d\xi \geqslant \widehat{A}|\widehat{\xi}_\varepsilon|^{p\alpha^0},$$

где

$$\widehat{\xi}_\varepsilon=(\widehat{\xi}_1-\varepsilon,\dots,\widehat{\xi}_d-\varepsilon).$$

Устремив ε к нулю, будем иметь

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\,j=1,\dots,n}} \|I_0x\|_{Y_0}^p \geqslant e^{-pa}|\widehat{\xi}|^{p\alpha^0} = e^{-p(\langle\alpha^0,\widehat{\eta}\,\rangle+\widehat{a})} = e^{-pS(\alpha^0)}.$$

Таким образом,

$$\sup_{\substack{x\in X\\ \|I_jx\|_{Y_j}\leqslant\delta_j,\,j=1,\dots,n}} \|I_0x\|_{Y_0}^p \geqslant \sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j\delta_j^p.$$

Определим операторы $S_j\colon L_p(\mathbb{R}^d)\to L_p(\mathbb{R}^d)$, $j=1,\dots,n$, следующим образом:

$$S_jz(\xi)=\begin{cases} a_j(\xi)z(\xi), & j\in J_0,\\ 0, & j\notin J_0,\end{cases}$$

где $a_j(\,\cdot\,)$, $j\in J_0$, удовлетворяют условиям (3.3)–(3.5). Имеем

$$\biggl\|\sum_{j=1}^n S_jz_j(\,\cdot\,)\biggr\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}^p = \int_{\mathbb{R}^d}\biggl|\sum_{j\in J_0} a_j(\xi)z_j(\xi)\biggr|^p\,d\xi. \tag{3.7}$$

По неравенству Гёльдера при $1<p<\infty$

$$\biggl|\sum_{j\in J_0} a_j(\xi)z_j(\xi)\biggr| = \biggl|\sum_{j\in J_0}\frac{a_j(\xi)}{\widehat{\lambda}_j^{1/p}}\widehat{\lambda}_j^{1/p}z_j(\xi)\biggr| \leqslant \Omega(\xi)\biggl(\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|z_j(\xi)|^p\biggr)^{1/p},$$

где

$$\Omega(\xi)=\biggl(\sum_{j\in J_0}\frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}}\biggr)^{1/p'}, \qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1.$$

При $p=1$ получаем неравенство

$$\Bigl|\sum_{j\in J_0} a_j(\xi)z_j(\xi)\Bigr| \leqslant \Omega(\xi)\Bigl(\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|z_j(\xi)|\Bigr),$$

в котором

$$\Omega(\xi)=\max_{j\in J_0}\frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j}.$$

Используя полученные неравенства, из (3.7) следует, что

$$\Bigl\|\sum_{j=1}^n S_jz_j(\,\cdot\,)\Bigr\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^d}\Omega^p(\xi)\Bigl(\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|z_j(\xi)|^p\Bigr)\,d\xi.$$

В силу условий (3.4), (3.5) получаем

$$\Bigl\|\sum_{j=1}^n S_jz_j(\,\cdot\,)\Bigr\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j\|z_j(\,\cdot\,)\|^p_{L_p(\mathbb{R}^d)}.$$

Остается показать, что множество функций $a_j(\,\cdot\,)$, $j\in J_0$, удовлетворяющих условиям (3.3)–(3.5) не пусто. Рассмотрим на $\mathbb{R}^d$ функцию

$$f(\eta)=-1+\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_je^{-p\langle\alpha^j-\alpha^0,\eta\rangle}.$$

Это, очевидно, выпуклая функция, причем легко убедиться, что $f(\widehat{\eta})=0$ и производная этой функции в точке $\widehat{\eta}$ также равна нулю. Отсюда вытекает, что $f(\eta)\geqslant 0$ при всех $\eta\in\mathbb{R}^d$. Следовательно,

$$-e^{-p\langle\alpha^0,\eta\rangle}+\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_je^{-p\langle\alpha^j,\eta\rangle}\geqslant 0.$$

Положив $e^{-\eta_j}=|\xi_j|$, $j=1,\dots,d$, получаем, что

$$-|\xi|^{p\alpha^0}+\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}\geqslant 0 \tag{3.8}$$

при всех $\xi\in\mathbb{R}^d$. Положим

$$a_j(\xi)=(i\xi)^{\alpha^0}\frac{\widehat{\lambda}_j(-i\xi)^{\alpha^j}|\xi|^{(p-2)\alpha^j}}{\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}},\qquad j\in J_0.$$

Легко убедиться, что условие (3.3) выполнено. При $p=1$, учитывая (3.8), получаем

$$\frac{|a_j(\xi)|}{\widehat{\lambda}_j}=\frac{|\xi|^{\alpha^0}}{\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{\alpha^j}}\leqslant 1.$$

Если $p>1$, то

$$\sum_{j\in J_0}\frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}}=\sum_{j\in J_0}\frac{|\xi|^{p'\alpha^0}\widehat{\lambda}_j^{p'}|\xi|^{(p-1)p'\alpha^j}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}\bigl(\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}\bigr)^{p'}}=\frac{|\xi|^{p'\alpha^0}\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}}{\bigl(\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}\bigr)^{p'}}$$
$$=\left(\frac{|\xi|^{p\alpha^0}}{\sum_{j\in J_0}\widehat{\lambda}_j|\xi|^{p\alpha^j}}\right)^{p'-1}.$$

Теперь из (3.8) следует, что

$$\sum_{j\in J_0}\frac{|a_j(\xi)|^{p'}}{\widehat{\lambda}_j^{p'/p}}\leqslant 1.$$

Пусть $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in\mathbb{R}^d_+$. Для функции $x(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{R}^d)$ через $D^\alpha x(\,\cdot\,)$ будем обозначать производную порядка α по Вейлю, определяемую равенством

$$D^\alpha x(t)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(i\xi)^\alpha Fx(\xi)e^{i\langle\xi,t\rangle}\,d\xi,$$

где $Fx(\,\cdot\,)$ – преобразование Фурье функции $x(\,\cdot\,)$.

Пусть $\alpha^0,\dots,\alpha^n\in\mathbb{R}^d_+$. Положим

$$I_j=D^{\alpha^j},\qquad j=0,\dots,n.$$

Множество измеримых функций $x(\,\cdot\,)$, для которых $\|D^{\alpha^j}x(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}<\infty$, $j=1,\dots,n$, обозначим через X. Рассмотрим задачу (2.1) для $Y_0=\dots=Y_n=L_2(\mathbb{R}^d)$. Используя ранее введенные обозначения для $p=2$, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $\alpha^0\in\operatorname{co}\{\alpha^1,\dots,\alpha^n\}$. Тогда для любого $J\subset\{1,\dots,n\}$*

$$E_J(I,\delta)=e^{-S(\alpha^0)}.$$

При этом все методы

$$\widehat{\varphi}(y)=\sum_{j\in\overline{J}\cap J_0}\Lambda_j y_j,$$

где $\Lambda_j\colon L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)$, $j\in J_0$, – линейные непрерывные операторы, действия которых в образах Фурье имеют вид $F\Lambda_j y_j(\,\cdot\,)=a_j(\,\cdot\,)Fy_j(\,\cdot\,)$, а измеримые функции $a_j(\,\cdot\,)$, $j\in J_0$, удовлетворяют условиям

$$\sum_{j\in J_0}(i\xi)^{\alpha^j}a_j(\xi)=(i\xi)^{\alpha^0},\qquad \sum_{j\in J_0}\frac{|a_j(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_j}\leqslant 1,$$

для п. в. $\xi\in\mathbb{R}^d$, и являются оптимальными для соответствующей задачи оптимального восстановления.

Доказательство. Переходя к образам Фурье и пользуясь равенством Парсеваля, условия

$$\left\|D^{\alpha^j}x(\,\cdot\,)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta_j^2,\qquad \left\|D^{\alpha^j}x(\,\cdot\,)-y_j(\,\cdot\,)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta_j^2$$

могут быть переписаны в виде

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\xi|^{2\alpha^j}|f(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\delta_j^2,\qquad \int_{\mathbb{R}^d}\left|(i\xi)^{\alpha^j}f(\xi)-Y_j(\xi)\right|^2\leqslant\delta_j^2,$$

где

$$f(\,\cdot\,)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}Fx(\,\cdot\,),\qquad Y_j(\,\cdot\,)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}Fy_j(\,\cdot\,).$$

Для любого метода восстановления $\varphi\colon (L_2(\mathbb{R}^d))^m\to L_2(\mathbb{R}^d)$, $m=\operatorname{card}\overline{J}$,

$$\left\|D^{\alpha^0}x(\,\cdot\,)-\varphi(y)(\,\cdot\,)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}=\int_{\mathbb{R}^d}\left|(i\xi)^{\alpha^0}f(\xi)-\Phi(y)(\xi)\right|^2d\xi,$$

где

$$\Phi(y)(\,\cdot\,)=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}F\varphi(y)(\,\cdot\,).$$

Тем самым рассматриваемая задача эквивалентна задаче (для $p=2$), решение которой дано в теореме 2. Теорема доказана.

Отметим, что из теорем 1 и 2 вытекает равенство

$$\sup_{\|D^{\alpha^j}x(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\delta_j,\,j=1,\dots,n}\left\|D^{\alpha^0}x(\,\cdot\,)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}=e^{-S(\alpha^0)}=\prod_{j\in J_0}\delta_j^{\theta_j}.\tag{3.9}$$

Экстремальная задача в левой части (3.9) тесно связана с нахождением точной константы в обобщенном неравенстве Харди–Литлвуда–Полиа, которое в рассматриваемом случае имеет вид

$$\left\|D^{\alpha^0}x(\,\cdot\,)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\prod_{j\in J_0}\left\|D^{\alpha^j}x(\,\cdot\,)\right\|^{\theta_j}_{L_2(\mathbb{R}^d)}$$

(подробнее см. [23]).

§ 4. Обобщенное уравнение теплопроводности на сфере

Положим

$$\mathbb{S}^{d-1}=\{x\in\mathbb{R}^d\colon |x|=1\},\qquad d\geqslant 2,$$

где $|x|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_d^2}$. Оператор Лапласа–Бельтрами Δ_S определяется для функций, заданных на единичной сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, следующим образом:

$$\Delta_S Y(x')=\Delta Y\left(\frac{x}{|x|}\right)\bigg|_{x=x'},$$

где Δ – оператор Лапласа. Обозначим через $\mathcal{H}_k$ множество сферических гармоник порядка k. Известно (см. [24]), что $L_2(\mathbb{S}^{d-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k$, при этом $\dim \mathcal{H}_0 = a_0 = 1$,

$$\dim \mathcal{H}_k = a_k = (d+2k-2)\frac{(d+k-3)!}{(d-2)!\,k!}, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Выберем в $\mathcal{H}_k$ ортонормированный базис $Y_j^{(k)}(\,\cdot\,)$, $j = 1, \dots, a_k$. Для $\alpha > 0$ оператор $(-\Delta_S)^{\alpha/2}$ определяется равенством

$$(-\Delta_S)^{\alpha/2} Y(\,\cdot\,) = \sum_{k=1}^{\infty} \Lambda_k^{\alpha/2} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,),$$

где

$$Y(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,),$$

а $\Lambda_k = k(k+d-2)$ – собственные значения оператора $-\Delta_S$.

Рассмотрим задачу нахождения решения уравнения

$$u_t + (-\Delta_S)^{\alpha/2} u = 0 \tag{4.1}$$

с начальным условием

$$u(\,\cdot\,, 0) = f(\,\cdot\,),$$

где $f(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Если

$$f(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,), \tag{4.2}$$

то методом Фурье несложно получить решение этой задачи

$$u(x', t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} t} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Предположим, что приближенно известны решения рассматриваемой задачи при $t = 0, T$. Требуется восстановить решение в момент времени τ, $0 < \tau < T$. Для функций $f(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, имеющих разложение (4.2), положим $I_1 f(\,\cdot\,) = f(\,\cdot\,)$,

$$I_0 f(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} \tau} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,),$$

$$I_2 f(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2} T} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,).$$

Тем самым мы приходим к задаче (2.1) при $X = Y_0 = Y_1 = Y_2 = L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $p = 2$ и $J = \varnothing$.

Теорема 4. *Если* $\delta_1/\delta_2 \in \left[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\right]$ *при некотором* $m \in \mathbb{Z}_+$, *то для всех* α_{kj}, $k = 0, 1, \dots$, $j = 1, \dots, a_k$, *удовлетворяющих условию*

$$\frac{\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}} + \frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2} \leqslant 1, \tag{4.3}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}(T-\tau)} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2}(T-\tau)}}{e^{2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T} - e^{2\Lambda_m^{\alpha/2}T}}, \qquad \lambda_2 = \frac{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}\tau} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}\tau}}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}},$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\left(e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\left(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \alpha_{kj}\right)y_{kj}^{(1)} + \alpha_{kj}y_{kj}^{(2)}\right)Y_j^{(k)}(\,\cdot\,),$$

где

$$y_s(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(s)}Y_j^{(k)}(\,\cdot\,), \qquad s = 1, 2,$$

являются оптимальными, а

$$E_{\varnothing}(I, \delta) = \sqrt{\lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2}.$$

Если $\delta_1/\delta_2 \in (0, 1]$, *то метод*

$$\widehat{\varphi}(y_1, y_2)(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}\sum_{j=1}^{a_k} y_{kj}^{(1)}Y_j^{(k)}(\,\cdot\,)$$

является оптимальным, а $E_{\varnothing}(I, \delta) = \delta_1$.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|I_0 f(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \to \max, \qquad \|I_j f(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta_j^2, \quad j = 1, 2.$$

Эту задачу можно записать в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} f_k^2 \to \max, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} f_k^2 \leqslant \delta_1^2, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T} f_k^2 \leqslant \delta_2^2, \tag{4.4}$$

где

$$f_k^2 = \sum_{j=1}^{a_k} c_{jk}^2, \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Пусть $\delta_1/\delta_2 \in \left[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\right]$. Определим f_m и f_{m+1} из условий

$$f_m^2 + f_{m+1}^2 = \delta_1^2, \qquad e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} f_m^2 + e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T} f_{m+1}^2 = \delta_2^2.$$

Имеем

$$f_m^2 = \frac{\delta_2^2 - \delta_1^2 e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}}, \qquad f_{m+1}^2 = \frac{\delta_1^2 e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} - \delta_2^2}{e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}T} - e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}}.$$

Последовательность $\{f_k\}$, в которой $f_k=0$ при $k\neq m,m+1$ является допустимой в экстремальной задаче (4.4). Поэтому

$$\sup_{\substack{f(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})\\ \|I_jf(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta_j,\,j=1,2}}\|I_0f(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\geqslant e^{-2\Lambda_m^{\alpha/2}\tau}f_m^2+e^{-2\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}\tau}f_{m+1}^2$$
$$=\lambda_1\delta_1^2+\lambda_2\delta_2^2.$$

Если $\delta_1/\delta_2\in(0,1]$, то последовательность $\{f_k\}$, в которой $f_0=\delta_1^2$, а $f_k=0$ при $k\geqslant 1$, является допустимой в задаче (4.4). Поэтому в данном случае

$$\sup_{\substack{f(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})\\ \|I_jf(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta_j,\,j=1,2}}\|I_0f(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\geqslant f_0^2=\delta_1^2.$$

Пусть снова $\delta_1/\delta_2\in\bigl[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T},e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\bigr]$. Для функций $f(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, имеющих разложение (4.2), определим операторы $S_j\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1})\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, $j=1,2$, равенствами

$$S_1f(\,\cdot\,)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\bigl(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}-\alpha_{kj}\bigr)c_{kj}Y_j^{(k)}(\,\cdot\,),$$
$$S_2f(\,\cdot\,)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\alpha_{kj}c_{kj}Y_j^{(k)}(\,\cdot\,),$$

где α_{kj} удовлетворяют условию (4.3). Нетрудно убедиться, что $I_0=S_1I_1+S_2I_2$. Для $f_1(\,\cdot\,),f_2(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ имеем

$$\|S_1f_1(\,\cdot\,)+S_2f_2(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Bigl(e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\bigl(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}-\alpha_{kj}\bigr)f_{kj}^{(1)}+\alpha_{kj}f_{kj}^{(2)}\Bigr)^2,$$

где $f_{kj}^{(1)},f_{kj}^{(2)}$ – коэффициенты Фурье функций $f_1(\,\cdot\,),f_2(\,\cdot\,)$. Из неравенства Коши–Буняковского, учитывая условие (4.3), получаем

$$\begin{aligned}&\Bigl(e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T}\bigl(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}-\alpha_{kj}\bigr)f_{kj}^{(1)}+\alpha_{kj}f_{kj}^{(2)}\Bigr)^2\\&\qquad\leqslant\biggl(\frac{\bigl(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}-\alpha_{kj}\bigr)^2}{\lambda_1e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}+\frac{\alpha_{kj}^2}{\lambda_2}\biggr)\Bigl(\lambda_1\bigl(f_{kj}^{(1)}\bigr)^2+\lambda_2\bigl(f_{kj}^{(2)}\bigr)^2\Bigr)\\&\qquad\leqslant\lambda_1\bigl(f_{kj}^{(1)}\bigr)^2+\lambda_2\bigl(f_{kj}^{(2)}\bigr)^2.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\|S_1f_1(\,\cdot\,)+S_2f_2(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}&\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k}\Bigl(\lambda_1\bigl(f_{kj}^{(1)}\bigr)^2+\lambda_2\bigl(f_{kj}^{(2)}\bigr)^2\Bigr)\\&=\lambda_1\|f_1(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}+\lambda_2\|f_2(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.\end{aligned}$$

Покажем, что существуют α_{kj}, $k=0,1,\dots$, $j=1,\dots,a_k$, удовлетворяющие условию (4.3). Рассмотрим на плоскости (x,y) множество точек с координатами

$$x_k=e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T},\quad y_k=e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau},\qquad k=0,1,\dots\,.$$

Это множество точек лежит на вогнутой кривой $y = x^{\tau/T}$. Проведем прямую через точки (x_{m+1}, y_{m+1}) и (x_m, y_m). Нетрудно убедиться, что уравнение этой прямой записывается в виде $y = \lambda_1 + \lambda_2 x$. В силу вогнутости кривой, на которой лежат рассматриваемые точки, имеем

$$y_k \leqslant \lambda_1 + \lambda_2 x_k, \qquad k = 0, 1, \dots .$$

Следовательно, для всех $k = 0, 1, \dots$

$$\frac{e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}} \leqslant 1.$$

Положим

$$\widehat{\alpha}_{kj} = \frac{\lambda_2 e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T} + \lambda_2}.$$

Тогда

$$\frac{\bigl(e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} - \widehat{\alpha}_{kj}\bigr)^2}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}} + \frac{\widehat{\alpha}_{kj}^2}{\lambda_2} = \frac{e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}}{\lambda_1 e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T} + \lambda_2} = \frac{e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}} \leqslant 1.$$

Если $\delta_1/\delta_2 \in (0,1]$, то положим $S_1 = I_0$, а $S_2 = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|S_1 f_1(\,\cdot\,) + S_2 f_2(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \|I_0 f_1(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \sum_{j=1}^{a_k} \bigl(f_{kj}^{(1)}\bigr)^2 \\ \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{a_k} \bigl(f_{kj}^{(1)}\bigr)^2 = \|f_1(\,\cdot\,)\|^2_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}.\end{aligned}$$

Теперь утверждение доказываемой теоремы вытекает из теоремы 1.

Условие (4.3) можно записать в эквивалентной форме

$$(\alpha_{kj} - \widehat{\alpha}_{kj})^2 \leqslant \lambda_1\lambda_2 e^{4\Lambda_k^{\alpha/2}T} \frac{-e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}{\bigl(\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}\bigr)^2}.$$

Тем самым все α_{kj}, удовлетворяющие условию (4.3), имеют вид

$$\alpha_{kj} = \widehat{\alpha}_{kj} + \theta_{kj} e^{2\Lambda_k^{\alpha/2}T}\sqrt{\lambda_1\lambda_2}\,\frac{\sqrt{-e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} + \lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}}}{\lambda_1 + \lambda_2 e^{-2\Lambda_k^{\alpha/2}T}},$$

где $|\theta_{kj}| \leqslant 1$.

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени τ по неточно заданному решению в момент времени $T > \tau$ на классе

$$W = \{f(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \colon \|f(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta_1\},$$

то из той же теоремы 1 (при $J = \{1\}$) будет следовать, что методы $\widehat{\varphi}(0, y_2)(\,\cdot\,)$ будут оптимальными. Оказывается, что среди этого семейства оптимальных методов есть подсемейство оптимальных методов, которые обладают некоторым преимуществом по сравнению с остальными.

Для того чтобы указать это подсемейство, сформулируем сначала расширенный вариант рассматриваемой задачи. Пусть задан некоторый класс функций $\mathcal{F} \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Положим

$$e(\mathcal{F}, \delta, \varphi) = \sup_{\substack{f(\,\cdot\,)\in\mathcal{F},\, y(\,\cdot\,)\in L_2(\mathbb{S}^{d-1}) \\ \|u(\,\cdot\,,T)-y(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}\leqslant\delta}} \|u(\,\cdot\,,\tau) - \varphi(y)(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})},$$

$$E(\mathcal{F}, \delta) = \inf_{\varphi\colon L_2(\mathbb{S}^{d-1})\to L_2(\mathbb{S}^{d-1})} e(\mathcal{F}, \delta, \varphi).$$

Задача о нахождении погрешности оптимального восстановления $E(\mathcal{F}, \delta)$ и соответствующего оптимального метода отличается от рассмотренной ранее лишь произвольным классом $\mathcal{F}$.

Будем говорить, что метод $\varphi(y)(\,\cdot\,)$ точен на множестве $L \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, если $\varphi(u(\,\cdot\,,T))(\,\cdot\,) = u(\,\cdot\,,\tau)$ для всех $f(\,\cdot\,) \in L$.

Предложение 1. *Если $\widehat{\varphi}(y)(\,\cdot\,)$ – оптимальный метод для класса $\mathcal{F}$, являющийся линейным и точным на множестве $L \subset L_2(\mathbb{S}^{d-1})$, содержащем нуль, то он оптимален и на классе $\mathcal{F} + L$. При этом*

$$E(\mathcal{F}, \delta) = E(\mathcal{F} + L, \delta). \tag{4.5}$$

Доказательство. Пусть $f(\,\cdot\,) \in \mathcal{F} + L$, $f(\,\cdot\,) = f_1(\,\cdot\,) + f_2(\,\cdot\,)$, где $f_1(\,\cdot\,) \in \mathcal{F}$, $f_2(\,\cdot\,) \in L$. Обозначим через $u_j(\,\cdot\,,\cdot\,)$ решение уравнения (4.1) с начальной функцией $f_j(\,\cdot\,)$, $j = 1, 2$. Пусть функция $y(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$ такова, что $\|u(\,\cdot\,,T) - y(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta$. Положим $y_1(\,\cdot\,) = y(\,\cdot\,) - u_2(\,\cdot\,,T)$. Ясно, что $y_1(\,\cdot\,) \in L_2(\mathbb{S}^{d-1})$. Так как $u_1(\,\cdot\,,T) - y_1(\,\cdot\,) = u(\,\cdot\,,T) - y(\,\cdot\,)$, то

$$\|u_1(\,\cdot\,,T) - y_1(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} \leqslant \delta. \tag{4.6}$$

Из линейности и точности $\widehat{\varphi}(y)(\,\cdot\,)$ на L следует равенство

$$\|u(\,\cdot\,,\tau) - \widehat{\varphi}(y)(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})} = \|u_1(\,\cdot\,,\tau) - \widehat{\varphi}(y_1)(\,\cdot\,)\|_{L_2(\mathbb{S}^{d-1})}. \tag{4.7}$$

Выражение справа в (4.7) в силу (4.6) не превосходит величины $e(\mathcal{F}, \delta, \widehat{\varphi})$, которая равна $E(\mathcal{F}, \delta)$, так как метод $\widehat{\varphi}(y)(\,\cdot\,)$ оптимален. Учитывая это обстоятельство и переходя в левой части (4.7) к верхней грани по $f(\,\cdot\,) \in \mathcal{F} + L$ и соответствующим $y(\,\cdot\,)$, получаем, что

$$e(\mathcal{F} + L, \delta, \widehat{\varphi}) \leqslant E(\mathcal{F}, \delta).$$

Отсюда и из того, что $\mathcal{F} \subset \mathcal{F} + L$, имеем

$$E(\mathcal{F}, \delta) \leqslant E(\mathcal{F} + L, \delta) \leqslant e(\mathcal{F} + L, \delta, \widehat{\varphi}) \leqslant E(\mathcal{F}, \delta).$$

Следовательно, $\widehat{\varphi}(y)(\,\cdot\,)$ – оптимальный метод для класса $\mathcal{F} + L$, и справедливо равенство (4.5). Предложение доказано.

Предположим, что $\delta_1/\delta_2 \in \left[e^{\Lambda_m^{\alpha/2}T}, e^{\Lambda_{m+1}^{\alpha/2}T}\right]$. Нетрудно показать, что при достаточно большом m выполняется неравенство $\lambda_2 \geqslant 1$. Тем самым, если δ_1 фиксировано, то при достаточно малых δ_2 выполняется неравенство $\lambda_2 \geqslant 1$. В этом случае положим

$$\widehat{k} = \max\left\{k \in \mathbb{Z}_+ \colon \Lambda_k \leqslant \left(\frac{\ln \lambda_2}{2(T-\tau)}\right)^{2/\alpha}\right\}.$$

Несложно убедиться, что

$$\widehat{k} = \left[\sqrt{\frac{(d-2)^2}{4} + \left(\frac{\ln \lambda_2}{2(T-\tau)}\right)^{2/\alpha}} - \frac{d-2}{2}\right]$$

($[a]$ – целая часть числа a).

Рассмотрим методы

$$\widehat{\varphi}_0(y)(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} \sum_{j=1}^{a_k} e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,) + \sum_{k=\widehat{k}+1}^{\infty} \sum_{j=1}^{a_k} \alpha_{kj} y_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,),$$

где α_{kj}, $k = \widehat{k}+1, \widehat{k}+2, \ldots$, $j = 1, \ldots, a_k$, удовлетворяют условию (4.3). В силу того, что для

$$\alpha_{kj} = e^{\Lambda_k^{\alpha/2}(T-\tau)}, \qquad k = 0, \ldots \widehat{k}, \quad j = 1, \ldots, a_k,$$

выполнено условие (4.3), методы $\widehat{\varphi}_0(y)(\,\cdot\,)$ – оптимальные на классе W.

Кроме того, методы $\widehat{\varphi}_0(y)(\,\cdot\,)$ – точные на подпространстве

$$L_{\widehat{k}} = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} \mathcal{H}_k.$$

Действительно, пусть $f(\,\cdot\,) \in L_{\widehat{k}}$. Тогда

$$f(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,).$$

Поэтому

$$u(x', T) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}T} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(x').$$

Следовательно,

$$\widehat{\varphi}_0(u(\,\cdot\,, T))(\,\cdot\,) = \sum_{k=0}^{\widehat{k}} e^{-\Lambda_k^{\alpha/2}\tau} \sum_{j=1}^{a_k} c_{kj} Y_j^{(k)}(\,\cdot\,) = u(\,\cdot\,, \tau).$$

Тем самым из предложения 1 вытекает, что методы $\widehat{\varphi}_0(y)(\,\cdot\,)$ не только оптимальны на классе W, но они остаются оптимальными на более широком классе $W + L_{\widehat{k}}$.

§ 5. Оптимальное восстановление решений разностных уравнений

Рассмотрим процесс распространения тепла в бесконечном стержне, описываемый дискретной моделью, а именно, неявной разностной схемой

$$\frac{u_{s+1,j}-u_{sj}}{\tau}=\frac{u_{s+1,j+1}-2u_{s+1,j}+u_{s+1,j-1}}{h^2}. \tag{5.1}$$

Здесь τ и h – положительные числа, $(s,j)\in\mathbb{Z}_+\times\mathbb{Z}$, $u_{s,j}$ – температура стержня в момент времени $s\tau$ в точке jh.

Обозначим через $l_{2,h}$ множество векторов $x=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, для которых

$$\|x\|_{l_{2,h}}=\biggl(h\sum_{j\in\mathbb{Z}}|x_j|^2\biggr)^{1/2}<\infty, \qquad h>0.$$

Предположим, что приближенно измерена температура стержня в нулевой момент времени и в момент времени $n\tau$, т. е. приближенно известны векторы $u_0=\{u_{0,j}\}$ и $u_n=\{u_{n,j}\}$, или, точнее говоря, нам известны векторы $y_1,y_2\in l_{2,h}$ такие, что

$$\|u_0-y_1\|_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1, \qquad \|u_n-y_2\|_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2,$$

где $\delta_j>0$, $j=1,2$. По этой информации требуется восстановить вектор $u_m=\{u_{m,j}\}$, где $0<m<n$, т. е. восстановить значение температуры стержня в момент времени $m\tau$.

Тем самым мы снова приходим к задаче (2.1), в которой $X=Y_0=Y_1=Y_2=l_2$, $p=2$, $J=\varnothing$, а операторы $I_j\colon l_{2,h}\to l_{2,h}$, $j=0,1,2$, определены равенствами

$$I_0u_0=u_m, \qquad I_1u_0=u_0, \qquad I_2u_0=u_n.$$

Преобразованием Фурье последовательности $x=\{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}\in l_{2,h}$ назовем функцию

$$Fx(\xi)=h\sum_{j\in\mathbb{Z}}x_je^{-ijh\xi}.$$

Несложно убедиться, что $Fx(\,\cdot\,)\in L_2([-\pi/h,\pi/h])$ и

$$\|Fx(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=2\pi\|x\|^2_{l_{2,h}}. \tag{5.2}$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям равенства (5.1):

$$h\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{u_{s+1,j}-u_{sj}}{\tau}\,e^{-ijh\xi}=h\sum_{j\in\mathbb{Z}}\frac{u_{s+1,j+1}-2u_{s+1,j}+u_{s+1,j-1}}{h^2}\,e^{-ijh\xi}.$$

Отсюда

$$\frac{U_{s+1}(\xi)-U_s(\xi)}{\tau}=\frac{e^{ih\xi}-2+e^{-ih\xi}}{h^2}U_{s+1}(\xi),$$

где

$$U_s(\xi)=h\sum_{j\in\mathbb{Z}}u_{s,j}e^{-ijh\xi}.$$

Тем самым

$$U_{s+1}(\xi)=\left(1+\frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{h\xi}{2}\right)^{-1}U_s(\xi).$$

Следовательно,

$$U_s(\xi)=\Lambda^s(\xi)U_0(\xi),\quad \Lambda(\xi)=\left(1+\frac{4\tau}{h^2}\sin^2\frac{h\xi}{2}\right)^{-1}.$$

Положим $a=(1+4\tau/h^2)^{-1}$,

$$\lambda_1=\begin{cases}0, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in(0,a^n],\\ \left(1-\dfrac{m}{n}\right)\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2m/n}, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in(a^n,1),\\ 1, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in[1,+\infty),\end{cases}$$

$$\lambda_2=\begin{cases}a^{2(m-n)}, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in(0,a^n],\\ \dfrac{m}{n}\left(\dfrac{\delta_2}{\delta_1}\right)^{2(m/n-1)}, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in(a^n,1),\\ 0, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in[1,+\infty).\end{cases}$$

Теорема 5. *Имеет место равенство*

$$E_{\varnothing}(I,\delta)=\sqrt{\lambda_1\delta_1^2+\lambda_2\delta_2^2}.$$

Для всех $\alpha(\,\cdot\,)$, удовлетворяющих при $\delta_2/\delta_1\in(a^n,1)$ условию

$$\Lambda^{2m}(\xi)\left(\frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1}+\Lambda^{-2n}(\xi)\frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2}\right)\leqslant 1, \tag{5.3}$$

а в остальных случаях равенству

$$\alpha(\xi)=\begin{cases}1, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in(0,a^n],\\ 0, & \dfrac{\delta_2}{\delta_1}\in[1,+\infty),\end{cases}$$

методы

$$\widehat{\varphi}(y_1,y_2)=F^{-1}\big(\Lambda^m(\,\cdot\,)(1-\alpha(\,\cdot\,))Fy_1(\,\cdot\,)+\Lambda^{m-n}(\,\cdot\,)\alpha(\,\cdot\,)Fy_2(\,\cdot\,)\big)$$

являются оптимальными.

Доказательство. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\to\max,\qquad \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2,\qquad \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2.$$

Переходя к образам Фурье, получим следующую задачу:

$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\,\cdot\,)U_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} \to \max, \qquad \frac{1}{2\pi}\|U_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} \leqslant \delta_1^2,$$
$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\,\cdot\,)U_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} \leqslant \delta_2^2. \tag{5.4}$$

Предположим, что $\delta_2/\delta_1 \in (a^n, 1)$. Функция $\Lambda(\xi)$ при $\xi \in [0, \pi/h]$ монотонно убывает от 1 до a. Поэтому найдется $\widehat{\xi} \in (0, \pi/h)$ такое, что $\Lambda^n(\widehat{\xi}) = \delta_2/\delta_1$. Положим для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\pi}{\varepsilon}}\,\delta_1, & \xi \in (\widehat{\xi}, \widehat{\xi}+\varepsilon), \\ 0, & \xi \notin (\widehat{\xi}, \widehat{\xi}+\varepsilon). \end{cases}$$

Имеем

$$\frac{1}{2\pi}\|\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \delta_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\,\cdot\,)\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_{\widehat{\xi}}^{\widehat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2n}(\xi)\,d\xi \leqslant \delta_1^2\Lambda^{2n}(\widehat{\xi}) = \delta_2^2.$$

Тем самым функция $\widehat{U}_0(\,\cdot\,)$ является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}} \|u_m\|^2_{l_{2,h}} \geqslant \frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\,\cdot\,)\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_{\widehat{\xi}}^{\widehat{\xi}+\varepsilon} \Lambda^{2m}(\xi)\,d\xi$$
$$= \delta_1^2\Lambda^{2m}(c),$$

где $c \in [\widehat{\xi}, \widehat{\xi}+\varepsilon]$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}} \|u_m\|^2_{l_{2,h}} \geqslant \delta_1^2\Lambda^{2m}(\widehat{\xi}) = \delta_1^{2(1-m/n)}\delta_2^{2m/n} = \lambda_1\delta_1^2 + \lambda_2\delta_2^2.$$

Предположим, что $\delta_2/\delta_1 \in (0, a^n]$. Положим для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\widehat{U}_0(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2\pi}{\varepsilon}}\,\dfrac{\delta_2}{\Lambda^n(\xi)}, & \xi \in \left(\dfrac{\pi}{h}-\varepsilon, \dfrac{\pi}{h}\right], \\ 0, & \xi \notin \left(\dfrac{\pi}{h}-\varepsilon, \dfrac{\pi}{h}\right]. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\,\cdot\,)\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \delta_2^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi}\|\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])} = \frac{\delta_2^2}{\varepsilon}\int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h} \Lambda^{-2n}(\xi)\,d\xi \leqslant \delta_2^2 a^{-2n} \leqslant \delta_1^2.$$

Тем самым функция $\widehat{U}_0(\,\cdot\,)$ является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\,\cdot\,)\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}$$

$$=\frac{\delta_2^2}{\varepsilon}\int_{\pi/h-\varepsilon}^{\pi/h}\Lambda^{2(m-n)}(\xi)\,d\xi=\delta_2^2\Lambda^{2(m-n)}(c),$$

где $c\in[\pi/h-\varepsilon,\pi/h]$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\delta_2^2a^{2(m-n)}=\lambda_2\delta_2^2.$$

Если, наконец, $\delta_2/\delta_1\in[1,+\infty)$, положим для достаточно малых $\varepsilon>0$

$$\widehat{U}_0(\xi)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2\pi}{\varepsilon}}\delta_1, & \xi\in(0,\varepsilon),\\ 0, & \xi\notin(0,\varepsilon).\end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\|\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\delta_1^2,$$

а

$$\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^n(\,\cdot\,)\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\Lambda^{2n}(\xi)\,d\xi\leqslant\delta_1^2\leqslant\delta_2^2.$$

Таким образом, функция $\widehat{U}_0(\,\cdot\,)$ является допустимой в задаче (5.4). Следовательно,

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\frac{1}{2\pi}\|\Lambda^m(\,\cdot\,)\widehat{U}_0(\,\cdot\,)\|^2_{L_2([-\pi/h,\pi/h])}=\frac{\delta_1^2}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon\Lambda^{2m}(\xi)\,d\xi=\delta_1^2\Lambda^{2m}(c),$$

где $c\in[0,\varepsilon]$. Переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем

$$\sup_{\substack{u_0\in l_{2,h}\\ \|u_0\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1^2\\ \|u_n\|^2_{l_{2,h}}\leqslant\delta_2^2}}\|u_m\|^2_{l_{2,h}}\geqslant\delta_1^2.$$

Займемся теперь оценкой (2.3). Пусть $\delta_2/\delta_1\in(a^n,1)$. Определим операторы $S_j\colon l_{2,h}\to l_{2,h}$, $j=1,2$, так, чтобы

$$F(S_1u)(\,\cdot\,)=\Lambda^m(\,\cdot\,)(1-\alpha(\,\cdot\,))Fu(\,\cdot\,),\qquad F(S_2u)(\,\cdot\,)=\Lambda^{m-n}(\,\cdot\,)\alpha(\,\cdot\,)Fu(\,\cdot\,).$$

Нетрудно убедиться, что для всех $u_0\in l_{2,h}$

$$F((I_0-S_1I_1-S_2I_2)u)(\,\cdot\,)\equiv 0.$$

Поэтому $I_0=S_1I_1+S_2I_2$. В силу (5.2) получаем

$$\|S_1z_1+S_2z_2\|^2_{l_{2,h}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}\Lambda^{2m}(\xi)|(1-\alpha(\xi))Fz_1(\xi)+\Lambda^{-n}(\xi)\alpha(\xi)Fz_2(\xi)|^2\,d\xi.$$

Из неравенства Коши–Буняковского вытекает, что

$$\Lambda^{2m}(\xi)|(1-\alpha(\xi))Fz_1(\xi)+\Lambda^{-n}\alpha(\xi)Fz_2(\xi)|^2 \leqslant \Omega(\xi)(\lambda_1|Fz_1(\xi)|^2+\lambda_2|Fz_2(\xi)|^2),$$

где

$$\Omega(\xi)=\Lambda^{2m}(\xi)\biggl(\frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1}+\Lambda^{-2n}(\xi)\frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2}\biggr).$$

В силу условия (5.3) получаем

$$\begin{aligned}\|S_1z_1+S_2z_2\|^2_{l_{2,h}} &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}\bigl(\lambda_1|Fz_1(\xi)|^2+\lambda_2|Fz_2(\xi)|^2\bigr)\,d\xi\\ &=\lambda_1\|z_1\|^2_{l_{2,h}}+\lambda_2\|z_2\|^2_{l_{2,h}}.\end{aligned}$$

Из теоремы 1 вытекает, что в рассматриваемом случае методы

$$\widehat{\varphi}(y_1,y_2)=S_1y_1+S_2y_2$$

являются оптимальными, а

$$E_{\varnothing}(I,\delta)=\sqrt{\lambda_1\delta_1^2+\lambda_2\delta_2^2}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\delta_2/\delta_1 \in (0,a^n]$. Определим оператор $S_2\colon l_{2,h}\to l_{2,h}$ так, чтобы

$$F(S_2u)(\,\cdot\,)=\Lambda^{m-n}(\,\cdot\,)Fu(\,\cdot\,).$$

Так как

$$F((I_0-S_2I_2)u_0)(\xi)\equiv 0,$$

то $I_0=S_2I_2$. Кроме того,

$$\|S_2z_2\|^2_{l_{2,h}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}\Lambda^{2(m-n)}(\xi)|Fz_2(\xi)|^2\,d\xi\leqslant a^{2(m-n)}\|z_2\|^2_{l_{2,h}}.$$

Из теоремы 1 вытекает, что в рассматриваемом случае метод

$$\widehat{\varphi}(y_1,y_2)=S_2y_2$$

является оптимальным, а

$$E_{\varnothing}(I,\delta)=a^{m-n}\delta_2.$$

Наконец, если $\delta_2\geqslant\delta_1$, определим оператор $S_1\colon l_{2,h}\to l_{2,h}$ так, чтобы

$$F(S_1u)(\,\cdot\,)=\Lambda^{m}(\,\cdot\,)Fu(\,\cdot\,).$$

Тогда $I_0=S_1I_1$ и

$$\|S_1z_1\|^2_{l_{2,h}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/h}^{\pi/h}\Lambda^{2m}(\xi)|Fz_1(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\|z_1\|^2_{l_{2,h}}.$$

Из теоремы 1 следует, что метод

$$\widehat{\varphi}(y_1,y_2)=S_1y_1$$

является оптимальным, а

$$E_{\varnothing}(I,\delta)=\delta_1.$$

Докажем, что при $\delta_2/\delta_1\in(a^n,1)$ множество функций $\alpha(\,\cdot\,)$, удовлетворяющих условию (5.3), не пусто. Рассмотрим вогнутую функцию

$$y=x^{m/n},\qquad x\geqslant 0. \tag{5.5}$$

Проведем касательную к графику этой функции в точке $x_0>0$. Нетрудно убедиться, что касательная будет иметь вид $y=\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2x$, где

$$\widehat{\lambda}_1=\left(1-\frac{m}{n}\right)x_0^{m/n},\qquad \widehat{\lambda}_2=\frac{m}{n}x_0^{m/n-1}.$$

В силу вогнутости кривой (5.5) для всех $x\geqslant 0$ будет выполняться неравенство

$$x^{m/n}\leqslant\widehat{\lambda}_1+\widehat{\lambda}_2x.$$

Положим

$$x=\Lambda^{2n}(\xi),\qquad x_0=\left(\frac{\delta_2}{\delta_1}\right)^2.$$

Тогда $\widehat{\lambda}_j=\lambda_j$, $j=1,2$, и для всех $\xi\in[-\pi/h,\pi/h]$ выполняется неравенство

$$\Lambda^{2m}(\xi)\leqslant\lambda_1+\lambda_2\Lambda^{2n}(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1+\lambda_2\Lambda^{2n}(\xi)}\leqslant 1.$$

Положив

$$\alpha(\xi)=\frac{\lambda_2\Lambda^{2n}(\xi)}{\lambda_1+\lambda_2\Lambda^{2n}(\xi)},$$

получаем

$$\Lambda^{2m}(\xi)\left(\frac{|1-\alpha(\xi)|^2}{\lambda_1}+\Lambda^{-2n}(\xi)\frac{|\alpha(\xi)|^2}{\lambda_2}\right)=\frac{\Lambda^{2m}(\xi)}{\lambda_1+\lambda_2\Lambda^{2n}(\xi)}\leqslant 1.$$

Теорема доказана.

Если рассмотреть задачу об оптимальном восстановлении решения в момент времени $m\tau$ по неточно заданному решению в момент времени $n\tau$ на классе

$$W=\{u_0\in l_{2,h}\colon \|u_0\|_{l_{2,h}}\leqslant\delta_1\},$$

то из той же теоремы 1 будет следовать, что методы $\widehat{\varphi}(0,y_2)(\,\cdot\,)$ будут оптимальными.

Отметим, что для непрерывной модели распространения тепла результат, полученный в работе [25] для $t_1=0$, $t_2=T$ $(n=2)$ и промежуточной точки τ_0, в которой требуется восстановить распределение температуры, в одномерном случае совпадет с предельным значением погрешности восстановления и одним из методов, построенных в теореме 5 при $h\to 0$ и $\tau\to 0$ (в этом случае надо положить $a=0$).

Отметим также, что задача, аналогичная рассмотренной, когда процесс распространения тепла происходит на окружности, рассматривалась в работе [22].

Список литературы

1. С. Ф. Смоляк, *Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них*, Дисс. … канд. физ.-матем. наук, МГУ, М., 1965, 152 с.
2. С. М. Никольский, “К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами”, *УМН*, **5**:2(36) (1950), 165–177.
3. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin, “A survey of optimal recovery”, *Optimal estimation in approximation theory* (Freudenstadt, 1976), Plenum, New York, 1977, 1–54.
4. A. A. Melkman, C. A. Micchelli, “Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**:1 (1979), 87–105.
5. Дж. Трауб, Х. Вожьняковский, *Общая теория оптимальных алгоритмов*, Мир, М., 1983, 384 с.; пер. с англ.: J. F. Traub, H. Woźniakowski, *A general theory of optimal algorithms*, ACM Monogr. Ser., Academic Press, Inc., New York–London, 1980, xiv+341 pp.
6. В. В. Арестов, “Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи”, *Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций* (Душанбе, 1986), Тр. МИАН СССР, **189**, Наука, М., 1989, 3–20; англ. пер.: V. V. Arestov, “Optimal recovery of operators and related problems”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **189**:4 (1990), 1–20.
7. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным”, *Матем. заметки*, **50**:6 (1991), 85–93; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functionals based on inaccurate data”, *Math. Notes*, **50**:6 (1991), 1274–1279.
8. L. Plaskota, *Noisy information and computational complexity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, xii+308 pp.
9. K. Yu. Osipenko, *Optimal recovery of analytic functions*, Nova Science Publ., Inc., Huntington, NY, 2000, 220 pp.
10. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, *Выпуклый анализ и его приложения*, 2-е изд., Эдиториал УРСС, М., 2003, 176 с.; англ. пер. 1-го изд.: G. G. Magaril-Il'yaev, V. M. Tikhomirov, *Convex analysis*: *theory and applications*, rev. by the authors, Transl. Math. Monogr., **222**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, viii+183 pp.
11. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по коэффициентам Фурье, заданным с погрешностью”, *Матем. сб.*, **193**:3 (2002), 79–100; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from Fourier coefficients prescribed with an error”, *Sb. Math.*, **193**:3 (2002), 387–407.
12. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных”, *Функц. анализ и его прил.*, **37**:3 (2003), 51–64; англ. пер.: G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives”, *Funct. Anal. Appl.*, **37**:3 (2003), 203–214.
13. К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа для аналитических функций из пространств Харди–Соболева”, *Матем. сб.*, **197**:3 (2006), 15–34; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “The Hardy–Littlewood–Pólya inequality for analytic functions in Hardy–Sobolev spaces”, *Sb. Math.*, **197**:3 (2006), 315–334.
14. К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление линейных операторов в неевклидовых метриках”, *Матем. сб.*, **205**:10 (2014), 77–106; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of linear operators in non-Euclidean metrics”, *Sb. Math.*, **205**:10 (2014), 1442–1472.
15. K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of operators and multidimensional Carlson type inequalities”, *J. Complexity*, **32**:1 (2016), 53–73.

16. В. В. Арестов, “Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами”, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, №4, 2018, 34–56; англ. пер.: V. V. Arestov, “Best uniform approximation of the differentiation operator by operators bounded in the space L_2”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **308**, Suppl. 1 (2020), 9–30.
17. V. V. Arestov, “Best approximation of a differentiation operator on the set of smooth functions with exactly or approximately given Fourier transform”, *Mathematical optimization theory and operations research* (*MOTOR* 2019), Lecture Notes in Comput. Sci., **11548**, Springer, Cham, 2019, 434–448.
18. V. Arestov, “Uniform approximation of differentiation operators by bounded linear operators in the space L_r”, *Anal. Math.*, **46**:3 (2020), 425–445.
19. К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление в весовых пространствах с однородными весами”, *Матем. сб.*, **213**:3 (2022), 111–138; англ. пер.: K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery in weighted spaces with homogeneous weights”, *Sb. Math.*, **213**:3 (2022), 385–411.
20. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру”, *Функц. анализ и его прил.*, **44**:3 (2010), 76–79; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “On optimal harmonic synthesis from inaccurate spectral data”, *Funct. Anal. Appl.*, **44**:3 (2010), 223–225.
21. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Неравенство Харди–Литтлвуда–Полиа и восстановление производных по неточной информации”, *Докл. РАН*, **438**:3 (2011), 300–302; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Hardy–Littlewood–Paley inequality and recovery of derivatives from inaccurate data”, *Dokl. Math.*, **83**:3 (2011), 337–339.
22. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Об оптимальном восстановлении решений разностных уравнений по неточным измерениям”, *Проблемы матем. анализа*, **69** (2013), 47–54; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “On optimal recovery of solutions to difference equations from inaccurate data”, *J. Math. Sci.* (*N. Y.*), **189**:4 (2013), 596–603.
23. Г. Г. Магарил-Ильяев, В. М. Тихомиров, “О неравенствах для производных колмогоровского типа”, *Матем. сб.*, **188**:12 (1997), 73–106; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, V. M. Tikhomirov, “Kolmogorov-type inequalities for derivatives”, *Sb. Math.*, **188**:12 (1997), 1799–1832.
24. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир, М., 1974, 336 с.; пер. с англ.: E. M. Stein, G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*, Princeton Math. Ser., **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1971, x+297 pp.
25. Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко, “Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям”, *Матем. сб.*, **200**:5 (2009), 37–54; англ. пер.: G. G. Magaril-Il’yaev, K. Yu. Osipenko, “Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data”, *Sb. Math.*, **200**:5 (2009), 665–682.

Константин Юрьевич Осипенко
(Konstantin Yu. Osipenko)
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет;
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: kosipenko@yahoo.com

Поступило в редакцию
03.06.2022