Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

А. В. Жемерев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Часть 2

Методическое пособие для студентов 1-го курса 2-го факультета МАТИ

Москва 2003 г.

Оглавление

1. Основные теоремы дифференциального исчисления

1.1. Теорема Ферма

Точки, где достигается наибольшее или наименьшее значение функции называются соответственно точками максимума или минимума функции.

Определение 1. *Точка x_0 называется точкой* **максимума** *функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$* (см. рис. 1).

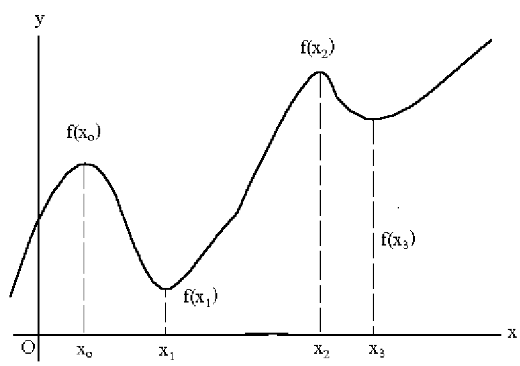

Рис. 1.

Определение 2. *Точка x_1 называется точкой* **минимума** *функции $f(x)$, если в некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_1)$* (см. рис. 1).

Значения функции в точках x_0 и x_1 называются соответственно *максимумом и минимумом функции.* Максимум и минимум функции объединяются общим названием *экстремума функции.*

Экстремум функции часто называют *локальным* экстремумом, подчеркивая тем самым,что понятие экстремума связано лишь с достаточно малой окрестностью точки x_0. Так что на одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может случиться так, что минимум в одной точке больше максимума в другой, например, на рис.1 $f_{min}(x_3) > f_{max}(x_0)$. Наличие максимума (или минимума) в отдельной точке промежутка X вовсе не означает, что в этой точке функция

$f(x)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение на этом промежутке (или, как говорят имеет глобальный максимум (минимум)).

Если дифференцируемая на промежутке X функция $y = f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения в внутренней точке x_0, то тогда производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке X и в точке $x_0 \in X$ принимает наименьшее значение (см. рис. 2).

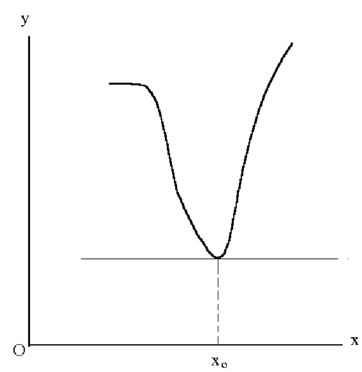

Рис. 2.

Тогда

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$$

если $x_0 + \Delta x \in X$ и, следовательно

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$$

при достаточно малых Δx и независимо от знака Δx.

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \text{ при } \Delta x > 0 \text{ (справа от } x_0\text{);}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0 \text{ при } \Delta x < 0 \text{ (слева от } x_0\text{).}$$

Переходя к пределу справа и слева получим

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0 \text{ и } \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0.$$

Так как функция дифференцируема на промежутке X, то пределы справа и слева равны

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отсюда $f'(x_0) = 0$.

Аналогично доказывается для максимума.

Теорему Ферма часто называют необходимым условием экстремума **дифференцируемой** функции.

Геометрический смысл теоремы Ферма: *в точке экстремума, достигаемого внутри промежутка X, касательная к графику функции параллельна оси абсцисс.*

1.2. Теорема Ролля

Пусть функция $f(x)$

1) определена и непрерывна на промежутке $[a, b]$;

2) существует конечная производная $f'(x)$, по крайней мере на интервале (a, b);

3) на концах промежутка функция $f(x)$ принимает равные значения: $f(a) = f(b)$.

Тогда между a и b найдется такая точка, c $(a < c < b)$, что $f'(c) = 0$.

Функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, поэтому по второй теореме Веейштрасса $f(x)$ достигает своего наименьшего m и M наибольшего значения (см рис. 3).

Рассмотрим 2 случая:

1. $M = m$. Тогда $f(x)$ сохраняет постоянное значение на $[a, b]$. Действительно, $m \leq f(x) \geq M$ и поэтому $f(x) = m = M$ на всем промежутке. Поэтому $f'(x) = 0$ на всём промежутке, а в качестве c можно взять любую точку из (a, b).

2. $M > m$. Известно, что оба этих значения достигаются, но так как $f(a) = f(b)$, то хотя бы одно значение достигается в точке c между a и b. В таком случае из теоремы Ферма следует, что производная в $f'(c)$ этой точке обращается в ноль.

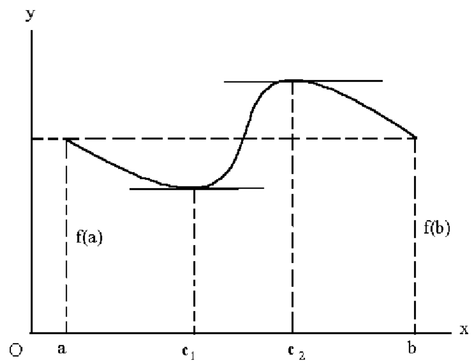

Рис. 3.

Геометрическая интерпретация теоремы Ролля означает следующее: *если крайние ординаты кривой $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равны, то на кривой найдется хотя бы одна точка, где касательная параллельна оси Ox. В этой точке производная равна нулю.*

Если $f(a) = f(b) = 0$, то теорему Ролля можно сформулировать так: *между двумя последовательными нулями дифференцируемой функции имеется хотя бы один нуль производной.*

1.3. Теорема Лагранжа

Пусть

1) $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) существует конечная производная $f'(x)$, по крайней мере, на интервале (a,b).

Тогда между a и b найдётся точка c $(a < c < b)$, что для неё выполняется равенство

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

Введём вспомогательную функцию, определив ее в промежутке $[a,b]$ равенством:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a).$$

Эта функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Действительно $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. В интервале (a, b) имеет конечную производную, равную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Кроме того, $F(a) = F(b) = 0$, то есть $F(x)$ принимает равные значения на концах $[a, b]$.

Применим к $F(x)$ теорему Ролля. Тогда на интервале (a, b) найдётся точка c, где F'(c)=0. Таким образом

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

откуда

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Доказанную теорему называют также теоремой о среднем значении. Отметим, что теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Доказанная формула

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c);$$

или

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

носит название формулы Лагранжа или формула конечных приращений.

Рассмотрим механический и геометрический смысл теоремы Лагранжа.

Приращение $f(b) - f(a)$ – изменение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, а $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ – средняя скорость изменения функции на этом отрезке. Значения производной $f(x)$ в каждой точке – это "мгновенная" скорость изменения функции $f(x)$. Таким образом, теорема утверждает: *существует хотя бы одна точка внутри отрезка такая, что скорость изменения функции в ней равна средней скорости изменения функции на этом отрезке.*

Геометрическая интерпретация теорема Лагранжа (см. рис. 4) следующая: *на кривой AB всегда найдется, по крайней мере, одна точка M, в которой касательная параллельна хорде AB.*

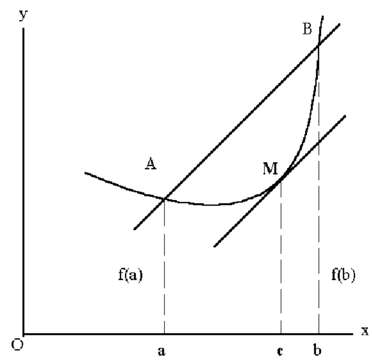

Рис. 4.

1.4. Теорема Коши

Пусть

1) функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a, b]$;

2) существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, по крайней мере, на интервале (a, b);

3) $g'(x)$ не равно нулю на интервале (a, b).

Тогда между a и b найдётся такая точка c ($a < c < b$), что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Эта формула носит название формулы Коши.

Отметим, что знаменатель левой части равенства не равен нулю $g(b) \neq g(a)$. Если бы $g(b) = g(a)$, то по теореме Ролля производная $g'(x)$ в некоторой внутренней точке обращалась в нуль, что противоречит 3-му условию теоремы. Значит $g(b) \neq g(a)$.

Введём вспомогательную функцию, определив ее в промежутке $[a, b]$

равенством:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot [g(x) - g(a)].$$

Эта функция $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Действительно $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, так как непрерывны функции $f(x)$ и $g(x)$. В интервале (a, b) функция $F(x)$ имеет производную, равную

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(x).$$

Кроме того, $F(a) = F(b) = 0$, то есть $F(x)$ принимает равные значения на концах $[a, b]$.

Применим к $F(x)$ теорему Ролля. Тогда на интервале (a, b) найдётся точка c, где F'(c)=0. Таким образом

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(c) = 0,$$

или

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Разделив на $g'(c)$ (это возможно, так как $g'(c) \neq 0$), получаем требуемое равенство.

Отметим, что теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши. Для формулы конечных приращений в формуле Коши следует положить $g(x) = x$.

Поэтому теорему Коши называют обобщенной теоремой о среднем значении.

2. Возрастание и убывание функций

Теорема (достаточное условие возрастания функции). *Если производная дифференцируемой функции положительна $f'(x) > 0)$ внутри некоторого промежутка X, то она возрастает на этом промежутке.*

Рассмотрим два значения x_1 и x_2 на данном промежутке X. Пусть $x_2 > x_1$, $x_1, x_2 \in X$. Докажем, что $f(x_2) > f(x_1)$.

Для функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$ выполняются условия теоремы Лагранжа, поэтому

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1),$$

где $x_1 < \xi < x_2$, т.е. ξ принадлежит промежутку, на котором производная положительна, откуда следует, что правая часть последнего равенства положительна. Отсюда $f(x_2) - f(x_1) > 0$ и

$$f(x_2) > f(x_1).$$

Аналогично доказывается другая теорема.

Теорема (достаточное условие убывания функции). *Если производная дифференцируемой функции отрицательна* ($f'(x) < 0$) *внутри некоторого промежутка* X, *то она убывает на этом промежутке.*

Пример. Исследовать на возрастание и убывание функцию $y = x^2 - 6x + 2$.

$y' = 2x - 6$, $y' > 0$ при $x > 3$ $y' < 0$ при $x < 3$

Поэтому функция убывает на интервале $(-\infty, 3)$ и возрастает на интервале $(3, \infty)$.

Заметим, что если производная функции $f'(x) \geq 0$, то она монотонно возрастает а если производная функции $f'(x) \leq 0$, то она монотонно убывает.

3. Правило Лопиталя

Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует в указанном смысле. Итак, если имеется неопределенность

$$\left[\frac{0}{0}\right] \text{ или } \left[\frac{\infty}{\infty}\right],$$

то

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$$

или
$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f'(x)}{g,(x)}\right].$$

Рассмотрим правило Лопиталя для неопределённости $\left[\frac{0}{0}\right]$ при $x\to x_0$.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, а также их производные непрерывны в окрестности точки x_0. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=0;\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)=0.$$

Запишем
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)},$$
где x лежит в окрестности точки x_0.

Используем теорему Лагранжа

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi_1)(x-x_0);$$

$$g(x)-g(x_0)=g'(\xi_2)(x-x_0),$$

где $x<\xi_1<x_0$; $x<\xi_2<x_0$. Поэтому

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi_1)(x-x_0)}{g'(\xi_2)(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}.$$

При $x\to x_0$ в силу непрерывности $f'(x)$ и $g'(x)$ имеем $f'(\xi_1)\to f'(x_0)$ и $g'(\xi_2)\to g'(x_0)$.

Отсюда получаем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Рассмотрим примеры на использование правила Лопиталя.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x'}{(e^x - 1)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^x} = 1.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Еще раз применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - e^{-x})'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1.$$

Не всегда правило Лопиталя позволяет найти предел.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$.

Это неопределенность типа $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Для нахождения предела используем правило Лопиталя. Имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}.$$

Но этот предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$$

не существует.

На самом деле нахождение предела $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x + \sin x}{x - \sin x}$ следует производить следующим способом.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \dfrac{\sin x}{x}}{1 - \dfrac{\sin x}{x}} = 1,$$

так как

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

4. Формула Тейлора

4.1. Формула Тейлора для многочлена

Пусть имеется многочлен $p(x)$ степени n;

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_n(x - x_0)^n.$$

Продифференцируем $p(x)$ n раз:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \dots + n \cdot a_n(x - x_0)^{n-1};$$
$$p''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + \dots + (n-1)n \cdot a_n(x - x_0)^{n-2};$$
$$p'''(x) = 2 \cdot 3 \cdot a_3 + \dots + (n-2)(n-1)n \cdot a_n(x - x_0)^{n-3};$$
$$p^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot a_n.$$

Положим в этих формулах $x = x_0$. Получим

$$a_0 = p(x_0); a_1 = \frac{p'(x_0)}{1!}; a_2 = \frac{p''(x_0)}{2!}; a_3 = \frac{p'''(x_0)}{3!}; \dots ; a_n = \frac{p^n(x_0)}{n!}.$$

Таким образом коэффициенты разложения выражаются через значения самого многочлена и его производных при $x = x_0$. Перепишем

$$p(x) = p(x_0) + \frac{p'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{p''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Полученная формула носит название формулы Тейлора для многочлена.

4.2. Формула Тейлора для произвольной функции

Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$, вообще говоря, не являющуюся многочленом. Предположим, что для нее в некоторой точке x_0 существуют производные всех порядков, до n включительно.

Это означает, что функция определена и имеет производные всех порядков до $(n-1)$ включительно в некоторой окрестности точки x_0 $x \in (a, b)$, а в самой точке x_0 производную n-ного порядка.

По аналогии с формулой Тейлора для многочлена запишем следующий многочлен

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Многочлен $p(x)$ есть некоторое приближение к функции $f(x)$.

Рассмотрим разность

$$r(x) = f(x) - p(x).$$

По свойству многочлена $p(x)$ для функции $r(x)$ соблюдаются равенства

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^n(x_0).$$

Докажем, что если для какой-либо функции $r(x)$, имеющей в точке x_0 производные до $n-$ного порядка выполняются эти условия, то имеет место соотношение:

$$r(x) = o((x - x_0)^n),$$

то есть

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Будем использовать метод математической индукции.

По методу математической индукции при $n = 1$ это утверждение имеет вид: если функция $r(x)$, имеющая в точке x_0 первую производную, удовлетворяет условиям:

$$r(x_0) = r'(x_0) = 0,$$

то

$$r(x) = o(x - x_0).$$

Действительно

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{r(x) - r(x_0)}{(x - x_0)} = r'(x_0) = 0.$$

Предположим теперь, что сформулированное утверждение справедливо при $n \geq 1$. Докажем, что оно остается верным и при замене n на $n+1$, то есть, что если для какой-либо функции $r(x)$, имеющей в точке x_0 производные до $n+1$-го порядка включительно, выполняются условия

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^n(x_0) = r^{n+1}(x_0),$$

то

$$r(x) = o((x - x_0)^{n+1}).$$

Из этих условий следует, что функция $r'(x)$ удовлетворяет условиям

$$r(x_0) = r'(x_0) = r''(x_0) = \cdots = r^n(x_0),$$

а значит для нее по предположенному уже имеем

$$r'(x) = o((x - x_0)^n).$$

По формуле конечных приращений (Лагранжа)

$$r(x) = r(x) - r(x_0) = r'(c)(x - x_0),$$

где c находится между x и x_0. Так как

$$|c - x_0| < |x - x_0|,$$

то

$$r'(c) = o((c - x_0)^n) = o((x - x_o)^n)$$

и

$$r(x) = o((x - x_0)^{n+1}).$$

Получаем формулу, которая называется формулой Тейлора с дополнительным членом $r(x)$ в форме Пеано

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r(x),$$

где $r(x) = o((x - x_0)^n)$.

При $x_0 = 0$ полученная формула принимает вид:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + r(x).$$

К этому частному случаю всегда можно свести дело, взяв $x - x_0$ за новую независимую переменную.

Рассмотрим в виде примера некоторые конкретные разложения по этой формуле для элементарных функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, x^m, $\ln x$.

4.3. Представление по формуле Тейлора основных элементарных функций

Чтобы найти формулу Тейлора для некоторой функции, необходимо найти n производных этой функции

1. Найдем формулу Тейлора для экспоненты $f(x) = e^x$. Несложно получить, что $f^{(k)}(x) = e^x$, а отсюда следует, что $f(0) = f^{(k)}(0) = 1$.

Поэтому для разложения экспоненты получаем следующий ряд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

2. Найдем формулу Тейлора для синуса $f(x) = \sin x$.

Для первой производной $f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$. Аналогично для $k-$той производной получаем

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда получаем,

$$f(0) = 0,$$

для четной производной

$$f^{(2m)}(0) = \sin(m\pi) = 0,$$

а для нечетной

$$f^{(2m-1)}(0) = \sin(m\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^{m-1},$$

где $m = 1, 2, 3, \cdots$

Для разложения $\sin x$ получаем

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + o(x^{2m}).$$

3. Найдем формулу Тейлора для косинуса $f(x) = \cos x$.

Для первой производной $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \pi/2)$. Аналогично для $k-$той производной получаем

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k\frac{\pi}{2}\right).$$

Отсюда получаем
$$f(0) = 1;$$
для четной производной
$$f^{(2m)}(0) = \cos(m\pi) = (-1)^m;$$
а для нечетной
$$f^{(2m-1)}(0) = \cos(m\pi - \frac{\pi}{2}) = 0,$$
где $m = 1, 2, 3, \cdots$

Для разложения $\cos x$ получаем
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + o(x^{2m+1}).$$

4. Найдем разложение в ряд Тейлора степенной функцию $f(x) = x^m$, где $m \neq 0$ и не натуральное число. В этом случае при $x \to 0$ либо сама функция (если $m < 0$), либо ее производные (начиная с некоторого порядка при $n > m$ бесконечно возрастают. Следовательно, нельзя брать $x_0 = 0$. Возьмем $x_0 = 1$ и будем разлагать x^m по степеням $(x - 1)$. Для простоты, будем разлагать $f(x) = (1 + x)^m$ по степеням x.

Для $k-$той производной $f(x)$ получаем
$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\cdots(m-k+1)(1+x)^{m-k}.$$
Тогда значение функции и ее производных в нуле определяются выражениями:
$$f(0) = 1, f^{(k)}(0) = m(m-1)\cdots(m-k+1).$$

Итак, получаем для степенной функции $f(x) = (1 + x)^m$ следующее разложение
$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdots n}x^n + o(x^n).$$

Рассмотрим частные случаи этой формулы при $n = 2$ и $m = -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2);$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2);$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$

5. Найдем формулу Тейлора для натурального логарифма $f(x) = \ln x$. Так как логарифм стремится $\to -\infty$ при стремлении $x \to 0$, то будем разлагать по степеням x функцию $f(x) = \ln(1+x)$.

Для $k-$производной функции $\ln(1+x)$ нетрудно получить следующее выражение:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Тогда

$$f(0) = 1; f^{(k-1)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!.$$

С учетом полученных выражений для функции $f(x) = \ln(1+x)$ получаем следующее выражение:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n).$$

4.4. Остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

Недостаток ряда Тейлора с остаточным членом в форме Пеано в том, что нам сложно оценить погрешность приближения многочлена $p(x)$ к функции $f(x)$. Она говорит, что $r(x)$ есть $o((x-x_0)^n)$.

Существуют остаточные члены в иной форме. Наиболее известный из них остаточный член в форме Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

где $c \in (x_0, x)$.

Если $x_0 = 0$, то

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ где } 0 < \vartheta < 1.$$

С помощью этой формулы можно оценивать погрешность разложений.

Если $\left|f^{(n+1)}(\vartheta x)\right| < M$ при $0 < \vartheta < 1$, то погрешность разложения оценивается выражением:

$$|r_n(x)| \leq \frac{Mx^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Пример. Найти погрешность разложения экспоненты $f(x) = e^x$ по формуле Тейлора.

$$e^x \approx 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Тогда

$$r_n(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

При $x > 0$

$$|r_n(x)| \leq \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Подобные формулы позволяют оценивать абсолютную погрешность.

Например, мы хотим вычислить по формуле Тейлора экспоненту на отрезке $[0, 1]$ с использованием 5 членов разложения. Максимальная ошибка при этом не будет превышать

$$\frac{e^1 \cdot 1^{4+1}}{(4+1)!} = \frac{e}{5!} \approx 0.008.$$

Пример. Найти погрешность разложения синуса $f(x) = \sin x$ по формуле Тейлора.

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} \quad m \geq 1.$$

В этом случае

$$r_{2m}(x) = \frac{\sin\left[\vartheta x + (2m+1)\dfrac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}\, x^{2m+1} = (-1)^m \cos(\vartheta x) \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Отсюда

$$|r_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

В частности, если используем разложение

$$\sin x \approx x$$

(в этом случае $m = 1$), то для того, чтобы погрешность была меньше чем 0.001, можно брать

$$\frac{x^3}{6} < 0.001 \quad \text{или} \quad \mathrm{x} < 0.1817,$$

что в градусах составляет примерно 10^o. При использовании формулы

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$$

(в этом случае $m = 2$) для достижения той же точности можно брать

$$\frac{x^5}{120} < 0.001 \quad \text{или} \quad \mathrm{x} < 0.6544,$$

что в градусах составляет уже примерно 37^o.

Если ограничиться углами $x < 0.4129(\doteq 23^o$, то погрешность будет < 0.00001.

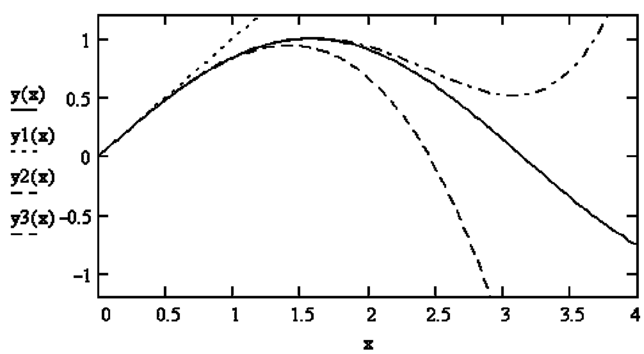

Рис. 5.

С увеличением числа членов разложения ряда Тейлора, он с все большей точностью и на большем протяжении воспроизводит исходную функцию. Это иллюстрируется на рис. 5, на котором представлен файл MathCad'a, где наряду с графиком функции $y = \sin x$ представлены графики многочленов

$$y1 = x,\ y2 = x - \frac{x^3}{6},\ y3 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

5. Экстремумы функций

5.1. Необходимое условие экстремума

Если в точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполняются условия теоремы Ферма, и следовательно, производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$. Но функция может иметь экстремум и в точках, в которых она не дифференцируема. Так, например, функция $y = |x|$ имеет экстремум (минимум) в точке $x = 0$, но не дифференцируема в ней. Функция $y = \sqrt[3]{x^2}$ также имеет в точке $x = 0$ минимум, а ее производная в этой точке бесконечна: $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$, $y'(0) = \infty$.

Поэтому необходимое условие экстремума может быть сформулировано следующим образом.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела экстремум в точке x_0, необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю $(f'(x_0) = 0)$ или не существовала.

Точки, в которых выполнено необходимое условие экстремума, называются *критическими* (или *стационарными*). Но *критическая точка не обязательно является точкой экстремума.*

Пример. Найти критические точки функции и убедиться в наличии или отсутствии экстремума в этих точках:

$$1. y = x^2 + 1; \quad 2. y = x^3 - 1.$$

1.$y' = 2x$. $y'(x) = 0$ при $x = 0$. В точке $x = 0$ функция $y = x^2 + 1$ имеет минимум.

2. $y' = 3x^2$. $y'(x) = 0$ при $x = 0$. В точке $x = 0$ функция $y = x^3 - 1$ не имеет экстремума. Функция $y = x^3 - 1$ возрастает на всей числовой оси.

Итак, для нахождения экстремумов функции требуется дополнительное исследование критических точек.

5.2. Первое достаточное условие экстремума

Теорема. *Если при переходе через точку x_0 производная дифференцируемой функции $y = f(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то точка*

x_0 есть точка максимума функции $y = f(x)$, а если с минуса на плюс, то – точка минимума.

Пусть производная меняет знак с плюса на минус, т.е. в некотором интервале (a, x_0) производная положительна ($f'(x) > 0$), а в некотором интервале (x_0, b) – отрицательна ($f'(x) < 0$) (см. рис. 6). Тогда в соответствии с достаточным условием монотонности функция $f(x)$ возрастает на интервале (a, x_0) и убывает на интервале (x_0, b).

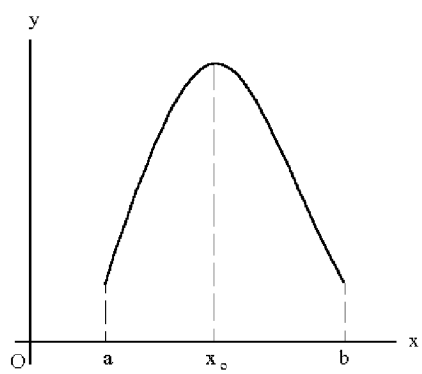

Рис. 6.

По определению возрастающей функции $f(x_0) \geq f(x)$ при всех $x \in (a, x_0)$, а по определению убывающей функции $f(x) \leq f(x_0)$ при всех $x \in (x_0, b)$, т.е. $f(x_0) \geq f(x)$ при всех $x \in (a, b)$, следовательно, x_0 – точка максимума функции $y = f(x)$.

Аналогично рассматривается случай, когда производная меняет знак с минуса на плюс.

Отметим, что дифференцируемость функции в самой точке x_0 не использовалась при доказательстве теоремы. На самом деле она и не требуется – достаточно, чтобы функция была непрерывна в точке x_0.

Если изменение знака производной не происходит, то экстремума нет.

5.3. Второе достаточное условие экстремума

Теорема. *Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ равна нулю в некоторой точке x_0, а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка мак-*

симума функции $y = f(x)$; если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 – точка максимума.

Пусть $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) > 0$. Это значит, что

$$f''(x) = (f'(x))' > 0$$

также и в некоторой окрестности точки x_0, т.е. $f'(x)$ возрастает на некотором интервале (a, b), содержащем точку x_0.

Но $f'(x_0) = 0$, следовательно, на интервале (a, x_0) $f'(x) < 0$, а на интервале (x_0, b) $f'(x) > 0$, т.е. $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, т.е. x_0 – точка минимума.

Аналогично рассматривается случай $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$.

5.4. Схема исследования функции $y = f(x)$ на экстремум

1. Найти производную $y' = f'(x)$.

2. Найти критические точки функции, в которых производная $f'(x) = 0$ или не существует.

3.1. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки и сделать вывод о наличии экстремумов функции.

Или

3.2. Найти вторую производную $f''(x)$ и определить ее знак в каждой критической точке.

4. Найти экстремумы (экстремальные значения) функции.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x(x-1)^3$.

1. $y' = (x-1)^3 + 3x(x-1)^2 = (x-1)^2(4x-1)$.

2. Критические точки $x_1 = 1$ и $x_2 = \dfrac{1}{4}$.

3. Изменение знака производной при переходе через точку x_1 не происходит, поэтому в этой точке нет экстремума.

$y'' = 2(x-1)(4x-1) + 4(x-1)^2 = 2[(x-1)(6x-3)]$. $y''(x_2) > 0$, поэтому в этой точке наблюдается минимум функции $y = x(x-1)^3$.

4. $y_{min} = y\left(\dfrac{1}{4}\right) = -\dfrac{27}{256}$.

5.5. Нахождение глобальных экстремумов функции

Под глобальными экстремумами функции, заданной на некотором промежутке X, понимается наибольшее и наименьшее значение функции, достигаемых на данном промежутке. Наибольшее или наименьшее значение функции может достигаться как в точках экстремума, так и в точках на концах заданного промежутка.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором отрезке $[a, b]$.

Нахождение глобальных экстремумов функций происходит по следующей схеме.

1. Найти производную $f'(x)$.

2. Найти критические точки функции, в которых $f'(x_0) = 0$ или не существует.

3. Найти значения функции в критических точках и на концах отрезка и выбрать из них наибольшее f_{MAX} и наименьшее f_{MIN} значения. Это будут глобальные экстремумы функции на замкнутом отрезке или наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

Пример. Найти глобальные экстремумы функции $y = 3x^2 - 6x$ на отрезке $[0, 3]$.

1. $y' = 6x - 6$;$y'' = 6$.

2. $x_0 = 1$.

3. $y(1) = -3$; $y(0) = 0$; $y(3) = 9$.

В точке $x = 1$ наименьшее значение функции, а в точке $x = 3$ – наибольшее.

6. Выпуклость функции

Определение. *График функции $y = f(x)$ называется* **выпуклым** *в интервале (a, b), если он расположен ниже касательной, проведенной в любой точке этого интервала* (см. рис. 7а).

График функции $y = f(x)$ называется **вогнутым** *в интервале (a, b), если он расположен выше касательной, проведенной в любой точке этого интервала* (см. рис. 7б).

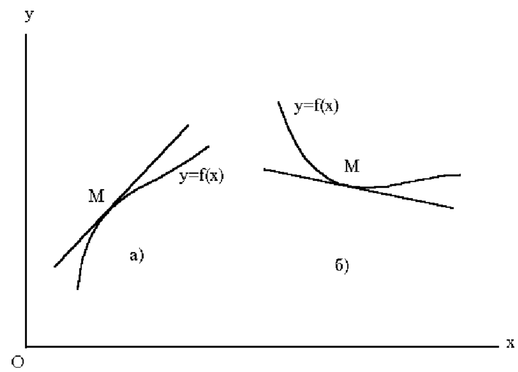

Рис. 7.

6.1. Необходимые и достаточные условия выпуклости (вогнутости) функции

Для определения выпуклости (вогнутости) функции на некотором интервале можно использовать следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале X и имеет конечную производную $f'(x)$. Для того, чтобы функция $f(x)$ была выпуклой (вогнутой) в X, необходимо и достаточно, чтобы ее производная $f'(x)$ убывала (возрастала) на этом интервале.*

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $f'(x)$ на X и имеет внутри X непрерывную вторую производную $f''(x)$. Для выпуклости (вогнутости) функции $f(x)$ в X необходимо и достаточно, чтобы внутри X*

$$f''(x) \leq 0; f''(x) \geq 0.$$

Докажем теорему 2 для случая выпуклости функции $f(x)$.

Необходимость. Возмем произвольную точку $x_0 \in X$. Разложим функцию $f(x)$ около точки x_0 в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$

$$r_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Уравнение касательной к кривой $f(x)$ в точке, имеющей абсциссу x_0:

$$Y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда превышение кривой $f(x)$ над касательной к ней в точке x_0 равно

$$f(x) - Y(x) = r_1(x).$$

Таким образом, остаток $r_1(x)$ равен величине превышения кривой $f(x)$ над касательной к ней в точке x_0. В силу непрерывности $f''(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то и $f''(x_0 + \vartheta(x - x_0)) > 0$ для x, принадлежащих достаточно малой окрестности точки x_0, а потому, очевидно, и $r_1(x) > 0$ для любого отличного от x_0 значения x, принадлежащего к указанной окрестности.

Значит, график функции $f(x)$ лежит выше касательной $Y(x)$ и кривая $f(x)$ выпукла в произвольной точке $x_0 \in X$.

Достаточность. Пусть кривая $f(x)$ выпукла на промежутке X. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$.

Аналогично предыдущему разложим функцию $f(x)$ около точки x_0 в ряд Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r_1(x),$$

$$r_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0 + \vartheta(x - x_0)) \quad (0 < \vartheta < 1).$$

Превышение кривой $f(x)$ над касательной к ней в точке, имеющей абсциссу x_0, определяемой выражением $Y(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, равно

$$f(x) - Y(x) = r_1(x).$$

Так как превышение положительно для достаточно малой окрестности точки x_0, то положительна и вторая производная $f''(x_0 + \vartheta(x - x_0))$. При стремлении $x \to x_0$ получаем, что для произвольной точки x_0 $f''(x_0) > 0$.

Пример. Исследовать на выпуклость (вогнутость) функцию $y = x^2 - 16x + 32$.

Ее производная $y' = 2x - 16$ возрастает на всей числовой оси, значит по теореме 1 функция вогнута на $(-\infty, \infty)$.

Ее вторая производная $y'' = 2 > 0$, поэтому по теореме 2 функция вогнута на $(-\infty, \infty)$.

7. Точки перегиба

Определение. Точкой перегиба *графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция выпукла и вогнута.*

Из этого определения следует, что точки перегиба – это точки точки экстремума первой производной. Отсюда вытекают следующие утверждения для необходимого и достаточного условий перегиба.

Теорема (необходимое условие перегиба). *Для того чтобы точка x_0 являлась точкой перегиба дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$, необходимо, чтобы ее вторая производная в этой точке равнялась нулю ($f''(x_0) = 0$) или не существовала.*

Теорема (достаточное условие перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ дважды дифференцируемой функции $y = f(x)$ при переходе через некоторую точку x_0 меняет знак, то x_0 есть точка перегиба.*

Отметим, что в самой точке вторая прозводная $f''(x_0)$ может не существовать.

Геометрическая интерпретация точек перегиба иллюстрируется рис. 8.

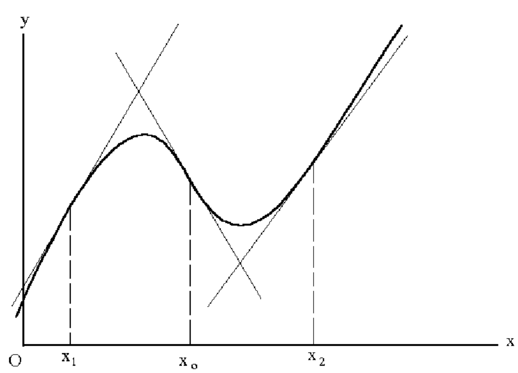

Рис. 8.

В окрестности точки x_1 функция выпукла и график ее лежит *ниже* касательной, проведенной в этой точке. В окрестности точки x_2 функция вогнута и график ее лежит *выше* касательной, проведенной в этой точке. В точке перегиба x_0 касательная разделяет график функции на области выпуклости и вогнутости.

7.1. Исследование функции на выпуклость и наличие точек перегиба

1. Найти вторую производную $f''(x)$.

2. Найти точки, в которых вторая производная $f''(x) = 0$ или не существует.

3. Исследовать знак второй производной слева и справа от найденных точек и сделать вывод об интервалах выпуклости или вогнутости и наличии точек перегиба.

Пример. Исследовать функцию $y(x) = 2x^3 - 6x^2 + 15$ на выпуклость и наличие точек перегиба.

1. $y' = 6x^2 - 12x; y'' = 12x - 12$.

2. Вторая производная равна нулю при $x_0 = 1$.

3. Вторая производная $y''(x)$ меняет знак при $x_0 = 1$, значит точка $x_0 = 1$ – точка перегиба.

На интервале $(-\infty, 1)$ $y''(x) < 0$, значит функция $y(x)$ выпукла на этом интервале.

На интервале $(1, \infty)$ $y''(x) > 0$, значит функция $y(x)$ вогнута на этом интервале.

8. Общая схема исследования функций и построения графика

При исследовании функции и построении ее графика рекомендется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функцию на четность – нечетность. Напомним, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симетричен относительно начала координат.

3. Найти вертикальные асимптоты.

4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.

5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.

6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

7. Найти точки пересечения с осями координат.

Исследование функции проводится одновременно с построением ее графика.

Пример. Исследовать функцию $y(x) = f(x) = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ и построить ее график.

1. Область определения функции – $(-\infty,-1)\bigcup(-1,1)\bigcup(1,\infty)$.

2. Исследуемая функция – четная $y(x)=y(-x)$, поэтому ее график симметричен относительно оси ординат.

3. Знаменатель функции обращается в ноль при $x=\pm 1$, поэтому график функции имеет вертикальные асимптоты $x=-1$ и $x=1$.

Точки $x=\pm 1$ являются точками разрыва второго рода, так как пределы слева и справа в этих точках стремятся к ∞.

$$\lim_{x\to 1-0} y(x)=\lim_{x\to -1+0} y(x)=\infty;\ \lim_{x\to 1+0} y(x)=\lim_{x\to -1-0} y(x)=-\infty.$$

4. Поведение функции в бесконечности.

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x)=-1,$$

поэтому график функции имеет горизонтальную асимптоту $y=-1$.

5. Экстремумы и интервалы монотонности. Находим первую производную

$$y'(x)=\frac{4x}{(1-x^2)}.$$

$y'(x)<0$ при $x\in(-\infty,-1)\bigcup(-1,0)$, поэтому в этих интервалах функция $y(x)$ убывает.

$y'(x)>0$ при $x\in(0,1)\bigcup(1,\infty)$, поэтому в этих интервалах функция $y(x)$ возрастает.

$y'(x)=0$ при $x=0$, поэтому точка $x_0=0$ является критической точкой.

Находим вторую производную

$$y''(x)=\frac{4(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}.$$

Так как $y''(0)>0$, то точка $x_0=0$ является точкой минимума функции $y(x)$.

6. Интервалы выпуклости и точки перегиба.

Функция $y''(x)>0$ при $x\in(-1,1)$, значит на этом интервале функция $y(x)$ вогнута.

Функция $y''(x)<0$ при $x\in(-\infty,-1)\bigcup(1,\infty)$, значит на этих интервалах функция $y(x)$ выпукла.

Функция $y''(x)$ нигде не обращается в ноль, значит точек перегиба нет.

7. Точки пересечения с осями координат.

Уравнение $f(0) = y$, имеет решение $y = 1$, значит точка пересечения графика функции $y(x)$ с осью ординат $(0, 1)$.

Уравнение $f(x) = 0$ не имеет решения, значит точек пересечения с осью абсцисс нет.

С учетом проведенного исследования можно строить график функции

$$y(x) = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}.$$

Схематически график функции изображен на рис. 9.

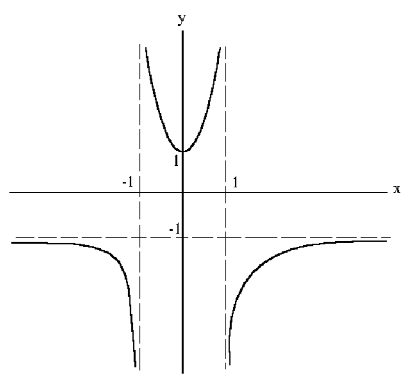

Рис. 9.

Отметим, что наиболее просто построение графиков функций выполняется с помощью математических пакетов MathCad или Maple.