Министерство образования Российской Федерации

“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра ”Высшая математика”

А. В. Жемерев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Часть 1

Методическое пособие для студентов 1-го курса 2-го факультета МАТИ

Москва 2003 г.

Оглавление

1. Производная функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X. Возьмем $x \in X$. Дадим значению x приращение $\Delta x \neq 0$, тогда функция $y(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. **Производной функции** $y = f(x)$ *называется предел отношения приращения функции* Δy *к приращению независимой переменной* Δx *при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует)*:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv f'(x) \equiv \frac{dy}{dx}.$$

Нахождение производной функции называется *дифференцированием* этой функции.

Если функция в точке x *имеет конечную производную, то функция называется* **дифференцируемой** *в этой точке.*

Функция, дифференцируемая во всех точках промежутка X называется *дифференцируемой на этом промежутке.*

1.1. Схема вычисления производной

Производная функции $y = f(x)$ может быть найдена по следующей **схеме:**

1. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и находим приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

2. Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

3. Находим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y'$$

(если он существует).

Пример. Найти производную функции $y(x) = x^2$.

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2x + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x.$$

1.2. Геометрический смысл производной

Определение касательной. Заметим, что касательную к кривой $y = f(x)$ нельзя определить как прямую, имеющую с кривой одну общую точку, так как в этом случае любую прямую, пересекающую кривую $y = f(x)$, можно было бы назвать касательной.

Дадим аргументу x_0 приращение Δx и рассмотрим две точки на кривой $M_0 = \{x_0; f(x_0)\}$ и $M_1 = \{x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x)\}$ (см. рис. 1).

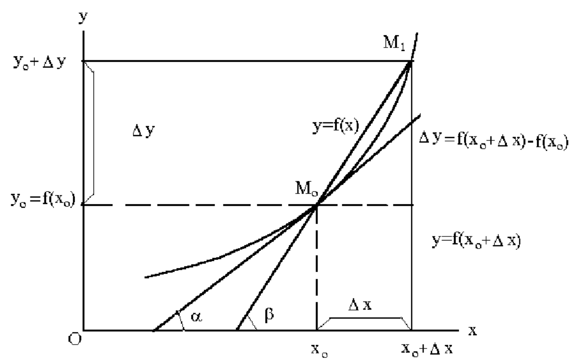

Рис. 1.

Проведем секущую M_1M_0. Под касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 понимается предельное положение секущей M_0M_1, при приближении точки M_1 к точке M_0, то есть при $\Delta x \to 0$.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Отсюда следует **геометрический смысл производной:** *производная* $f'(x_0)$ *есть* **угловой коэффициент** *(тангенс угла наклона)* **касательной,** *проведенной к кривой* $y = f(x)$ *в точке* x_0), т.е. $k = f'(x_0)$.

1.3. Механический смысл производной

Пусть вдоль некоторой прямой движется точка по закону $s = s(t)$, где s – пройденный путь, t – время, и необходимо найти скорость точки в момент времени t_0.

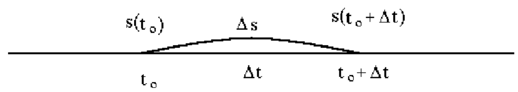

Рис. 2.

К моменту времени t_0 пройденный путь равен $s_0 = s(t_0)$, а к моменту времени $t_0 + \Delta t$ – путь $s_0 + \Delta s = s(t_0 + \Delta t)$ (см. рис. 2).

Тогда за промежуток Δt средняя скорость будет

$$v_{mean} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}.$$

Очевидно, что чем меньше Δt, тем лучше средняя скорость v_{middle} характеризует движение точки в момент времени t_0. Поэтому под *скоростью точки в момент времени* t_0 следует понимать предел средней скорости за промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$, когда $\Delta t \to 0$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{mean} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Отсюда следует **механический смысл производной:** *производная пути по времени $s'(t_0)$ есть* **скорость** *точки в момент времени t_0: $v(t_0) = s'(t_0)$.*

2. Дифференцируемость функции, ее связь с непрерывностью

Теорема. *Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то она в этой точке непрерывна.*

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, т.е. существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

где $f'(x_0)$ – постоянная величина, не зависящая от Δx.

Тогда на основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$ или

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

При $\Delta x \to 0$ на основании свойств бесконечно малых находим, что $\Delta y \to 0$ и, следовательно, по определению 2 непрерывной функции функция $y = f(x)$ в точке x_0 является непрерывной.

Обратная теорема, вообще говоря, неверна, т.е. если функций непрерывна в данной точке, то она не обязательно дифференцируема в этой точке. Так, например, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке.

Таким образом, *непрерывность функции – необходимое условие, но не достаточное условие дифференцируемости функции.* Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна.

Если функция имеет непрерывную производную на промежутке X, тогда она называется *гладкой* на этом промежутке. Если производная функции имеет конечное число точек разрыва (первого рода) то такая функция называется *кусочно гладкой.*

Классическим примером кусочно гладкой функцией является функция, заданная таблицей значений, между которыми проведенны прямые (пример, часто встречаемый в технике).

3. Свойства производной. Правила дифференцирования

1. *Производная постоянной равна нулю*

$$C' = 0.$$

2. *Производная аргумента равна единице*

$$x' = 1.$$

3. *Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций*

$$(U \pm V)' = U' \pm V'.$$

4. *Производная произведения двух дифференцируемых функций определяется по формуле*

$$(UV)' = UV' + VU'.$$

Отсюда в частности следует, что $(CU)' = CU'$*, то есть постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

5. *Производная от частного двух функций определяется по формуле*

$$\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{U'V - V'U}{V^2}.$$

Получим, например, формулу для производной произведения двух функций. Пусть имеются две функции $U(x)$ и $V(x)$. Дадим независимому аргументу приращение Δx. Тогда функции $U(x)$ и $V(x)$ получат соответственно приращения ΔU и ΔV, а произведение функций $U(x)V(x)$ приращение $U(x+\Delta x)V(x+\Delta x) - U(x)V(x)$.

По определению производной

$$(UV)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x+\Delta x)V(x+\Delta x) - U(x)V(x)}{\Delta x}.$$

Функции $U(x+\Delta x)$ и $V(x+\Delta x)$ можно представить в виде

$$U(x+\Delta x) = U(x) + \Delta U; V(x+\Delta x) = V(x) + \Delta V ю$$

Тогда для производной произведения двух функций получаем

$$(UV)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x)V(x) + \Delta U V(x) + \Delta V U(x) - U(x)V(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U V(x) + \Delta V U(x)}{\Delta x} = U'V + V'U.$$

3.1. Производная сложной функции

Пусть переменная y есть функция от переменной u $y = f(u)$, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x $u = \varphi(x)$, т.е. задана **сложная** функция $y = [\varphi(x)]$.

Теорема. *Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x,* т.е.

$$y' = f'(u)u'.$$

Дадим независимой переменной x приращение $\Delta x \neq 0$. Тогда функции $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ соответственно получат приращение Δu и Δy.

Предположим, что $\Delta u \neq 0$. Тогда в силу дифференцируемости функции $y = f(u)$ можно записать

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u).$$

На основании теоремы о связи бесконечно малых с пределами функций

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u),$$

где $\alpha(\Delta u)$ – бесконечно малая при $\Delta u \to 0$, откуда

$$\Delta u = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u.$$

Разделив обе части полученного равенства на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

При стремлении $\Delta x \to 0$ $\Delta u \to 0$ и $\alpha(\Delta u) \to 0$.

Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$y' = f'(u) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u) \cdot u'.$$

Правило дифференцирования сложной может быть записано в других формах:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Пример. Найти производную функции $y = (\sqrt{x} + 5)^3$.

Функцию можно записать в виде $y = u^3$, где $u = \sqrt{x} + 5$. Получаем

$$y' = 3u^2 \cdot u' = 3(\sqrt{x} + 5)^2(\sqrt{x} + 5)' = \frac{3(\sqrt{x} + 5)^2}{2\sqrt{x}}.$$

3.2. Производная обратной функции

Теорема. *Для дифференцируемой функции с производной, не равной нулю, производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции,* т.е.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

По условию функция $y = f(x)$ дифференцируема и $y'(x) = f'(x) \neq 0$.

Пусть $\Delta y \neq 0$ – приращение независимой переменной y, Δx – соответствующее приращение обратной функции $x = \varphi(y)$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x}.$$

Переходя к пределу при $\Delta y \to 0$ и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x},$$

т.е.

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Полученная формула имеет простой геометрический смысл (см. рис. 3). Если y'_x выражает тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ к оси Ox, то x'_y – *тангенс угла β наклона той же касательной к* *оси* Oy, причем $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ (если α и β – острые углы) (см. рис. 3) или $\alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{2}$ (если α и β – тупые углы). Для таких углов $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha$ или

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Этому равенству и равносильно условие

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

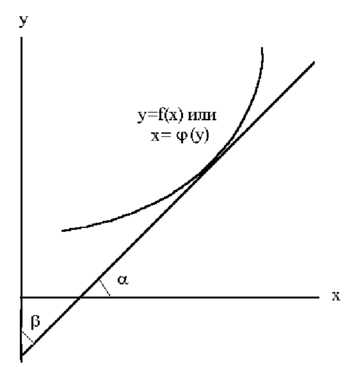

Рис. 3.

4. Производные основных элементарных функций

4.1. Производная логарифмической функции

а) $y = \ln x$.

1.
$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

2.
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

3.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Пусть $\dfrac{\Delta x}{x} = t$, тогда $\Delta x = xt$ и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{xt} \ln(1+t) = \frac{1}{x} \lim_{t \to 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}.$$

б) $y = \log_a x$.

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

4.2. Производная показательной функции

а) $y = e^x$. Прологарифмируем обе части равенства по e, получим $\ln y = x$. Дифференцируя обе части по переменной x и учитывая, что $\ln y$ – сложная функция, получим

$$(\ln y)' = x' \text{ или } \frac{\mathrm{y}'}{\mathrm{y}} = 1 \text{ или } \mathrm{y}' = \mathrm{y}.$$

Итак,

$$(e^x)' = e^x.$$

б) $y = a^x$.

$$y' = (a^x)' = \left[(e^{\ln a})^x\right]' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \cdot \ln a.$$

Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

4.3. Производная степенной функции

$y = x^n$. Прологарифмируем.

$$\ln y = n \ln x.$$

Продифференцируем.
$$\frac{1}{y}y' = n \cdot \frac{1}{x}.$$
Откуда
$$y' = ny\frac{1}{x} = nx^n \cdot \frac{1}{x} = nx^{n-1}.$$
Итак,
$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

4.4. Логарифмическая производная

Производная логарифмической функции
$$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$$
называется *логарифмической производной.* Ее удобно использовать для нахождения производных функций, выражения которых существенно упрощаются при логарифмировании.

Расссмотрим производную степенно-показательной функции $y = f(x)^{\varphi(x)}$.
$$(\ln y)' = \varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x) \cdot \frac{f'(x)}{f(x)}.$$
Отсюда
$$y' = f(x)^{\varphi(x)}\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)f'(x)f(x)^{\varphi(x)-1}.$$
т.е. для того чтобы найти производную степенно-показательной функции, достаточно дифференцировать ее вначале как степенную, а затем как показательную, и полученные результаты сложить.

Пример. Найти производную функции $y = x^x$.

Дифференцируем функцию как степенную, а затем как показательную и полученные результаты складываем:
$$y' = x \cdot x^{x-1} + x^x \cdot \ln x = x^x(1 + \ln x).$$

4.5. Производные тригонометрических функций

а) Найти прозводную функции $y(x) = \sin x$.

Используя формулу

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \frac{(A \pm B)}{2} \cos \frac{(A \mp B)}{2},$$

находим Δy

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin(x) = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos x.$$

Итак,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

б) Найти производную функции $y(x) = \arcsin x$.

$$x = \sin y; \quad \frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

5. Таблица производных

$y(x)$	$y'(x)$	$y(x)$	$y'(x)$
$y = x^m$	$y' = mx^{m-1}$	$y = \sqrt{x}$	$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = \ln x$	$y' = \dfrac{1}{x}$	$y = \log_a x$	$y' = \dfrac{1}{x \ln a}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos x$	$y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \operatorname{arctg} x$	$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$y = \operatorname{arcctg} x$	$y' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$y = \operatorname{sh} x$	$y' = \operatorname{ch} x$	$y = \operatorname{ch} x$	$y' = \operatorname{sh} x$
$y = \operatorname{th} x$	$y' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$y = \operatorname{cth} x$	$y' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$

6. Дифференцирование функции, заданной параметрически

В ряде случаев функция может задаваться параметрически. $x = x(t)$; $y = y(t)$, где t – параметр. Допустим, что первые производные по t не обращаются в ноль

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \neq 0 \ \ ; \dot{y}(t) = \frac{dy}{dt} \neq 0.$$

и существуют вторые производные по t

$$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \ddot{y}(t) = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Вычислим первую $\dfrac{dy}{dx}$ и вторую $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ производные.

Домножим и разделим выражение $\dfrac{dy}{dx}$ на dt. После несложных преобразований получим для первой производной следующее выражение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{(dt)}{(dt)} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}.$$

Выражение для второй производной перепишем в следующем виде

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right] = \frac{(dt)}{(dt)}\frac{d}{dx}\left[\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right] = \frac{1}{\dot{x}(t)}\frac{d}{dt}\left[\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right].$$

Проведя дифференцирование по t, получим для второй производной

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dot{x}(t)\ddot{y}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{[\dot{x}(t)]^3}.$$

Пример. Найти производную *циклоиды*

$$x(t) = a(t - \sin t); \quad y(t) = a(1 - \cos t).$$

$$\dot{x}(t) = a(1 - \cos t); \dot{y}(t) = a \sin t.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - \cos t}{\sin t} = \operatorname{tg}\frac{t}{2}.$$

7. Производные высших порядков

До сих пор рассматривались производные $f'(x)$ от функции $f(x)$. Их также называют *производными первого порядка.* Но производная $f'(x)$ сама является функцией, которая также может иметь производную.

Производной n-ного порядка называется производная от производной $(n-1)$-го порядка.

Обозначение производных: $f''(x)$ – *второго порядка* (или *вторая производная*), $f'''(x)$ – *третьего порядка* (или *третья производная*).

Для обозначения производных более высокого порядка используются арабские цифры в скобках или римские цифры, например, $f^{(4)}(x), \cdots, f^{(n)}(x)$ или $f^{\vee}(x)$ и т.д.

Выясним *механический смысл второй производной.* Выше было показано, что если точка движется по закону $s = s(t)$, где s – путь, t – время, то $s'(t)$ представляет скорость точки в момент времени t. Следовательно, *вторая производная пути по времени* $s''(t) = v'(t)$ *скорость изменения скорости или* **ускорение** *точки в момент времени* t.

Пример. Найти производные до n-ного порядка включительно от функции $y = \ln x$.

$$y' = \frac{1}{x};\;\; y'' = -\frac{1}{x^2};\;\; y''' = \frac{2}{x^3};\;\; y^{(4)} = -\frac{2 \cdot 3}{x^4} \cdots$$

Очевидно, что производная n-ного порядка

$$y^{(n)} = -\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

8. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X и дифференцируема в некоторой окрестности точки $x \in X$. Тогда существует конечная производная $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

На основании теоремы о связи бесконечно малых величин с пределами функций отношение приращений $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ можно записать как

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x)$ - бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$.

Тогда приращение

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Таким образом, приращение функции Δy состоит из двух слагаемых: 1) – линейного относительно Δx; 2) – нелинейного, представляющего бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, ибо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(x) = 0.$$

Определение. Дифференциалом функции *называется главная линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной*

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

(см. рис. 4).

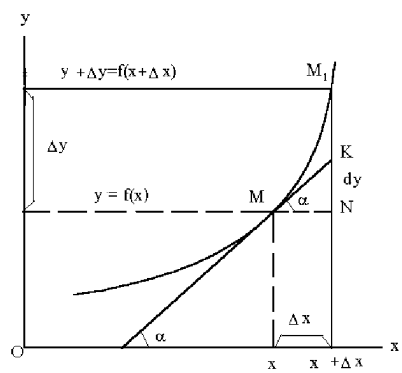

Рис. 4.

Пример. Найти приращение и дифференциал $y = 2x^2 - 3x$ при $x = 10$ и $\Delta x = 0.1$.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$
$$= [2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)] - (2x^2 - 3x) = \Delta x[4x + 2\Delta x - 3]$$

Тогда

$$dy = f'(x)\Delta x = (4x - 3)\Delta x.$$

Получаем $\Delta y = 3.72$, а $dy = 3.70$.

Пример. Найти дифференциал функции $y = x$.

$$y = x; dx = \Delta x$$

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной.

Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде

$$dy = f'(x)dx,$$

откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$. Отметим, что теперь $\dfrac{dy}{dx}$ не просто символическое обозначение производной, а обычная дробь с числителем dy и знаменателем dx.

8.1. Геометрический смысл дифференциала

Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$. Дадим аргументу x приращение Δx. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ (см. рис. 4).

Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке M, которая образует угол α с положительным направлением оси Ox, т.е. $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$. Из прямоугольного треугольника MKN

$$KN = MN \cdot \operatorname{tg}\alpha = \Delta x \operatorname{tg}\alpha = f'(x)\Delta x = dy,$$

и таким образом, $dy = KN$.

Таким образом, *дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда x получает приращение Δx.*

Заметим, что из рис. 4 следует, что $dy < \Delta y$. Это объясняется вогнутостью графика функции $y = f(x)$. Если график функции $y = f(x)$, был выпуклый, в этом случае $\Delta y > dy$.

8.2. Свойства дифференциала

Свойства дифференциала аналогичны свойствам производной. Приведем их без доказательства.

1.
$$dc = 0.$$

2.
$$d(cu) = cu.$$

3.
$$d(u \pm v) = du \pm dv.$$

4.
$$d(uv) = vdu + udv.$$

5.
$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

8.3. Инвариантность формы дифференциала

Рассмотрим свойство, которым обладает дифференциал функции, но не обладает ее производная.

Рассматривая выше $y = f(x)$ как функцию независимой переменной x, мы получили, что $dy = f'(x)dx$.

Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где аргумент $u = \varphi(x)$ сам является функцией от x, т.е. рассмотрим сложную функцию $y = [\varphi(x)]$. Если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции равна $y' = f'(u)u'$.

Тогда дифференциал функции

$$dy = f'(x)dx = f'(u) \cdot u'dx.$$

Но $u'dx = du$, и поэтому

$$dy = f'(u)du.$$

Последнее равенство означает, что формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от независимой переменной x рассматривать функцию от зависимой переменной u. Это свойство дифференциала получило название *инвариантности* (т.е. неизменности) *формы (или формулы дифференциала)*.

8.4. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Выше было получено, что приращение функции $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$ отличается от дифференциала dy на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем $dy = f'(x)\Delta x$. Поэтому при достаточно малых значениях Δx можно пользоваться приближенной формулой $\Delta y \approx dy$ или

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x.$$

Чем меньше Δx, тем точнее эта формула.

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[4]{16.64}$.

В данном случае $f(x) = \sqrt[n]{x}$, а $f'(x) = \dfrac{\sqrt[n]{x}}{nx}$. Численные значения: $n = 4$, $x = 16$, $\Delta x = 0.64$. Получаем

$$\sqrt[4]{16.64} \approx \sqrt[4]{16} + \frac{\sqrt[4]{16}}{4 \cdot 16} \cdot 0.64 = 2.02.$$

8.5. Дифференциалы высших порядков

Для дифференцируемой функции $y = f(x)$ ее дифференциал $dy = f'(x)dx$ будем рассматривать как функцию двух аргументов: x и dx.

Тогда *дифференциалом второго порядка* (или *вторым дифференциалом*) d^2y функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е.

$$d^2y = d(dy).$$

Аналогично *дифференциалом $n-$ого порядка* (или *n-ным дифференциалом*) d^ny называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-ого порядка этой функции

$$d^ny = d(d^{n-1}y).$$

Найдем выражение для d^2y.

По определению $d^2y = d(dy)$; $dy = f'(x)dx$; $d^2y = d(f'(x)dx)$; Но dx не зависит от x, т.е. по отношению к переменной x является постоянной величиной, то множитель Δx можно вынести знак дифференциала, т.е.

$$d^2y = dx \cdot df'(x) = dx \cdot [f'(x)]'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)dx^2,$$

где $dx^2 = (dx)^2$.

В общем случае

$$d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,$$

т.е. *дифференциал второго (и вообще n-ного) порядка равен произведению производной второго (n-ного) порядка на квадрат (n-ю степень) дифференциала независимой переменной.*

Отметим, что дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают свойством инвариантности формы в отличие от дифференциала первого порядка.