Министерство образования Российской Федерации

"МАТИ"- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра "Высшая математика"

А. В. Жемерев

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 1

Методическое пособие для студентов 1-го курса
2-го факультета МАТИ

Москва 2003 г.

Оглавление

1. Понятие множества

Понятие множества принадлежит к числу первичных, не опредляемых через более простые.

Под *множеством* понимается совокупность (собрание, набор) некоторых объектов. Объекты, которые образуют множество, называются *элементами* или *точками* этого множества.

Пример.

Множества студентов групп, факультета, института, и т.д.

Множества обозначаются прописными буквами, а их элементы - строчными. Если a есть элемент множества A, то $a \in A$. Если b не является элементом множества A, то $a \notin A$.

Множество не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$.

Например, множество действительных корней уравнения

$$x^2 + 1 = 0$$

есть пустое множество.

Если множество B состоит из части элементов множества A или совпадает с ним, то множество B называется *подмножеством* множества A и обозначается $B \subset A$.

Пример.

Если A – множество всех студентов институтв, а B – множество студентов первокурсников, то $B \subset A$.

Два множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначается $A = B$.

Объединением двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из данных множеств, то есть $C = A \bigcup B$, где $\bigcup$ – значок объединения.

Пересечением двух множеств A и B называется множество D, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из данных множеств A и B, то есть $D = A \bigcap B$, где $\bigcap$ – значок пересечения.

Разностью множеств A и B называется множество E, состоящее из всех элементов множества A, которые не принадлежат множеству B, то есть $E = A \setminus B$. Значок $\setminus$ называется backslash.

Пример.

Даны множества A={1;2;3}, B={3;4;5}.
Объединение $A\bigcup B$={1;2;3;4;5}
Пересечение $A\bigcap B$={3}
Разность $A\setminus B$={1;2}
Разность $B\setminus A$={4;5}.

2. Действительные числа

Действительные (т.е. реальные) числа геометрически изображаются числовой прямой (или числовой осью), т.е. прямой, на которой выбрано начало отсчёта, положительное направление и единица отсчёта Действительные числа бывают

1 натуральными;

2 целыми;

3 рациональными;

4 иррациональными.

В числе 12.36 десятичная точка отделяет целую часть от дробной.

Если число положительное и у нее нет дробной части, то такое число называют *натуральным* и обозначают буквой n. Например, 1,2,3,4 и т.д.

Числа вида $(-n)$, где n – натуральное число называют отрицательными целыми числами.

Множество чисел, состоящее из всех натуральных чисел, нуля и всех отрицательных целых чисел, называется множеством целых чисел, а сами числа называются *целыми* числами и обозначаются буквой z.

Рациональное число можно представить в виде отношения двух чисел, z_1/n_1 где z_1 – целое число, а n_1- натуральное. Их обозначают буквой q.

Иррациональными называются числа, представимые в виде бесконечной непериодической десятичной дроби. Другими словами, их нельзя представить в виде: z_1/n_1.

3. Числовые множества

Любую совокупность действительных чисел называют *числовым множеством.* Само множество действительных чисел обозначают буквой R. Другие примеры числовых множеств:

а) множество R_+ положительных действительных чисел;

б) множество R_- отрицательных действительных чисел;

в) множество Q_+ положительных рациональных чисел;

г) множество Q_- отрицательных рациональных чисел;

д) множество Q рациональных чисел;

е) множество Z целых чисел;

ж) множество N натуральных чисел.

Числовое множество X называют ограниченным, если существует такое число a, что для всех $|x| \leq a$ из $x \in X$.

Пример.

Множество периметров выпуклых многоугольников, вписанных в данную окружность, ограниченно (см. Рис. 1).

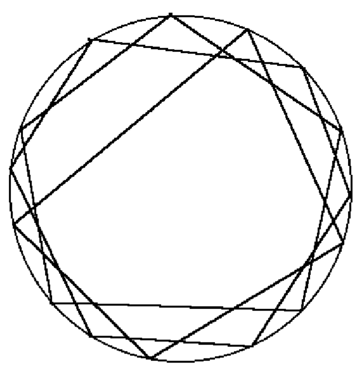

Рис. 1.

Если число a принадлежит множеству X, то пишут: $a \in X$, а если не принадлежит множеству X, то $a \notin X$.

Пример.

$5 \in N$, $4.5 \notin N$

Числовое множество X называется частью или множеством числового множества Y элемент из X принадлежит Y . В этом случае пишут

$X \subset Y$.

Пример.

$X = [4, +\infty)$, а$Y = [0, +\infty)$, то $X \subset Y$.

Числовые множества состоящие из нескольких чисел называют *конечными.*

Например, конечно множество натуральных чисел, квадрат которых меньше 20, оно состоит из 1,2,3,4.

К конечным множествам относятся множества, состоящие лишь из одного числа, например, $\{4\}$, а также пустое множество .

Один из примеров множеств является *интервал*[1].

Пусть x – действительное переменное. Множество всех значений x (точек), удовлетворяющих условиям:

1. $a < x < b$ есть ограниченный открытый интервал $(a, в)$;

2. $a < x$ есть неограниченный открытый интервал $(a, +\infty)$;

3. $x > a$ есть неограниченный открытый интервал $(-\infty, a)$;

4. $a \leq x \leq b$ есть ограниченный замкнутый интервал $[a, b]$;

Замкнутый интервал называют часто *отрезком.* Множество точек x удовлетворяющих условиям:

$$a \leq x < b;$$

$$a < x \leq b;$$

$$x \geq a;$$

$$x \leq b$$

называют *полуоткрытами интервалами.*

Числовые множества часто задают, указывая общую форму входящих в них чисел или общее свойство этих чисел. В этом случае множество записывают в виде: $\{x|F(x)\}$, где x – общий элемент множества, $F(x)$ – свойство, присущее всем элементам множества и только им.

Пример.

Множество $\{x|2 \leq x < 10\}$ состоит из действительных чисел x удовлетворяющих неравенству $2 \leq x < 10$.

[1]Иногда вместо понятия "интервала" используют понятие "промежуток". См., например, Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т.1 С.93, 1997г.

4. Решение квадратного уравнения на PC

Использование математических пакетов (среди которых наиболее простой MathCad) в "лоб" часто может приводить к ошибкам. Это связано с тем, что действительные числа представляются в виде конечного набора цифр (например, для MathCad'а при обычной настройки это 15 значащих цифр).

Поэтому переход от "Математики" к "Вычислительной математике" требует определенной аккуратности и внимания.

В качестве примера рассмотрим решение обычного квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

когда дискриминант квадратного уравнения $b^2 - 4ac$ положителен.

Хрестоматийная формула решения этого уравнения, как известно, выглядет в следующем виде

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Но при решения квадратного уравнения на PC могут возникать различные "пакости", в частности, при $|b^2/4ac| \gg 1$. Для Mathcad'а эти "пакости" возникают, в частности, при $|b^2/4ac| > 10^{16}$.

Рассмотрим два случая положительных и отрицательных значений b.

В первом случае ($b > 0$) для x_1 и для x_2 с учетом $|b^2/4ac| \gg 1$ для x_1 и x_2 получаем приближенные выражения

$$x_1 \approx \frac{-b + b}{2a} = 0;$$

$$x_2 \approx \frac{-b - b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Однако, очевидно, что x_1 достаточно мало, но не обращается в ноль.

Чтобы избежать ошибки обращения в ноль x_1, возникающей в результате округления, необходимо в выражении для x_1 "загнать" иррациональность в знаменатель, домножив числитель и знаменатель на сопряженные выражения.

$$x_1 = \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(b+\sqrt{b^2-4ac})}{2a(b+\sqrt{b^2-4ac})} = -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

Тогда при $|b^2/4ac| \gg 1$ для x_1 получаем

$$x_1 \approx -\frac{2c}{b+b} = -\frac{c}{b}.$$

Получаемое значение для x_1 мало, но не обращается в ноль.

Итак, при $|b^2/4ac| \gg 1$ и $b > 0$ решения квадратного уравнения с помощью РС следует находить по формулам

$$x_1 = -\frac{2c}{b+\sqrt{b^2-4ac}}.$$

$$x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

При $|b^2/4ac| \gg 1$ и $b < 0$ следует изменить формулу для нахождения x_2 и в этом случае корни квадратного уравнения следует вычислять по формулам:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{2c}{\sqrt{b^2-4ac}-b}$$

5. Понятие функции. Основные свойства функций

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и тоже значение. Например, отношение длины окружности к ее диаметру есть постоянная величина, равная π.

Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях некоторого процесса, то в этом случае она называется *параметром*.

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения. Например, при равномерном движении $S = vt$, где путь S и время t – переменные величины, а v – параметр.

Перейдем к понятию функции.

Определение. *Если каждому элементу x множества X $(x \in X)$ ставится в соответствие вполне определенный элемент y множества Y, $(y \in Y)$ то говорят, что на множестве X задана* **функция** $y = f(x)$.

При этом x – называется *независимой переменной* (или *аргументом*, y – *зависимой переменной*, а буква f – символ закона соответствия.

Множество X называется *областью определения* (или *существования*) функции, а множество Y – *областью значений* функции.

Например, область определения функции $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ $(-\infty, 10]$.

Способы задания функций.

а) *Аналитический способ,* если функция задана формулой вида $y = f(x)$. Так, функция $y = x^2 + \sqrt{10 - x}$ задана аналитически.

б) *Табличный способ*, когда функция задана в виде таблиц, содержащих значения аргумента x и сответствующие значения функции $f(x)$, например, известные таблицы Брадиса.

в) *Графический способ.*

Рассмотрим основные свойства функций.

1. Четность и нечетность. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$ и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$. В противном случае фукция называется *общего вида.*

Например, функция $y = x^2$ является четной, а функция $y = x^3$ – нечетной. Функция $y = x^2 + x^3$ является функцией общего вида.

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2. Монотонность. Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей (убывающей)* на промежутке X, если для любых x_1, x_2 $(x_1, x_2 \in X)$ и $x_2 > x_1$ выполняется неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$. А если выполняется неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$ $(f(x_2) \leq f(x_1))$, то функция называется неубывающей (невозрастающей).

3. Ограниченность. Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \leq M$ для любого $x \in X$.

Например, функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как $|\sin x| \leq 1$ для любого $x \in R$.

4. Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$ на промежутке X, для любого $x \in X$ выполняется равенство $f(x+T) = f(x)$.

6. Классификация функций

Функция называется *явной* (или *заданной в явном виде*), если она задана формулой, в которой правая часть не содержит зависимой переменной; например, функция $y = x^3 + 7x + 5$.

Функция y аргумента x называется *неявной* (или *заданной в неявном виде*), если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, функция $y(y \geq 0)$, заданная уравнением $x^3 + y^2 - x = 0$. Отметим, что последнее уравнение задает две функции, $y = \sqrt{x - x^3}$ при $y \geq 0$, и $y = -\sqrt{x - x^3}$ при $y < 0$.

Обратная функция. Пусть $y = f(x)$ есть функция от независимой переменной x, определенной на промежутке X с областью значений Y. Поставим в соответствие каждому $y \in Y$ *единственное* значение $x \in X$, при котором $f(x) = y$. Тогда полученная функция $x = g(y)$, определенная на промежутке Y с областью значений X называется *обратной* по отношению к функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = a^x$ обратной будет функция $x = \log_a x$.

Сложная функция. Пусть функция $y = f(u)$ есть функция от переменной u, определенной на множестве U с областью значений Y, а переменная u в свою очередь является функцией $u = \varphi(x)$ от переменной x, определенной на множестве X с областью значений U. Тогда заданная на множестве X функция $y = [\varphi(x)]$ называется *сложной* функцией.

Например, $y = \sin x^5$ – сложная функция, так как ее можно представить в виде $y = \sin u$, где $u = x^5$.

Понятие элементарной функции. *Основными элементарными функциями* являются

а) степенная функция $y = x^r$, $r \in R$;

б) показательная функция $y = a^x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

в) логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$;

г) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$;

д) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Из основных элементарных функций новые *элементарные* функции могут быть получены при помощи: а) алгебраических действий; б) операций образования сложных функций.

Определение. *Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются* **элементарными**.

Например, функций

$$y = \frac{\sqrt{x} + \arcsin x^5}{\ln^3 x + x^3 + x^7}$$

является элементарной.

Примером неэлементарной функции является функция $y = \operatorname{sign} x$.

7. Предел функции и его свойства

Предел функции в бесконечности.

Определение. Число A называется пределом **функции** $f(x)$ **при** x, **стремящемся к бесконечности**, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $S > 0$, что для всех x удовлетворяющих условию $|x| > S$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Этот предел функции обозначается следующим образом:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

или $f(x) \to A$ при $x \to \infty$.

Используя логические символы: квантор общности $\forall$ (вместо слова "для любого") и квантор существования $\exists$ (вместо слова "найдется"), символ равносильности $\Longleftrightarrow$, определение предела можно записать в следующем виде:

$$\left(A = \lim_{x\to\infty} f(x)\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists S > 0)(\forall x : |x| > S)|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Предел функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, кроме, быть может, самой точки a.

Определение. Число A называется пределом **функции** $f(x)$ **при** x**, стремящемся к** a **(или в точке** a**),** если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Условие $0 < |x - a|$ означает, что $x \neq 0$.

Предел функции обозначается следующим образом:

$$\lim_{x\to a} f(x) = A$$

или $f(x) \to A$ при $x \to a$.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$\left(A = \lim_{x\to a} f(x)\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x : 0 < |x - a| < \delta)|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Односторонние пределы. Если $x > a$ и $x \to a$, то употребляют запись $x \to a + 0$. Если $x < a$ и $x \to a$, то употребляют запись $x \to a - 0$.

Выражения $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ называются соответственно пределами функции $f(x)$ в точке a справа и слева.

С помощью логических символов эти определения имеет вид:

$$\left(A_+ = \lim_{x\to a+0} f(x)\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x : 0 < x - a < \delta)|f(x) - A_+| < \varepsilon.$$

$$\left(A_- = \lim_{x\to a-0} f(x)\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x : 0 < a - x < \delta)|f(x) - A_-| < \varepsilon.$$

Если существует предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то существуют пределы $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Это равенство выполняется также, если пределы слева и справа равны.

8. Теоремы о пределах

1. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций, если те существуют, то есть

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)+\psi(x)] = A+B,$$

где $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to x_0}\psi(x)$.

2. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций.

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot\psi(x)] = A\cdot B.$$

3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{A}{B},$$

причем $B\neq 0$.

4. Если,

$$\lim_{u\to u_0} f(u) = A;$$

$$\lim_{x\to x_0}\psi(x) = B,$$

то предел сложной функции

$$\lim_{x\to x_0} f[\psi(x)] = A.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{6x+10}{3x+5}$.

Так как при $x\to 5$ числитель дроби стремится к числу $6\cdot 5+10=40$, а знаменатель – к числу $3\cdot 5+5=20$, то $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{6x+10}{3x+5}=\dfrac{40}{20}=2$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+\sin x}{x-\cos x}$.

Числитель и знаменатель неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель на x. Получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x+\sin x}{x-\cos x} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\sin x/x}{1-\cos x/x} = 3,$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos x}{x}=0.$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-5x}$.

Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 при $x\to 5$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Преобразуем дробь

$$\frac{x^2-25}{x^2-5x}=\frac{(x-5)(x+5)}{x(x-5)}=\frac{x+5}{x},$$

так как $x\neq 5$. Поэтому

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x}=2.$$

При вычислении пределов, содержащих иррациональные выражения, часто используются следующие приемы:

а) введение новой переменной для получения рационального выражения;

б) перевод иррациональности из знаменателя в числитель и наоборот.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 81}\dfrac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}$.

Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 при $x\to 81$. В этом случае имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Пусть $t=\sqrt[4]{x}$. Тогда

$$\lim_{x\to 81}\frac{3-\sqrt[4]{x}}{9-\sqrt{x}}=\lim_{t\to 3}\frac{3-t}{9-t^2}=\lim_{t\to 3}\frac{1}{3+t}=\frac{1}{6}.$$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$.

Числитель и знаменатель дроби стремятся к 0 при $x\to 0$. В этом случае имеет место неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $\sqrt{x+4}+2$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2}=$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x+4-4}{\sqrt{x+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

Пример. Найти пределы функции $f(x) = \dfrac{1}{x+5^{1/(x-5)}}$ слева и справа при $x \to 5$.

Если $x \to 5-0$, то $\dfrac{1}{x-5} \to -\infty$ и $5^{\frac{1}{x-5}} \to 0$. Следовательно $\lim\limits_{x\to 5-0} f(x) = \dfrac{1}{5}$.

Если $x \to 5+0$, то $\dfrac{1}{x-5} \to +\infty$ и $5^{\frac{1}{x-5}} \to +\infty$. Следовательно $\lim\limits_{x\to 5-0} f(x) = 0$.

9. Числовая последовательность. Предел числовой последовательности

Определение. Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие определенное число a_n, то говорят, что задана числовая последовательность a_n

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

Другими словами числовая последовательность - это функция натурального аргумента: $a_n = f(n)$. Числа a_1, a_2, $\cdots$, a_n называются членами последовательности, а число a_n – общим членом данной последовательности.

Примеры числовых последовательностей:

$\{a_n\} = n^2$ – монотонная, неограниченная последовательнось;

$\{a_n\} = 1-(-1)^n$ – не монотонная, ограниченная последовтельность.

Примером числовой последовательности является натуральный ряд, который можно записать с помощью рекуррентного соотношения $f_1 = 1$; $f_{n+1} = f_n + 1$, где f_n – число, n – номер числа.

Также примером числовой последовательности является ряд чисел Фибоначчи, определямый рекурентным соотношеним $f_0 = f_1 = 1$; $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

Определение. Число b называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}$, если для любого малого положительного $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N, что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ будет соблюдаться неравенство

$$|a_n - b| < \varepsilon.$$

Предел числовой последовательности обозначается $\lim_{n\to\infty} a_n = b$ или $\{a_n\} \to b$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

С помощью логических символов определение имеет вид:

$$\left(b = \lim_{n\to\infty} a_n\right) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N)(\forall n > N)|a_n - b| < \varepsilon.$$

Смысл определения числовой последовательности состоит в том, что для достаточно больших n члены последовательности $\{a_n\}$ как угодно мало отличаются от числа b по абсолютной величине.

10. Первый и второй замечательные пределы

Первым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Покажем это. Для этого рассмотрим круг радиусом R с центром в точке O. Пусть OB – подвижный радиус, образующий угол $x = \angle BOA$ $\left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$ с осью Ox (см. рис. 2).

Из геометрических соображений следует, что площадь треугольника AOB меньше площади сектора AOB, которая в свою очередь меньше площади прямоугольного треугольника AOC, т.е.

$$S_{\Delta AOB} < S_{sec,AOB} < S_{\Delta AOC}$$

Так как

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}R^2 \sin x; S_{sec,AOB} = \frac{1}{2}R^2 x; S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}R^2 tgx$$

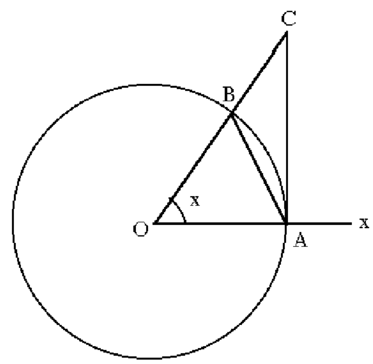

Рис. 2.

то получим

$$\frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 tgx.$$

Поделив это неравенство на $\frac{1}{2}R^2\sin x$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Так как функции $\cos x$ и $\frac{\sin x}{x}$ четные, то полученные неравенства справедливы и при $-\frac{\pi}{2} < x < 0$. Переходя к пределу при $x \to 0$, получим $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$. Поэтому существует предел промежуточной функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Рассмотрим примеры нахождения некоторых пределов с использованием первого замечательного предела.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5\frac{\sin 5x}{5x} = 5\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 5,$$

где $t = 5x$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin x^2}{x^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2\sin t}{t} = 2,$$

где $t = x^2$.

Вторым замечательным пределом называется предел

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Рассмотрим числовую последовательность

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Вычислим значения первых членов этой последовательноти. Получим $a_1 = 2$, $a_2 = 2.25$, $a_3 = 2.37$, $a_4 = 2.441$, $a_5 = 2.488$. Можно предположить, что последовательность a_n является возрастающей. Покажем это.

Воспользуемся формулой бинома Ньютона[2]

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{n!}{(n-r)!r!}x^r + \cdots,$$

где $x^2 < 1$. Эта формула содержит $(n+1)$ слагаемое.

Используя эту формулу запишем последовательность a_n в виде

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$

$$= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-(n-1))}{1\dot{2}\cdots n}\frac{1}{n^n} + \cdots +$$

Перепишем эту формулу

$$a_n =$$

$$= 2 + \frac{1}{1\cdot 2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) + \cdots +$$

[2]Вывод см., например, Н.Я.Виленкин и др. Алгебра и математический анализ для 10 класса,М., "Просвещение" 1995, С.211

С увеличением n увеличивается число положительных слагаемых (их в этой формуле $n+1$), а также величина каждого слагаемого, т.е.

$$a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots.$$

Последовательность a_n ограничена. Это следует из последней формулы для a_n, если опустить множители, стоящие в круглых скобках, каждый из которых меньше единицы.

$$a_n < 2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

Кроме того

$$a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Нетрудно видеть, что сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots \frac{1}{2^{n-1}}$$

представляет собой геометрическую прогрессию с первым ченом $a = 0.5$ и знаменателем $q = \dfrac{1}{2}$. Ее сумма

$$S_{n-1} = \frac{a(q^{n-1})}{q-1} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}} < 1.$$

Поэтому последовательность a_n ограничена сверху $a_n < 2 + 1 = 3$.

Определение. *Числом e (вторым замечательным пределом) называется предел числовой последовательности*

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e – иррациональное число

$$e = 2.718281828\cdots$$

Первые десять цифр этого числа нетрудно запомнить, используя следующее правило. Вначале 2.7, а затем дважды "Лев Толстой", т.е. год рождения Льва Николаевича Толстого 1828.

Можно показать, что функция

$$y(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ таже имеет предел, равный e.

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Заменяя x на $x = 1/t$ получим еще одну запись числа e

$$e = \lim_{t\to 0}(1 + t)^{1/t}.$$

Число e (число Эйлера или неперово число) играет важную роль в математическом анализе.

Функция $y = e^x$ носит название *экспоненты.* Если показатель экспоненты громоздкий, то ее принято записывать в виде: $\exp(x)$.

Логарифм по основанию e называтся натуральным. Его обозначают символом ln, т.е. $\log_e x = \ln x$.

Важную роль в математическом анализе играют также *гиперболические функции* (*гиперболический синус, гиперболический косинус, гиперболический тангенс*), определяемые формулами:

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{2};$$

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{2};$$

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

Рассмотрим примеры нахождения некоторых пределов с использованием второго замечательного предела.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = \lim_{x\to 0} \ln(1 + x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} \ln e = 1.$$

Итак $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = 1.$

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

Пусть $a^x-1=u$. Тогда $a^x=1+u$; $x=\dfrac{\ln(1+u)}{\ln a}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u\ln a}{\ln(1+u}=\ln a\cdot\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=\ln a\cdot 1=\ln a.$$

Итак $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}$, где m – действительное число.

Рассмотрим частный случай, когда m – натуральное. Воспользуемся формулой бинома Ньютона. Тогда

$$\frac{(1+x)^m-1}{x}=\frac{mx+\dfrac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\cdots}{x}=m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x+\cdots,$$

и

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=\lim_{x\to 0}\left[m+\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x+\cdots\right]=m.$$

Итак $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^m-1}{x}=m$.

Пример.

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)^{F(x)}$, где $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$.

Пусть $f(x)=1+g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ и

$$\lim_{x\to\infty}f(x)^{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\left[1+g(x)\right]^{\dfrac{1}{g(x)}\cdot g(x)F(x)}.$$

Но

$$\lim_{x\to\infty}\left[1+g(x)\right]^{\dfrac{1}{g(x)}}=\lim_{g\to 0}\left[1+g\right]^{\dfrac{1}{g}}=e,$$

и

$$\lim_{x\to\infty}f(x)^{F(x)}=\exp\left[\lim_{x\to\infty}g(x)F(x)\right].$$

Итак $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)^{F(x)} = \exp\left\{\lim\limits_{x\to\infty}[(f(x)-1)]F(x)\right\}$.

С помощью полученной формулы найдем предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{2+x}\right)^{3x}$. Здесь $f(x) = \left(\dfrac{x}{2+x}\right)$, а $F(x) = 3x$. Получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{3x} = \exp\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}-1\right)3x\right] = e^{-6}.$$