Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«МАТИ» - Российский государственный технологический
университет им. К.Э.Циолковского

Кафедра «Высшая математика»

Практические указания по векторной алгебре

(варианты курсовых работ)

Составители: Заварзина И. Ф.
Ионова А. С.
Кулакова Р. Д.

Москва 2006

Содержание.

Введение.

Методические указания по векторной алгебре предназначены для студентов 1 курса всех специальностей дневного и вечернего отделений. Методические указания по векторной алгебре содержат примеры решения некоторых задач векторной алгебры с необходимыми теоретическими обоснованиями этих решений, а также варианты курсовых работ и теоретические вопросы к защите курсовых работ.

1. Основные понятия векторной алгебры; примеры решения задач.

Основные понятия включают в себя: понятие вектора, разложение вектора по другим векторам, модуль вектора, скалярное произведение, векторное произведение и смешанное произведение, а также их приложения для решения задач.

<u>Пример 1</u>. <u>Задание</u>. Разложить вектор $\bar{a} = \{4, 2, 0\}$ по векторам $\bar{p} = \{1, -1, 2\}$, $\bar{q} = \{2, 2, -1\}$, $\bar{r} = \{3, 7, -7\}$.

Прежде чем привести решение задачи напомним понятие линейной зависимости системы векторов.

Рассмотрим систему векторов $\bar{x}_1,\ \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ и составим равенство вида:

$c_1 \cdot \bar{x}_1,\ c_2 \cdot \bar{x}_2, \ldots, c_n \cdot \bar{x}_n = \bar{0}$, где $c_1,\ c_2, \ldots, c_n$ – постоянные величины. Если это равенство выполняется только при одновременном равенстве нулю всех c_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, то есть $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \bar{x}_i = \bar{0}$, тогда система векторов называется линейно независимой , в противном случае – система векторов линейно зависима, то есть один вектор можно представить в виде линейной комбинации других векторов.

$c_1 \cdot \bar{x}_1,\ c_2 \cdot \bar{x}_2, \ldots, c_n \cdot \bar{x}_n = \bar{0}$, и пусть $c_1 \neq 0$. Разделим левую и правую части равенства на c_1, получим:

$$\bar{x}_1 + \frac{c_2}{c_1} \cdot \bar{x}_2 + \ldots + \frac{c_n}{c_1} \cdot \bar{x}_n = \bar{0};$$

$$\bar{x}_1 = -\frac{c_2}{c_1} \cdot \bar{x}_2 - \ldots - \frac{c_n}{c_1} \cdot \bar{x}_n,$$

то есть вектор $\overline{x}_1$ представлен в виде линейной комбинации $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2, \mathbf{K}, \overline{x}_n$.

Решение.

Разложить вектор $\overline{a}$ по векторам $\overline{p},\ \overline{q},\ \overline{r}$ это значит представить его в виде линейной комбинации $\overline{a} = c_1\overline{p} + c_2\overline{q} + c_3\overline{r}$, где c_1, c_2, c_3 – искомые числа.

Представим линейную комбинацию в координатной форме

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

И получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 4 = c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 2 = -c_1 + 2c_2 + 7c_3 \\ 0 = 2c_1 - c_2 - 7c_3 \end{cases}$$

Решение системы имеет вид: $c_1 = 3; c_2 = -1; c_3 = 1.$

Следовательно: $\overline{a} = 3\overline{p} - \overline{q} + \overline{r}$.

Пример 2.

Напомним понятие длины вектора (модуля вектора)

Если $\overline{a} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, то

$|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; $|\overline{a}|$ – называется длиной вектора.

Рассмотрим свойство скалярного произведения: $\overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}| \cdot |\overline{a}|$, то есть $|\overline{a}|^2 = \overline{a} \cdot \overline{a}$.

Задание.

Найти длину вектора $\overline{p} + 2\overline{q}$, если

$$\overline{p} = \overline{a} - \overline{b};\ \overline{q} = \overline{a} + 2\overline{b};\ |\overline{a}| = 1;\ |\overline{b}| = 3;\ (\overline{a} \wedge \overline{b}) = \frac{2}{3}p.$$

Решение. Имеем

$$2\overline{q} = 2\cdot\left(\overline{a} + 2\overline{b}\right) = 2\overline{a} + 4\overline{b};$$

$$\overline{p} = \overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + \left(-\overline{b}\right);$$

$$\overline{p} + 2\overline{q} = 2\overline{a} + 4\overline{b} + \overline{a} + \left(-\overline{b}\right) = 3\overline{a} + 3\overline{b};$$

$$\left|\overline{p} + 2\overline{q}\right|^2 = \left(3\overline{a} + 3\overline{b}\right)\cdot\left(3\overline{a} + 3\overline{b}\right) = 9\cdot\left(\overline{a} + \overline{b}\right)^2 = 9\cdot\left(\overline{a}^2 + 2\overline{a}\cdot\overline{b} + \overline{b}^2\right) =$$

$$= 9\cdot\left(1 + 2\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\frac{2}{3}p + 9\right) = 9\cdot\left(1 + 2\cdot 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right) + 9\right) = 9\cdot(1 - 3 + 9) = 63;$$

$$\left|\overline{p} + 2\overline{q}\right| = \sqrt{63}.$$

<u>Пример 3</u>.

Напомним определение коллинеарности двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ отличных от нуля: два вектора $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются коллинеарными, если $\overline{a} = l\ \overline{b}$, где l – некоторый постоянный множитель.

<u>Задание.</u>

Найти вектор $\overline{a}$, коллинеарный вектору $\overline{x} = \{2, 1, -2\}$ и удовлетворяющий условию: скалярное произведение векторов $\overline{x}\cdot\overline{a} = 27$.

<u>Решение</u>.

Запишем условие коллинеарности двух векторов $\overline{a} = l\ \overline{x}$ и полученный вектор $\overline{a}$ подставим в условие

$$\overline{x}\cdot\overline{a} = 27;$$

$$\overline{x}\cdot l = 27,\ \ l\cdot\left|\overline{x}\right|^2 = 27,\ \ l\cdot\left|2^2 + 1^2 + (-2)^2\right| = 27,\ \ 9l = 27,\ \ l = 3.$$

Следовательно $\overline{a} = 3\cdot\overline{x} = \{6, 3, -6\}$.

<u>Пример 4</u>.

Напомним определение скалярного произведения векторов:

$\overline{a}\ \cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\ \cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\left(\overline{a}\ \wedge\overline{b}\right)$ или $\overline{a}\ \cdot\overline{b} = \left|\overline{a}\right|\ \cdot_{\overline{a}}\overline{b} = \left|\overline{b}\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}$.

<u>Задание</u>.

Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ на направление вектора $\overline{b} + \overline{c}$, если $\overline{a} = \{1, -3, 4\}$, $\overline{b} = \{3, -4, 2\}$, $\overline{c} = \{-1, 1, 4\}$.

<u>Решение</u>.

Обозначим $\overline{b} + \overline{c} = \overline{d}$, тогда $\overline{d} = \{2, -3, 6\}$

$\overline{a}\cdot\overline{d} = \left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{d}\right|\cos\left(\overline{a}\wedge\overline{d}\right) = \left|\overline{d}\right|\cdot np_{\overline{d}}\overline{a}$, отсюда

$$np_{\overline{d}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{d}}{|\overline{d}|};\ np_{\overline{d}}\overline{a}=\frac{1\cdot 2+(-3)\sqrt{(-3)+4\cdot 6}}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{35}{7}=5.$$

Ответ: 5.

Пример 5.

Пусть $\overline{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ и $\overline{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$. Напомним, что векторное произведение двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ равно:

$$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k},$$

где:

$$x=y_1z_2-y_2z_1;$$

$$y=x_2z_1-x_1z_2;$$

$$z=x_1y_2-x_2y_1.$$

Модуль векторного произведения равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

Задание.

Найти площадь треугольника ABD, если $A(1,1,1)$; $B(2,0,1)$; $D(1,2,-1)$.

Решение.

Построим параллелограмм $ABCD$ на векторах AB и AD (рис. 1):

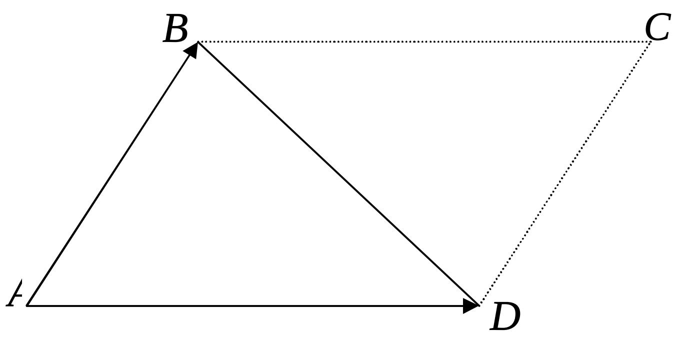

рис. 1

$$\overline{AB}=\{1,-1,0\};$$

$$\overline{AC}=\{0,1,-2\}.$$

$$\overline{AB}\times\overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2\overline{i} + 2\overline{j} + \overline{k}$$

$$S_{ABCD} = \left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ (кв.ед.)}$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2}\cdot S_{ABCD} = \frac{3}{2} \text{ (кв.ед.)}$$

<u>Пример 6</u>.

<u>Задание</u>.

Найти вектор $\overline{x}$, перпендикулярный векторам $\overline{a} = \{1,1,1\}$ и $\overline{b} = \{2,0,3\}$ и образующий с осью OX тупой угол, если $|x| = \sqrt{6}$.

<u>Решение</u>.

Если $\overline{c} = \overline{a}\times\overline{b}$, тогда вектор $\overline{c}$ перпендикулярен векторам $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

Найдем вектор $\overline{c}$: $\overline{c} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \overline{i} + \overline{j} - 2\overline{k}.$

Так как $\overline{x}$ тоже перпендикулярен $\overline{a}$ и $\overline{b}$, следовательно вектора $\overline{x}$ и $\overline{c}$ - коллинеарны. Запишем условие коллинеарности векторов: $\overline{x} = l\,\overline{c}$,
$\overline{x} = \{l, l, -2l\}$.

По условию $|\overline{x}| = \sqrt{6}$, то есть

$\sqrt{l^2 + l^2 + 4l^2} = \sqrt{6};\ |l| = 1,$ отсюда $l_1 = -1;\ l_2 = 1.$

Так как вектор $\overline{x}$ образует с осью OX тупой угол, то его проекция на ось OX должна быть отрицательной.

Отсюда $l = -1,$ а $\overline{x} = \{-1,-1,2\}.$

<u>Пример 7</u>.

Рассмотрим вектор $\overline{a} = \{x, y, z\}$. Вектор $\overline{a}$ образует с осями координат углы a, b, g, а $\cos a$, $\cos b$, $\cos g$ называются направляющими косинусами, при этом $\cos a = \frac{x}{|\overline{a}|}$, $\cos b = \frac{y}{|\overline{a}|}$, $\cos g = \frac{z}{|\overline{a}|}$.

<u>Задание</u>.

Найти направляющие косинусы вектора силы $\overline{F} = \{1,-1,1\}$, приложенной в точке $B(5,1,0)$, и момент этой силы относительно точки $A(3,2,-1)$.

Решение.

Найдем направляющие косинусы вектора силы:

$$\cos a = \frac{F_x}{|F|} = \frac{1}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos b = \frac{F_y}{|F|} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos g = \frac{F_z}{|F|} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Момент силы определим как векторное произведение вектора $\overline{AB}$ на вектор $\overline{F}$. Имеем

$$\overline{AB} = \{2, -1, 1\}$$

$$\overline{F} = \{1, -1, 1\}$$

$$\overline{m} = \overline{AB} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\overline{j} - \overline{k}$$

$$\overline{m} = \{0, -1, -1\}.$$

Пример 8.

Напомним формулу смешанного произведения трех векторов $\overline{a},\ \overline{b},\ \overline{c}$:

$$\overline{a} = \{x_1, y_1, z_1\}\ \overline{b} = \{x_2, y_2, z_2\}\ \overline{c} = \{x_3, y_3, z_3\}.$$

$$\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Известно, что модуль смешанного произведения $|\overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c}|$ равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Задача.

Найти длину высоты пирамиды, опущенной из вершины D (рис. 2), если ее вершины $A(2,3,1)$, $B(4,1,-2)$, $C(6,3,7)$ и $D(-5,-4,8)$.

Решение.

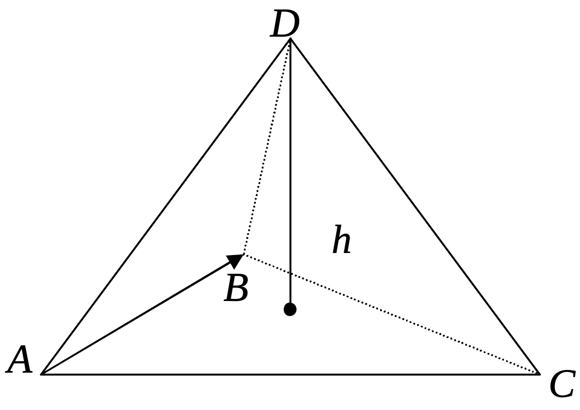

рис. 2

Найдем векторы:

$\overline{AB} = \{2, -2, -3\};$

$\overline{AC} = \{4, 0, 6\};$

$\overline{AD} = \{-7, -7, 7\}.$

Объем пирамиды, построенной на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен одной шестой модуля смешанного произведения этих векторов.

$V = \frac{1}{6}\left|\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD}\right|$ или $V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h$, где h – высота пирамиды, а площадь прямоугольника, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ равна одной второй векторного произведения $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$.

Вычислим смешанное произведение векторов

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 308$$

Отсюда V пирамиды $= \frac{1}{6} \cdot 308 = \frac{154}{3}$.

Вычислим векторное произведение векторов:

$$\overline{AB} \times \overline{AC} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\overline{i} + 24\overline{j} + 8\overline{k}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac{28}{2} = 14;$$

Найдем высоту пирамиды:

$$h=\frac{3\cdot V}{S_{\triangle ABC}}=\frac{3\cdot 154}{3\cdot 14}=11;\ \ \underline{h=11}.$$

2. Теоретические вопросы к защите курсовой работы.

1. Определение вектора. Линейные операции над векторами, свойства этих операций.
2. Разложение вектора по двум векторам на плоскости. Доказать возможность и единственность такого разложения.
3. Разложение вектора по трем векторам в пространстве.
4. Проекции вектора на ось. Свойства проекции.
5. Разложение вектора по координатным ортам. Координаты вектора. Направляющие векторы, вывод формулы $\cos^2 g + \cos^2 b + \cos^2 a = 1$.
6. Условия коллинеарности и компланарности векторов в векторной и координатной форме.
7. Радиус-вектор точки. Модуль вектора. Расстояние между двумя точками.
8. Вывод формулы деления отрезка в данном отношении.
9. Скалярное произведение векторов, его физическое толкование. Свойства скалярного произведения.
10. Проекция вектора на вектор. Угол между векторами. Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов.
11. Скалярное произведение векторов в координатной форме.
12. Векторное произведение двух векторов, его физическое толкование.
13. Векторное произведение векторов в координатной форме.
14. Геометрические приложения векторного произведения.
15. Свойства векторного произведения.
16. Смешанное произведение трех векторов в координатной форме.
17. Необходимое и достаточное условие компланарности векторов.
18. Смешанное произведение векторов в координатной форме.
19. Свойства смешанного произведения.

3. Варианты курсовых работ.

Задача № 1.

Написать разложение вектора $\overline{x}$ по векторам $\overline{p}$, $\overline{q}$, $\overline{r}$.

№ п/п	$\overline{x}$	$\overline{p}$	$\overline{q}$	$\overline{r}$
1.1	(-2, 4, 7)	(0, 1, 2)	(1, 0, 1)	(-1, 2, 4)
1.2	(6, 12, -1)	(1, 3, 0)	(2, -1, 1)	(0, -1, 2)
1.3	(1, -4, 4)	(2, 1, -1)	(0, 3, 2)	(1, -1, 1)
1.4	(-9, 5, 5)	(4, 1, 1)	(2, 0, -3)	(-1, 2, 1)
1.5	(-5, -5, 5)	(-2, 0, 1)	(1, 3, -1)	(0, 4, 1)
1.6	(13, 2, 7)	(5, 1, 0)	(2, -1, 3)	(1, 0, -1)
1.7	(-19, -1, 7)	(0, 1, 1)	(-2, 0, 1)	(3, 1, 0)
1.8	(3, -3, 4)	(1, 0, 2)	(0, 1, 1)	(2, -1, 4)
1.9	(2, 2, -1)	(3, 11, 0)	(-1, 2, 1)	(-1, 0, 2)
1.10	(-1, 7, -4)	(-1, 2, 1)	(2, 0, 3)	(1, 1, -1)
1.11	(6, 5, -14)	(1, 1, 4)	(0, -3, 2)	(2, 1, -1)
1.12	(6, -1, 7)	(1, -2, 0)	(-1, 1, 3)	(1, 0, 4)
1.13	(5, -15,0)	(1, 0, 5)	(-1, 3, 2)	(0, -1, 1)
1.14	(2, -1, 11)	(1, 1, 0)	(0, 1, -2)	(1, 0, 8)
1.15	(11, 5, -3)	(1, 0, 2)	(-1, 0, 1)	(2, 5, -3)
1.16	(8, 0, 5)	(2, 0, 1)	(1, 1, 0)	(4, 1, 2)
1.17	(3, 1, 8)	(0, 1, 3)	(1, 2, -1)	(2, 0, -1)
1.18	(8, 1, 12)	(1, 2, -1)	(3, 0, 2)	(-1, 1, 1)
1.19	(-9, -8, -3)	(1, 4, 1)	(-3, 2, 1)	(1, -1, 2)
1.20	(-5, 9, -13)	(0, 1, -2)	(3, -1, 1)	(4, 1, 0)
1.21	(-15, 5, 6)	(0, 5, 1)	(3, 2, -1)	(-1, 1, 0)
1.22	(8, 9, 4)	(1, 0, 1)	(0, -2, 1)	(1, 3, 0)
1.23	(23, -14, -30)	(2, 1, 0)	(1, -1, 0)	(-3, 2, 5)
1.24	(3, 1, 3)	(2, 1, 0)	(1, 0, 1)	(4, 2, 1)
1.25	(-1, 7, 0)	(0, 3, 1)	(1, -1, 2)	(2, -1, 0)
1.26	(11, -1, 4)	(1, -1, 2)	(3, 2, 0)	(-1, 1, 0)
1.27	(-13, 2, 18)	(1, 1, 4)	(-3, 0, 2)	(1, 2, -1)
1.28	(0, -8, 9)	(0, -2, 1)	(3, 1, -1)	(4, 0, 1)
1.29	(8, -7, -13)	(0, 1, 5)	(3, -1, 2)	(-1, 0, 1)
1.30	(2, 7, 5)	(1, 0, 1)	(1, -2, 0)	(0, 3, 1)

Задача № 2.

Определить коллинеарны ли векторы $\overline{c}_1$ и $\overline{c}_2$, построенные на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

№ п/п	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{c}_1$	$\overline{c}_2$
2.1	(1, -2, 3)	(3, 0, -1)	$2\overline{a}+4\overline{b}$	$3\overline{b}-\overline{a}$
2.2	(1, 0, -1)	(-2, 3, 5)	$\overline{a}+2\overline{b}$	$3\overline{a}-\overline{b}$
2.3	(-2, 4, 1)	(1, -2, 7)	$5\overline{a}+3\overline{b}$	$2\overline{a}-\overline{b}$
2.4	(1, 2, -3)	(2, -1, -1)	$4\overline{a}+3\overline{b}$	$8\overline{a}-\overline{b}$
2.5	(3, 5, 4)	(5, 9, 7)	$2\overline{a}+\overline{b}$	$3\overline{a}-2\overline{b}$
2.6	(1, 4, -2)	(1, 1, -1)	$\overline{a}+\overline{b}$	$4\overline{a}+2\overline{b}$
2.7	(1, -2, 5)	(3, -1, 0)	$4\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.8	(3, 4, -1)	(2, -1, 1)	$6\overline{a}-3\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.9	(2, -3, -2)	(1, 0, 5)	$3\overline{a}+9\overline{b}$	$\overline{a}-3\overline{b}$
2.10	(-1, 4, 2)	(3, -2, 6)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$3\overline{b}-6\overline{a}$
2.11	(5, 0, -1)	(7, 2, 3)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$3\overline{b}-6\overline{a}$
2.12	(0, 3, -2)	(1, -2, 1)	$5\overline{a}-2\overline{b}$	$3\overline{a}+5\overline{b}$
2.13	(-2, 7, -1)	(-3, 5, 2)	$2\overline{a}+3\overline{b}$	$3\overline{a}+2\overline{b}$
2.14	(3, 7, 0)	(1, -3, 4)	$4\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.15	(-1, 2, -1)	(2, -7, 1)	$6\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-3\overline{a}$
2.16	(7, 9, -2)	(5, 4, 3)	$4\overline{a}-\overline{b}$	$4\overline{b}-\overline{a}$
2.17	(5, 0, -2)	(6, 4, 3)	$5\overline{a}-3\overline{b}$	$6\overline{b}-10\overline{a}$
2.18	(8, 3, -1)	(4, 1, 3)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$2\overline{b}-4\overline{a}$
2.19	(3, -1, 6)	(5, 7, 10)	$4\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{a}-2\overline{b}$
2.20	(1, -2, 4)	(7, 3, 5)	$6\overline{a}-3\overline{b}$	$\overline{b}-2\overline{a}$
2.21	(3, 7, 0)	(4, 6, -1)	$3\overline{a}+2\overline{b}$	$5\overline{a}-7\overline{b}$
2.22	(2, -1, 4)	(3, -7, -6)	$2\overline{a}-3\overline{b}$	$3\overline{a}-2\overline{b}$
2.23	(5, -1, -2)	(6, 0, 7)	$3\overline{a}-2\overline{b}$	$4\overline{b}-6\overline{a}$
2.24	(-9, 5, 3)	(7, 1, -2)	$2\overline{a}-\overline{b}$	$3\overline{a}+5\overline{b}$
2.25	(4, 2, 9)	(0, -1, 3)	$4\overline{b}-3\overline{a}$	$4\overline{a}-3\overline{b}$
2.26	(2, -1, 6)	(-1, 3, 8)	$5\overline{a}-2\overline{b}$	$2\overline{a}-5\overline{b}$
2.27	(5, 0, 8)	(-3, 1, 7)	$3\overline{a}-4\overline{b}$	$12\overline{b}-9\overline{a}$
2.28	(-1, 3, 4)	(2, -1, 0)	$6\overline{a}-2\overline{b}$	$\overline{b}-3\overline{a}$
2.29	(4, 2, -7)	(5, 0, -3)	$\overline{a}-3\overline{b}$	$\overline{a}-3\overline{b}$
2.30	(2, 0, -5)	(1, -3, 4)	$2\overline{a}-5\overline{b}$	$2\overline{a}-5\overline{b}$

Задача № 3.

Найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

№ п/п	A	B	C
3.1	(6, 5, 1)	(0, 1, 2)	(2, 1, 0)
3.2	(5, 4, 2)	(1, 2, 3)	(3, 2, 1)
3.3	(2, 0, 4)	(1, 1, 1)	(3, 2, 1)
3.4	(1, 2, 3)	(2, -1, 0)	(3, 2, 1)
3.5	(1, -1, 2)	(5, -6, 2)	(2, 3, -1)
3.6	(3, -3, 1)	(-3, -2, 0)	(5, 0, 2)
3.7	(4, 2, 1)	(0, 4, 5)	(1, 2, 7)
3.8	(1, 0, 2)	(2, 4, 3)	(1, 7, 1)
3.9	(5, -1, 3)	(2, 0, 1)	(3, 1, -1)
3.10	(0, 8, 1)	(2, 1, 1)	(-1, 4, 5)
3.11	(1, 0, 4)	(0, 2, 3)	(-1, 1, 0)
3.12	(2, 3, 4)	(3, 4, 5)	(-4, 5, 6)
3.13	(1, -2, 3)	(0, -1, 2)	(3, -4, 5)
3.14	(0, -3, 6)	(-12, -3, -3)	(-9, -3, -6)
3.15	(3, 3, -1)	(5, 5, -2)	(4, 1, 1)
3.16	(-1, 2, -3)	(3, 4, -6)	(1, 1, -1)
3.17	(-4, -2, 0)	(-1, -2, 4)	(3, -2, 1)
3.18	(5, 3, -1)	(5, 2, 0)	(6, 4, -1)
3.19	(-3, -7, -6)	(0, -1, -2)	(2, 3, 0)
3.20	(2, -4, 6)	(0, -2, 4)	(6, -8, 10)
3.21	(0, 1, -2)	(3, 1, 2)	(4, 1, 1)
3.22	(3, 3, -1)	(1, 5, -2)	(4, 1, 1)
3.23	(2, 1, -1)	(6, -1, -4)	(4, 2, 1)
3.24	(-1, -2, 1)	(-4, -2, 5)	(-8, -2, 2)
3.25	(6, 2, -3)	(6, 3, -2)	(7, 3, -3)
3.26	(0, 0, 4)	(-3, -6, 1)	(-5, -10, -1)
3.27	(2, -8, -1)	(4, -6, 0)	(-2, -5, -1)
3.28	(3, -6, 9)	(0, 3, 6)	(9, -12, 15)
3.29	(0, 2, -4)	(8, 2, 2)	(6, 2, 4)
3.30	(3, 3, -1)	(5, 1, -2)	(4, 1, 1)

Задача № 4.

Определить направляющие косинусы вектора силы $\overline{F}$. Найти момент силы $\overline{F}$, приложенной в точке B, относительно точки A.

№ п/п	$\overline{F}$	B	A
4.1	(3, 3, 3)	(3, -1, 5)	(4, -2, 3)
4.2	(4, 4, 4)	(4, -2, 5)	(5, -3, 3)
4.3	(8, -8, 8)	(10, -8, 1)	(9, -7, 3)
4.4	(-2, 2, -2)	(11, -9, 1)	(10, -8, 3)
4.5	(5, 5, 5)	(5, -3, 5)	(6, -4, 3)
4.6	(-3, 3, -3)	(12, -10, 1)	(11, -9, 3)
4.7	(6, 6, 6)	(6, -4, 5)	(7, -5, 3)
4.8	(-4, 4, -4)	(13, -11, 1)	(12, -10, 3)
4.9	(7, 7, 7)	(7, -5, 5)	(8, -6, 3)
4.10	(-5, 5, -5)	(14, -12, 1)	(13, -11, 3)
4.11	(-1, -1, 1)	(8, -6, -5)	(9, -7, 3)
4.12	(3, 3, -3)	(0, 1, 2)	(2, -1, -2)
4.13	(-2, -2, -2)	(9, -7, 5)	(10, -8, 3)
4.14	(4, 4, -4)	(1, 0, 2)	(3, 2, -2)
4.15	(-3, -3, -3)	(10, -8, 5)	(11, -9, 3)
4.16	(5, 5, -5)	(2, -1, 2)	(4, -3, 2)
4.17	(-4, -4, -4)	(11, -9, 5)	(12, -10, 3)
4.18	(6, 6, -6)	(3, -2, 2)	(5, -4, -2)
4.19	(-5, -5, -5)	(12, -10, 5)	(13, -11, 3)
4.20	(7, 7, -7)	(4, -3, 2)	(6, -5, -2)
4.21	(3, -3, 3)	(5, -3, 1)	(4, -2, 3)
4.22	(8, 8, -8)	(5, -4, 2)	(7, -6, -2)
4.23	(4, -4, 4)	(6, -4, 1)	(5, -4, 3)
4.24	(-2, -2, 2)	(6, -5, 2)	(8, -7, -2)
4.25	(5, -5, 5)	(7, -5, 1)	(6, -4, 3)
4.26	(-3, -3, 3)	(7, -6, 2)	(9, -8, 2)
4.27	(6, -6, 6)	(8, -6, 1)	(7, -5, 3)
4.28	(-4, -4, 4)	(8, -7, 2)	(10, -9, -2)
4.29	(7, -7, 7)	(9, -7, 1)	(8, -6, 3)
4.30	(-5, -5, 5)	(9, -8, 2)	(11, -10, 2)

Задача № 5.

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$.

№ п/п	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\lvert\overline{p}\rvert$	$\lvert\overline{q}\rvert$	$\lvert\overline{p}\,\hat{}\,\overline{q}\rvert$
5.1	$\overline{p}+2\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	1	2	$\frac{p}{6}$
5.2	$3\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	4	1	$\frac{p}{4}$
5.3	$\overline{p}-3\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	$1/5$	1	$\frac{p}{2}$
5.4	$3\overline{p}-2\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	4	$1/2$	$\frac{5p}{6}$
5.5	$\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}+\overline{q}$	2	3	$\frac{3p}{4}$
5.6	$\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$\frac{p}{3}$
5.7	$2\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	3	2	$\frac{p}{2}$
5.8	$4\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	7	2	$\frac{p}{4}$
5.9	$\overline{p}-4\overline{q}$	$3\overline{p}+\overline{q}$	1	2	$\frac{p}{6}$
5.10	$\overline{p}+4\overline{q}$	$2\overline{p}-\overline{q}$	7	2	$\frac{p}{3}$
5.11	$3\overline{p}+2\overline{q}$	$\overline{p}-\overline{q}$	10	1	$\frac{p}{2}$
5.12	$4\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	5	4	$\frac{p}{4}$
5.13	$2\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	6	7	$\frac{p}{3}$
5.14	$3\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	3	4	$\frac{p}{4}$
5.15	$2\overline{p}+3\overline{q}$	$\overline{p}-2\overline{q}$	2	3	$\frac{p}{6}$
5.16	$2\overline{p}-3\overline{q}$	$3\overline{p}+\overline{q}$	4	1	$\frac{p}{6}$
5.17	$3\overline{p}-2\overline{q}$	$2\overline{p}+3\overline{q}$	2	5	$\frac{p}{6}$

5.18	$4\overline{p}-3\overline{q}$	$\overline{p}+2\overline{q}$	1	2	$\frac{p}{6}$
5.19	$\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+\overline{q}$	2	5	$\frac{p}{6}$
5.20	$5\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	5	3	$\frac{p}{6}$
5.21	$3\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	2	$\sqrt{2}$	$\frac{p}{4}$
5.22	$\overline{p}-4\overline{q}$	$\overline{p}+5\overline{q}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{p}{6}$
5.23	$5\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-3\overline{q}$	1	2	$\frac{p}{3}$
5.24	$7\overline{p}-2\overline{q}$	$\overline{p}+3\overline{q}$	$1/2$	2	$\frac{p}{2}$
5.25	$6\overline{p}-\overline{q}$	$\overline{p}+\overline{q}$	3	4	$\frac{p}{4}$
5.26	$10\overline{p}+\overline{q}$	$3\overline{p}-2\overline{q}$	4	1	$\frac{p}{6}$
5.27	$6\overline{p}-\overline{q}$	$2\overline{p}+3\overline{q}$	8	$1/2$	$\frac{p}{3}$
5.28	$3\overline{p}+4\overline{q}$	$\overline{q}-\overline{p}$	2,5	2	$\frac{p}{2}$
5.29	$7\overline{p}+\overline{q}$	$\overline{p}-3\overline{q}$	3	1	$\frac{3p}{4}$
5.30	$\overline{p}+3\overline{q}$	$3\overline{p}-\overline{q}$	3	5	$\frac{2p}{3}$

Задача № 6.

Определить компланарны ли вектора $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$.

№ п/п	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
6.1	(2, 3,1)	(-1, 0, -1)	(2, 2, 2)
6.2	(3, 2, 1)	(2, 3, 4)	(3, 1, -1)
6.3	(1, 5, 2)	(-1, 1, -1)	(1, 1, 1)
6.4	(1, -1, -3)	(3, 2, 1)	(2, 3, 4)
6.5	(3, 3, 1)	(1, -2, 1)	(1, 1, 1)
6.6	(3, 1, -1)	(-2, -1, 0)	(5, 2, -1)
6.7	(4, 3, 1)	(1, -2, 1)	(2, 2, 2)
6.8	(4, 3, 1)	(6, 7, 4)	(2, 0, -1)
6.9	(3, 2, 1)	(1, -3, -7)	(1, 2, 3)
6.10	(3, 7, 2)	(-2, 0, -1)	(2, 2, 1)
6.11	(1, -2, 6)	(1, 0, 1)	(2, -6, 17)
6.12	(6, 3, 4)	(-1, -2, -1)	(2, 1, 2)
6.13	(7, 3, 4)	(-1, -2, -1)	(4, 2, 4)
6.14	(2, 3, 2)	(4, 7 , 5)	(2, 0, -1)
6.15	(5, 3, 4)	(-1, 0, -1)	(4, 2, 4)
6.16	(3, 10, 5)	(-3, -2, -3)	(2, 4, 3)
6.17	(-2, -4, -3)	(4, 3, 1)	(6, 7, 4)
6.18	(3, 1, -1)	(1, 0, -1)	(8, 3, -2)
6.19	(4, 2, 2)	(-3, -3, -3)	(2, 1, 2)
6.20	(4, 1, 2)	(9, 2, 5)	(1, 1, -1)
6.21	(5, 3, 4)	(4, 3, 3)	(9, 5, 8)
6.22	(3, 4, 2)	(1, 1, 0)	(8, 11, 6)
6.23	(4, -1, -6)	(1, -3, -7)	(2, -1, -4)
6.24	(3, 1, 0)	(-5, -4, -5)	(4, 2, 4)
6.25	(3, 0, 3)	(8, 1, 6)	(1, 1, -1)
6.26	(1, -1, 4)	(1, 0, 3)	(1, -3, 8)
6.27	(6, 3, 4)	(-1, -2, -1)	(2, 1, 2)
6.28	(4, 1, 1)	(-9, -4, -9)	(6, 2, 6)
6.29	(-3, 3, 3)	(-4, 7, 6)	(3, 0, -1)
6.30	(-7, 10, -5)	(0, -2, -1)	(-2, 4, -1)

Задача № 7.

Вычислить объем пирамиды с вершинами в точках A, B, C и D и ее высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

№ п/п	A	B	C	D
7.1	(0, 1, 2)	(2, 1, 7)	(2, 7, 4)	(0, 0, 4)
7.2	(1, 2, 3)	(2, 8, -4)	(0, 5, 4)	(2, 9, 4)
7.3	(1, 1, 1)	(2, 4, -2)	(2, 0, 2)	(0, 1, -1)
7.4	(1, -1, 1)	(0, 2, 3)	(1, -1, 0)	(0, 2, 2)
7.5	(2, 1, 3)	(4, -2, 0)	(1, 3, -3)	(7, 5, 2)
7.6	(-2, 0, 4)	(1, 3, -1)	(4, -1, 3)	(2, 7, 3)
7.7	(1, 2, 3)	(0, 0, 0)	(1, 4, 3)	(1, 8, -1)
7.8	(-1, 2, 0)	(1, 0, 3)	(0, 2, 2)	(1, 8, 3)
7.9	(2, -1, 1)	(3, 3, 2)	(2, 1, 0)	(4, 1, -3)
7.10	(2, 1, -1)	(-3, 1, 2)	(0, 1, 2)	(-1, 8, 3)
7.11	(-2, 1, 1)	(5, 5, 4)	(3, 2, -1)	(4, 1, 3)
7.12	(0, 1, -1)	(3, -1, 5)	(1, 0, 4)	(3, 5, 7)
7.13	(1, 1, 2)	(-1, 1, 3)	(2, -2, 4)	(-1, 0, -2)
7.14	(2, 3, 1)	(4, 1, -2)	(6, 3, 7)	(7, 5, -3)
7.15	(1, 1, -1)	(2, 3, 1)	(3, 2, 1)	(5, 9, -8)
7.16	(1, 5, -7)	(-3, 5, 3)	(-2, 7, 3)	(-4, 8, -12)
7.17	(-3, 4, -7)	(1, 5, -4)	(-6, -2, 0)	(2, 5, 4)
7.18	(-1, 2, -3)	(4, -1, 0)	(2, 1, -2)	(3, 4, 5)
7.19	(4, -1, 3)	(-2, 1, 0)	(0, -5, 1)	(3, 2, -6)
7.20	(1, -1, 1)	(-2, 0, 3)	(2, 1, -1)	(2, -2, -4)
7.21	(1, 2, 0)	(1, -1, 2)	(0, 1, -1)	(-3, 0, 1)
7.22	(1, 0, 2)	(1, 2, -1)	(2, -2, 1)	(2, 1, 0)
7.23	(1, 2, -3)	(1, 0, 1)	(-2, -1, 6)	(0, -5, -4)
7.24	(3, 10, -1)	(-2, 3, -5)	(-6, 0, -3)	(1, -1, 2)
7.25	(-1, 2, 4)	(-1, -2, -4)	(3, 0, -1)	(7, -3, 1)
7.26	(0, -3, 1)	(-4, 1, 2)	(2, -1, 5)	(3, 1, -4)
7.27	(1, 3, 0)	(4, -1, 2)	(3, 0, 1)	(-4, 3, 5)
7.28	(-2, -1, -1)	(0, 3, 2)	(3, 1 , -4)	(-4, 7, 3)
7.29	(-3, -5, 6)	(2, 1, -4)	(0, -3, -1)	(-5, 2, -8)
7.30	(2, -4, -3)	(5, 6, 0)	(-1, 3, -3)	(-10, -8, 7)

6. Список литературы.

1. Я. С. Бугров, С. Н. Никольский.
Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.

2. П. Е. Данко, А. Г. Попов, т. Я. Кожевникова.
Высшая математика в упражнениях и задачах.