Министерство образования Российской Федерации

“МАТИ”- РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. К. Э. ЦИОЛКОВСКОГО

Кафедра “Высшая математика”

Н. Д. ВЫСК

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ

Москва 2003 г.

Лекция 1.
Предмет теории вероятностей. Случайные события. Алгебра событий. Относительная частота и вероятность случайного события. Полная группа событий. Классическое определение вероятности. Основные свойства вероятности. Основные формулы комбинаторики.

В различных разделах науки и техники нередко возникают ситуации, когда результат каждого из многих проводимых опытов заранее предугадать невозможно, однако можно исследовать закономерности, возникающие при проведении серии опытов. Нельзя, например, точно сказать, какая сторона монеты окажется сверху при данном броске: герб или цифра – но при большом количестве бросков число выпадений герба приближается к половине количества бросков; нельзя заранее предсказать результат одного выстрела из данного орудия по данной цели, но при большом числе выстрелов частота попадания приближается к некоторому постоянному числу. Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет предмет **теории вероятностей**.

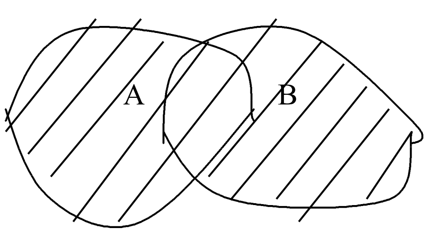
Основным интуитивным понятием классической теории вероятностей является **случайное событие**. События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:
а) **достоверное событие** – событие, которое всегда происходит при проведении опыта;
б) **невозможное событие** – событие, которое в результате опыта произойти не может;
в) **случайное событие** – событие, которое может либо произойти, либо не произойти.
Например, при броске игральной кости достоверным событием является выпадение числа очков, не превышающего 6, невозможным – выпадение 10 очков, а случайным – выпадение 3 очков.

Алгебра событий.

Определение 1.1. **Суммой А+В** двух событий А и В называют событие, состоящее в том, что произошло хотя бы одно из событий А и В. **Суммой нескольких событий**, соответственно, называется событие, заключающееся в том, что произошло хотя бы одно из этих событий.

Пример 1. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Если событие А – попадание первого стрелка, а событие В – второго, то сумма А+В – это хотя бы одно попадание при двух выстрелах.
Пример 2. Если при броске игральной кости событием A_i назвать выпадение i очков, то выпадение нечетного числа очков является суммой событий $A_1+A_2+A_3$.

Назовем все возможные результаты данного опыта его *исходами* и предположим, что множество этих исходов, при которых происходит событие А (исходов, *благоприятных* событию А), можно представить в виде некоторой области на плоскости. Тогда множество исходов, при которых произойдет событие А+В, является объединением множеств исходов, благоприятных событиям А или В (рис. 1).



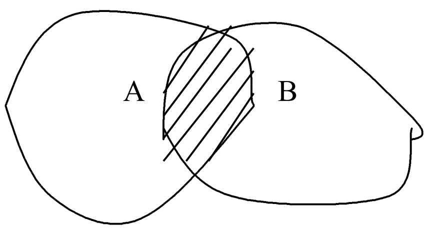
A + B

Рис.1.

Определение 1.2. **Произведением АВ** событий А и В называется событие, состоящее в том, что произошло и событие А, и событие В. Аналогично **произведением нескольких событий** называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.

Пример 3. В примере 1 (два выстрела по мишени) событием АВ будет попадание обоих стрелков.
Пример 4. Если событие А состоит в том, что из колоды карт извлечена карта пиковой масти, а событие В – в том, что из колоды вынута дама, то событием АВ будет извлечение из колоды дамы пик.

Геометрической иллюстрацией множества исходов опыта, благоприятных появлению произведения событий А и В, является пересечение областей, соответствующих исходам, благоприятным А и В.

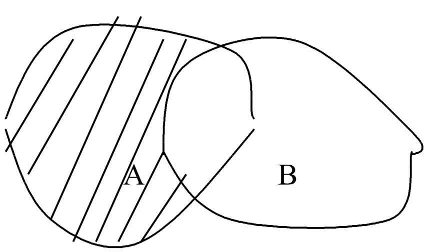


AB

Рис.2.

Определение 1.3. **Разностью А\В** событий А и В называется событие, состоящее в том, что А произошло, а В – нет.

Пример 5. Вернемся к примеру 1, где А\ В – попадание первого стрелка при промахе второго.
Пример 6. В примере 4 А\В – извлечение из колоды любой карты пиковой масти, кроме дамы. Наоборот, В \А – извлечение дамы любой масти, кроме пик.



A - B

Рис.3.

Введем еще несколько категорий событий.
Определение 1.4. События А и В называются **совместными**, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае (то есть если они не могут произойти одновременно) события называются **несовместными.**
Примеры: совместными событиями являются попадания двух стрелков в примере 1 и появление карты пиковой масти и дамы в примере 4; несовместными – события A_1 – A_6 в примере 2.

Замечание 1. Если изобразить графически области исходов опыта, благоприятных несовместным событиям, то они не будут иметь общих точек.
Замечание 2. Из определения несовместных событий следует, что их произведение является невозможным событием.

Определение 1.5. Говорят, что события $A_1, A_2,\ldots,A_n$ образуют **полную группу**, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из событий этой группы.

Замечание. В частности, если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате опыта произойдет *одно и только одно* из них. Такие события называют **элементарными событиями**.

Пример. В примере 2 события $A_1 – A_6$ (выпадение одного, двух,…, шести очков при одном броске игральной кости) образуют полную группу несовместных событий.

Определение 1.6. События называются **равновозможными**, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое.

Примеры: выпадение любого числа очков при броске игральной кости, появление любой карты при случайном извлечении из колоды, выпадение герба или цифры при броске монеты и т.п.

Классическое определение вероятности.

При изучении случайных событий возникает необходимость количественно сравнивать возможность их появления в результате опыта. Например, при последовательном извлечении из колоды пяти карт более возможна ситуация, когда появились карты разных мастей, чем появление пяти карт одной масти; при десяти бросках монеты более возможно чередование гербов и цифр, нежели выпадение подряд десяти гербов, и т.д. Поэтому с каждым таким событием связывают по определенному правилу некоторое число, которое тем больше, чем более возможно событие. Это число называется **вероятностью события** и является вторым основным понятием теории вероятностей. Отметим, что само понятие вероятности, как и понятие случайного события, является аксиоматическим и поэтому не поддается строгому определению. То, что в дальнейшем будет называться различными определениями вероятности, представляет собой способы вычисления этой величины.

Определение 1.7. Если все события, которые могут произойти в результате данного опыта,
а) попарно несовместны;
б) равновозможны;
в) образуют полную группу,
то говорят, что имеет место **схема случаев.**

Можно считать, что случаи представляют собой все множество исходов опыта. Пусть их число равно n (число возможных исходов), а при m из них происходит некоторое событие А (число благоприятных исходов).

Определение 1.8. **Вероятностью события А** называется отношение числа исходов опыта, благоприятных этому событию, к числу возможных исходов:

$$p(A) = \frac{m}{n} \quad - \qquad (1.1)$$

- *классическое определение вероятности*.

Свойства вероятности.

Из определения 1.8 вытекают следующие свойства вероятности:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.
Доказательство. Так как достоверное событие всегда происходит в результате опыта, то все исходы этого опыта являются для него благоприятными, то есть $m = n$, следовательно, $P(A) = 1$.

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.
Доказательство. Для невозможного события ни один исход опыта не является благоприятным, поэтому $m = 0$ и $p(A) = 0$.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.
Доказательство. Случайное событие происходит при некоторых исходах опыта, но не при всех, следовательно, $0 < m < n$, и из (1.1) следует, что $0 < p(A) < 1$.

Пример. Из урны, содержащей 6 белых и 4 черных шара, наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.
Решение. Будем считать элементарными событиями, или исходами опыта, извлечение из урны каждого из имеющихся в ней шаров. Очевидно, что эти события удовлетворяют всем условиям, позволяющим считать их схемой случаев. Следовательно, число возможных исходов равно 10, а число исходов, благоприятных событию А (появлению белого шара) – 6 (таково количество белых шаров в урне). Значит,

$$p(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{10} = 0{,}6.$$

Относительная частота. Статистическое определение вероятности.

Классическое определение вероятности применимо только для очень узкого класса задач, где все возможные исходы опыта можно свести к схеме случаев. В большинстве реальных задач эта схема неприменима. В таких ситуациях требуется определять вероятность события иным образом. Для этого введем вначале понятие **относительной частоты W(A)** события А как отношения числа опытов, в которых наблюдалось событие А, к общему количеству проведенных испытаний:

$$W(A) = \frac{M}{N}, \qquad (1.2)$$

где N – общее число опытов, M – число появлений события A.
Большое количество экспериментов показало, что если опыты проводятся в одинаковых условиях, то для большого количества испытаний относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число можно считать вероятностью рассматриваемого события.

Определение 1.9. **Статистической вероятностью события** считают его относительную частоту или число, близкое к ней.

Замечание 1. Из формулы (1.2) следует, что свойства вероятности, доказанные для ее классического определения, справедливы и для статистического определения вероятности.
Замечание 2. Для существования статистической вероятности события A требуется:

1) возможность производить неограниченное число испытаний;
2) устойчивость относительных частот появления A в различных сериях достаточно большого числа опытов.

Замечание 3. Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Пример. Если в задаче задается вероятность попадания в мишень для данного стрелка (скажем, $p = 0{,}7$), то эта величина получена в результате изучения статистики большого количества серий выстрелов, в которых этот стрелок попадал в мишень около семидесяти раз из каждой сотни выстрелов.

Основные формулы комбинаторики.

При вычислении вероятностей часто приходится использовать некоторые формулы *комбинаторики* – науки, изучающей комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества. Определим основные такие комбинации.

Определение 1.10. **Перестановки** – это комбинации, составленные из всех n элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n! \tag{1.3}$$

Пример. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?
Решение. $P_7 = 7! = 2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 = 5040$.

Определение 1.11. **Размещения** – комбинации из m элементов множества, содержащего n различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1). \tag{1.4}$$

Пример. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?
Решение. $A_{10}^3 = 10\cdot 9\cdot 8 = 720.$

Определение 1.12. **Сочетания** – неупорядоченные наборы из m элементов множества, содержащего n различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов). Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1.5}$$

Пример. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?
Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь не важен порядок финалистов, следовательно, ищем число сочетаний из 10 по 3:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120.$$

Лекция 2.

Геометрические вероятности. Теорема сложения вероятностей. Противоположные события. Условные вероятности. Теорема умножения вероятностей. Независимые события. Вероятность появления хотя бы одного события.

Одним из недостатков классического определения вероятности является то, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным количеством исходов. В таких случаях можно воспользоваться понятием **геометрической вероятности**.

Пусть на отрезок L наудачу брошена точка. Это означает, что точка обязательно попадет на отрезок L и с равной возможностью может совпасть с любой точкой этого отрезка. При этом вероятность попадания точки на любую часть отрезка L не зависит от расположения этой части на отрезке и пропорциональна его длине. Тогда вероятность того, что брошенная точка попадет на отрезок l, являющийся частью отрезка L, вычисляется по формуле:

$$p = \frac{l}{L}, \qquad (2.1)$$

где l – длина отрезка l, а L – длина отрезка L.

Можно дать аналогичную постановку задачи для точки, брошенной на плоскую область S и вероятности того, что она попадет на часть этой области s:

$$p = \frac{s}{S}, \qquad (2.1`)$$

где s – площадь части области, а S – площадь всей области.

В трехмерном случае вероятность того, что точка, случайным образом расположенная в теле V, попадет в его часть v, задается формулой:

$$p = \frac{v}{V}, \qquad (2.1``)$$

где v – объем части тела, а V – объем всего тела.

Пример 1. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в круг, не попадет в правильный шестиугольник, вписанный в него.

Решение. Пусть радиус круга равен R , тогда сторона шестиугольника тоже равна R. При этом площадь круга $S = pR^2$, а площадь шестиугольника $s = \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2$. Следовательно,

$$p = \frac{S - s}{S} = \frac{pR^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}R^2}{pR^2} = \frac{p - 3\sqrt{3}}{2p} \approx 0{,}174.$$

Пример 2. На отрезок AB случайным образом брошены три точки: C, D и M. Найти вероятность того, что из отрезков AC, AD и AM можно построить треугольник.

Решение. Обозначим длины отрезков AC, AD и AM через x, y и z и рассмотрим в качестве возможных исходов множество точек трехмерного пространства с координатами (x, y, z). Если принять длину отрезка равной 1, то эти множество возможных исходов представляет собой куб с ребром, равным 1. Тогда множество благоприятных исходов состоит из точек, для координат которых выполнены неравенства треугольника: $x + y > z$, $x + z > y$, $y + z > x$. Это часть куба, отрезанная от него плоскостями $x + y = z$, $x + z = y$, $y + z = x$

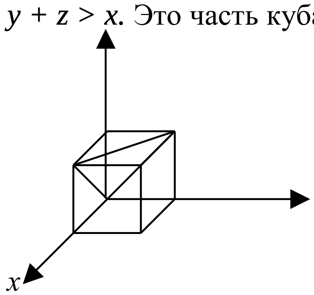


Рис.1.

(одна из них, плоскость $x + y = z$, проведена на рис.1). Каждая такая плоскость отделяет от куба пирамиду, объем которой равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{6}$. Следовательно, объем оставшейся части $v = 1-3\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$. Тогда $p=\frac{v}{V}=\frac{1}{2}:1=\frac{1}{2}$.

Теорема сложения вероятностей.

Теорема 2.1 (теорема сложения). Вероятность $p(A + B)$ суммы событий A и B равна

$$P(A + B) = p(A) + p(B) - p(AB). \tag{2.2}$$

Доказательство.

Докажем теорему сложения для схемы случаев. Пусть n – число возможных исходов опыта, m_A – число исходов, благоприятных событию A, m_B – число исходов, благоприятных событию B, а m_{AB} – число исходов опыта, при которых происходят оба события (то есть исходов, благоприятных произведению AB). Тогда число исходов, при которых имеет место событие $A + B$, равно $m_A + m_B - m_{AB}$ (так как в сумме $(m_A + m_B)$ m_{AB} учтено дважды: как исходы, благоприятные A, и исходы, благоприятные B). Следовательно, вероятность суммы можно определить по формуле (1.1):

$$p(A+B)=\frac{m_A+m_B-m_{AB}}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{m_{AB}}{n}=p(A)+p(B)-p(AB),$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Теорему 2.1 можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий A, B и C

$$P(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(AB) - p(AC) - p(BC) + p(ABC) \tag{2.3}$$

и т.д.

Следствие 2. Если события A и B несовместны, то $m_{AB} = 0$, и, следовательно, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = p(A) + p(B). \tag{2.4}$$

Определение 2.1. **Противоположными событиями** называют два несовместных события, образующих полную группу. Если одно из них назвать A, то второе принято обозначать $\bar{A}$.

Замечание. Таким образом, $\bar{A}$ заключается в том, что событие A не произошло.

Теорема 2.2. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

$$p(A) + p(\bar{A}) = 1. \tag{2.5}$$

Доказательство.

Так как A и $\bar{A}$ образуют полную группу, то одно из них обязательно произойдет в результате опыта, то есть событие $A + \bar{A}$ является достоверным. Следовательно, $P(A + \bar{A}) = 1$. Но, так как A и $\bar{A}$ несовместны, из (2.4) следует, что $P(A + \bar{A}) = p(A) + p(\bar{A})$. Значит, $p(A) + p(\bar{A}) = 1$, что и требовалось доказать.

Замечание. В ряде задач проще искать не вероятность заданного события, а вероятность события, противоположного ему, а затем найти требуемую вероятность по формуле (2.5).

Пример. Из урны, содержащей 2 белых и 6 черных шаров, случайным образом извлекаются 5 шаров. Найти вероятность того, что вынуты шары разных цветов.

Решение. Событие $\overline{A}$, противоположное заданному, заключается в том, что из урны вынуто 5 шаров одного цвета, а так как белых шаров в ней всего два, то этот цвет может быть только черным. Множество возможных исходов опыта найдем по формуле (1.5):

$$n = C_8^5 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56,$$

а множество исходов, благоприятных событию $\overline{A}$ - это число возможных наборов по 5 шаров только из шести черных:

$$m_{\overline{A}} = C_6^5 = 6.$$

Тогда $p(\overline{A}) = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$, а $p(A) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}$.

Теорема умножения вероятностей.

Определение 2.2. Назовем **условной вероятностью $p(B/A)$ события B** вероятность события B при условии, что событие A произошло.
Замечание. Понятие условной вероятности используется в основном в случаях, когда осуществление события A изменяет вероятность события B.
Примеры:

1) пусть событие A – извлечение из колоды в 32 карты туза, а событие B – то, что и вторая вынутая из колоды карта окажется тузом. Тогда, если после первого раза карта была возвращена в колоду, то вероятность вынуть вторично туз не меняется: $p(B) = p(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0{,}125$. Если же первая карта в колоду не возвращается, то осуществление события A приводит к тому, что в колоде осталась 31 карта, из которых только 3 туза. Поэтому $p(B/A) = \frac{3}{31} \approx 0{,}097$.
2) если событие A – попадание в самолет противника при первом выстреле из орудия, а B – при втором, то первое попадание уменьшает маневренность самолета, поэтому $p(B/A)$ увеличится по сравнению с $p(A)$.

Теорема 2.3 (теорема умножения). Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p\,(AB) = p\,(A) \cdot p\,(B/A). \qquad (2.6)$$

Доказательство.
Воспользуемся обозначениями теоремы 2.1. Тогда для вычисления $p(B/A)$ множеством возможных исходов нужно считать m_A (так как A произошло), а множеством благоприятных исходов – те, при которых произошли и A, и B (m_{AB}). Следовательно,

$$p(B/A) = \frac{m_{AB}}{m_A} = \frac{m_{AB}}{n} \cdot \frac{n}{m_A} = p(AB) : p(A),$$ откуда следует утверждение теоремы.

Пример. Для поражения цели необходимо попасть в нее дважды. Вероятность первого попадания равна 0,2, затем она не меняется при промахах, но после первого попадания увеличивается вдвое. Найти вероятность того, что цель будет поражена первыми двумя выстрелами.
Решение. Пусть событие A – попадание при первом выстреле, а событие B – попадание при втором. Тогда $p\,(A) = 0{,}2$, $p\,(B/A) = 0{,}4$, $p\,(AB) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$.

Следствие. Если подобным образом вычислить вероятность события BA, совпадающего с событием AB, то получим, что $p(BA) = p(B) \cdot p(A/B)$. Следовательно,

$$p(A) \cdot p(B/A) = p(B) \cdot p(A/B). \qquad (2.7)$$

Определение 2.3. Событие B называется **независимым** от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, то есть $p(B/A) = p(B)$.
Замечание. Если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. Действительно, из (2.7) следует при этом, что $p(A) \cdot p(B) = p(B) \cdot p(A/B)$, откуда $p(A/B) = p(A)$. Значит, **свойство независимости событий взаимно**.

Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B), \qquad (2.8)$$

то есть вероятность произведения независимых событий равна произведению их вероятностей.
При решении задач теоремы сложения и умножения обычно применяются вместе.

Пример. Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Найти вероятности следующих событий:
A – хотя бы одно попадание при двух выстрелах;
B – ровно одно попадание при двух выстрелах;
C – два попадания;
D – ни одного попадания.
Решение. Пусть событие H_1 – попадание первого стрелка, H_2 – попадание второго. Тогда $A = H_1 + H_2$, $B = H_1 \cdot \overline{H}_2 + \overline{H}_1 \cdot H_2$, $C = H_1 \cdot H_2$, $D = \overline{H}_1 \cdot \overline{H}_2$. События H_1 и H_2 совместны и независимы, поэтому теорема сложения применяется в общем виде, а теорема умножения – в виде (2.8). Следовательно, $p(C) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $p(A) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$,
$p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}3 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}46$ (так как события $H_1 \cdot \overline{H}_2$ и $\overline{H}_1 \cdot H_2$ несовместны),
$p(D) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}12$. Заметим, что события A и D являются противоположными, поэтому $p(A) = 1 - p(D)$.

Вероятность появления хотя бы одного события.

Теорема 2.4. Вероятность появления хотя бы одного из попарно независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна

$$p(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n, \qquad (2.9)$$

где q_i – вероятность события $\overline{A}_i$, противоположного событию A_i.
Доказательство.
Если событие A заключается в появлении хотя бы одного события из $A_1, A_2, \ldots, A_n$, то события A и $\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ противоположны, поэтому по теореме 2.2 сумма их вероятностей равна 1. Кроме того, поскольку $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы, то независимы и $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots, \overline{A}_n$, следовательно, $p(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n) = p(\overline{A}_1) p(\overline{A}_2) \ldots p(\overline{A}_n) = q_1 q_2 \ldots q_n$. Отсюда следует справедливость формулы (2.9).

Пример. Сколько нужно произвести бросков монеты, чтобы с вероятностью не менее 0,9 выпал хотя бы один герб?
Решение. Вероятность выпадения герба при одном броске равна вероятности противоположного события (выпадения цифры) и равна 0,5. Тогда вероятность выпадения хотя бы одного герба при n выстрелах равна $1 - (0{,}5)^n$. Тогда из решения неравенства $1 - (0{,}5)^n > 0{,}9$ следует, что $n > \log_2 10 \geq 4$.

Лекция 3.
Формула полной вероятности и формула Байеса. Схема и формула Бернулли. Приближение Пуассона для схемы Бернулли.

Определение 3.1. Пусть событие A может произойти только совместно с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Тогда события $H_1, H_2, \ldots, H_n$ называются **гипотезами.**

Теорема 3.1. Вероятность события A, наступающего совместно с гипотезами $H_1, H_2, \ldots, H_n$, равна:

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i), \tag{3.1}$$

где $p(H_i)$ – вероятность **i-** й гипотезы, а $p(A/H_i)$ – вероятность события A при условии реализации этой гипотезы. Формула (3.1) носит название **формулы полной вероятности**.
Доказательство.
Можно считать событие A суммой попарно несовместных событий $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$. Тогда из теорем сложения и умножения следует, что

$$p(A) = p(AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n) = p(AH_1) + p(AH_2) + \ldots + p(AH_n) = \sum_{i=1}^{n} p(H_i)\, p(A/H_i),$$

что и требовалось доказать.
Пример. Имеются три одинаковые урны с шарами. В первой из них 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 5 черных, в третьей – 10 черных шаров. Из случайно выбранной урны наудачу вынут шар. Найти вероятность того, что он белый.
Решение. Будем считать гипотезами H_1, H_2 и H_3 выбор урны с соответствующим номером. Так как по условию задачи все гипотезы равновозможны, то $p(H_1) = p(H_2) = p(H_3) = \frac{1}{3}$.

Найдем условную вероятность A при реализации каждой гипотезы: $p(A/H_1) = \frac{3}{7}$, $p(A/H_2) = \frac{2}{7}$, $p(A/H_3) = 0$. Тогда $p(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{7} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{7} + \frac{1}{3}\cdot 0 = \frac{5}{21} \approx 0{,}238$.

Формула Байеса (теорема гипотез).

Пусть известен результат опыта, а именно то, что произошло событие A. Этот факт может изменить априорные (то есть известные до опыта) вероятности гипотез. Например, в предыдущем примере извлечение из урны белого шара говорит о том, что этой урной не могла быть третья, в которой нет белых шаров, то есть $p\,(H_3/A) = 0$. Для переоценки вероятностей гипотез при известном результате опыта используется **формула Байеса**:

$$p(H_i / A) = \frac{p(H_i)\, p(A/H_i)}{p(A)}. \tag{3.2}$$

Действительно, из (2.7) получим, что $p(A)\, p(H_i / A) = p(H_i)\, p(A/H_i)$, откуда следует справедливость формулы (3.2).

Пример. После двух выстрелов двух стрелков, вероятности попаданий которых равны 0,6 и 0,7, в мишени оказалась одна пробоина. Найти вероятность того, что попал первый стрелок.
Решение. Пусть событие A – одно попадание при двух выстрелах, а гипотезы: H_1 – первый попал, а второй промахнулся, H_2 – первый промахнулся, а второй попал, H_3 – оба попали, H_4 – оба промахнулись. Вероятности гипотез: $p(H_1) = 0{,}6\cdot 0{,}3 = 0{,}18$, $p(H_2) = 0{,}4\cdot 0{,}7 = 0{,}28$, $p(H_3) = 0{,}6\cdot 0{,}7 = 0{,}42$, $p(H_4) = 0{,}4\cdot 0{,}3 = 0{,}12$. Тогда $p(A/H_1) = p(A/H_2) = 1$,

$p(A/H_3) = p(A/H_4) = 0$. Следовательно, полная вероятность $p(A) = 0{,}18 \cdot 1 + 0{,}28 \cdot 1 + 0{,}42 \cdot 0 + 0{,}12 \cdot 0 = 0{,}46$. Применяя формулу Байеса, получим:

$$p(H_1 / A) = \frac{0{,}18 \cdot 1}{0{,}46} = \frac{9}{23} \approx 0{,}391.$$

Схема повторения испытаний. Формула Бернулли.

Рассмотрим серию из *n* испытаний, в каждом из которых событие *A* появляется с одной и той же вероятностью *p*, причем результат каждого испытания не зависит от результатов остальных. Подобная постановка задачи называется **схемой повторения испытаний**. Найдем вероятность того, что в такой серии событие *A* произойдет ровно *к* раз (неважно, в какой последовательности). Интересующее нас событие представляет собой сумму равновероятных несовместных событий, заключающихся в том, что *A* произошло в некоторых *к* испытаниях и не произошло в остальных $n - к$ испытаниях. Число таких событий равно числу сочетаний из *n* по *к*, то есть $C_n^к$, а вероятность каждого из них: $p^k q^{n-k}$, где $q = 1 - p$ – вероятность того, что в данном опыте *A* не произошло. Применяя теорему сложения для несовместных событий, получим **формулу Бернулли**:

$$p_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}. \qquad (3.3)$$

Пример. Для получения приза нужно собрать 5 изделий с особым знаком на этикетке. Найти вероятность того, что придется купить 10 изделий, если этикетки с этим знаком имеют 5% изделий.

Решение. Из постановки задачи следует, что последнее купленное изделие имеет особый знак. Следовательно, из предыдущих девяти эти знаки имели 4 изделия. Найдем вероятность этого по формуле Бернулли: $p_9(4) = C_9^4 \cdot (0{,}05)^4 \cdot (0{,}95)^5 = 0{,}0006092.$ Тогда $p = 0{,}0006092 \cdot 0{,}05 = 0{,}0000304$.

Приближение Пуассона для схемы Бернулли.

Формула Бернулли требует громоздких расчетов при большом количестве испытаний. Можно получить более удобную для расчетов приближенную формулу, если при большом числе испытаний вероятность появления *A* в одном опыте мала, а произведение $np = \lambda$ сохраняет постоянное значение для разных серий опытов (то есть среднее число появлений события *A* в разных сериях испытаний остается неизменным). Применим формулу Бернулли:

$$p_n(k) = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} \left(\frac{l}{n}\right)^k \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{n-k}.$$

Найдем предел полученного выражения при $n \to \infty$:

$$p_n(k) \approx \frac{l^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)...\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{l}{n}\right)^{n-k}\right) = \frac{l^k}{k!} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{l}{n}\right)^n \left(1 - \frac{l}{n}\right)^{-k} = \frac{l^k}{k!} \cdot e^{-l} \cdot 1.$$

Таким образом, **формула Пуассона**

$$p_n(k) = \frac{l^k e^{-l}}{k!} \qquad (3.4)$$

позволяет найти вероятность *к* появлений события *A* для массовых (*n* велико) и редких (*p* мало) событий.

Лекция 4.
Случайные величины. Закон распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Наряду с понятием случайного события в теории вероятности используется и более удобное понятие *случайной величины*.
Определение 4.1. **Случайной величиной** называется величина, принимающая в результате опыта одно из своих возможных значений, причем заранее неизвестно, какое именно.
Будем обозначать случайные величины заглавными буквами латинского алфавита (X, Y,Z,…), а их возможные значения – соответствующими малыми буквами (x_i, y_i,…).
Примеры: число очков, выпавших при броске игральной кости; число появлений герба при 10 бросках монеты; число выстрелов до первого попадания в цель; расстояние от центра мишени до пробоины при попадании.
Можно заметить, что множество возможных значений для перечисленных случайных величин имеет разный вид: для первых двух величин оно конечно (соответственно 6 и 11 значений), для третьей величины множество значений бесконечно и представляет собой множество натуральных чисел, а для четвертой – все точки отрезка, длина которого равна радиусу мишени. Таким образом, для первых трех величин множество значений из отдельных (дискретных), изолированных друг от друга значений, а для четвертой оно представляет собой непрерывную область. По этому показателю случайные величины подразделяются на две группы: дискретные и непрерывные.

Определение 4.2. Случайная величина называется **дискретной**, если она принимает отдельные, изолированные возможные значения с определенными вероятностями.

Определение 4.3. Случайная величина называется **непрерывной**, если множество ее возможных значений целиком заполняет некоторый конечный или бесконечный промежуток.

Дискретные случайные величины.

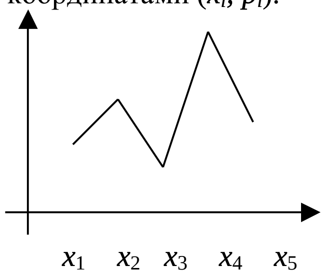
Для задания дискретной случайной величины нужно знать ее возможные значения и вероятности, с которыми принимаются эти значения. Соответствие между ними называется **законом распределения** случайной величины. Он может иметь вид таблицы, формулы или графика.
Таблица, в которой перечислены возможные значения дискретной случайной величины и соответствующие им вероятности, называется **рядом распределения**:

x_i	x_1	x_2	…	x_n	…
p_i	p_1	p_2	…	p_n	…

Заметим, что событие, заключающееся в том, что случайная величина примет одно из своих возможных значений, является достоверным, поэтому $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$.
Пример. . Два стрелка делают по одному выстрелу по мишени. Вероятности их попадания при одном выстреле равны соответственно 0,6 и 0,7. Составить ряд распределения случайной величины X – числа попаданий после двух выстрелов.
Решение. Очевидно, что X может принимать три значения: 0, 1 и 2. Их вероятности найдены в примере, рассмотренном в лекции 3. Следовательно, ряд распределения имеет вид:

x_i	0	1	2
p_i	0,12	0,46	0,42

Графически закон распределения дискретной случайной величины можно представить в виде **многоугольника распределения** – ломаной, соединяющей точки плоскости с координатами (x_i, p_i).



Функция распределения.

Определение 4.4. **Функцией распределения $F(x)$** случайной величины X называется вероятность того, что случайная величина примет значение, меньшее x:

$$F(x) = p(X < x). \tag{4.1}$$

Свойства функции распределения.

1) $0 \le F(x) \le 1$.
   Действительно, так как функция распределения представляет собой вероятность, она может принимать только те значения, которые принимает вероятность.
2) Функция распределения является неубывающей функцией, то есть $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 > x_1$. Это следует из того, что $F(x_2) = p(X < x_2) = p(X < x_1) + p(x_1 \le X < x_2) \ge F(x_1)$.
3) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. В частности, если все возможные значения X лежат на интервале $[a, b]$, то $F(x) = 0$ при $x \le a$ и $F(x) = 1$ при $x \ge b$. Действительно, $X < a$ – событие невозможное, а $X < b$ – достоверное.
4) Вероятность того, что случайная величина примет значение из интервала $[a, b]$, равна разности значений функции распределения на концах интервала:
   $$p(a < X < b) = F(b) - F(a).$$

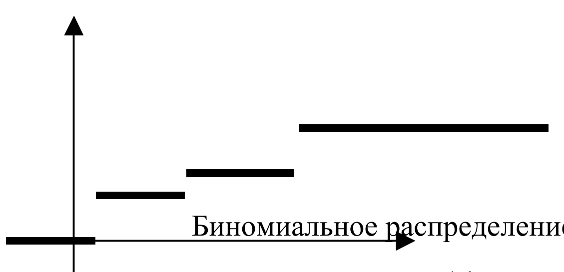
Справедливость этого утверждения следует из определения функции распределения (см. свойство 2).

Для дискретной случайной величины значение $F(x)$ в каждой точке представляет собой сумму вероятностей тех ее возможных значений, которые меньше аргумента функции.

Пример. Найдем $F(x)$ для предыдущего примера:

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad x \le 0 \\ 0{,}12, \quad 0 < x \le 1 \\ 0{,}12 + 0{,}46 = 0{,}58, \quad 1 < x \le 2 \\ 0{,}58 + 0{,}42 = 1, \quad x > 2 \end{cases}$$

Соответственно график функции распределения имеет ступенчатый вид:



Биномиальное распределение.

Вернемся к схеме независимых испытаний и найдем закон распределения случайной величины X – числа появлений события A в серии из n испытаний. Возможные значения A: 0, 1, …, n. Соответствующие им вероятности можно вычислить по формуле Бернулли:

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{4.2}$$

(p – вероятность появления A в каждом испытании).

Такой закон распределения называют **биномиальным**, поскольку правую часть равенства (4.2) можно рассматривать как общий член разложения бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = C_n^n p^n + C_n^{n-1} p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + C_n^0 q^n.$$

Пример. Составим ряд распределения случайной величины X – числа попаданий при 5 выстрелах, если вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8.

$p(X=0) = 1\cdot(0,2)^5 = 0,00032$; $p(X=1) = 5\cdot 0,8\cdot(0,2)^4 = 0,0064$; $p(X=2) = 10\cdot(0,8)^2\cdot(0,2)^3 = 0,0512$; $p(X=3) = 10\cdot(0,8)^3\cdot(0,2)^2 = 0,2048$; $p(X=4) = 5\cdot(0,8)^4\cdot 0,2 = 0,4096$; $p(X=5) = 1\cdot(0,8)^5 = 0,32768$. Таким образом, ряд распределения имеет вид:

x	0	1	2	3	4	5
p	0.00032	0.0064	0.0512	0.2048	0.4096	0.32728

Распределение Пуассона.

Рассмотрим дискретную случайную величину X, принимающую только целые неотрицательные значения (0, 1, 2,…, m,…), последовательность которых не ограничена. Такая случайная величина называется распределенной **по закону Пуассона**, если вероятность того, что она примет значение m, выражается формулой:

$$p(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{4.3}$$

где a – некоторая положительная величина, называемая *параметром* закона Пуассона.

Покажем, что сумма всех вероятностей равна 1:

$$\sum_{m=0}^{\infty} p(X = m) = e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = e^{-a} \cdot e^{a} = 1$$

(использовано разложение в ряд Тейлора функции e^x).

Рассмотрим типичную задачу, приводящую к распределению Пуассона. Пусть на оси абсцисс случайным образом распределяются точки, причем их распределение удовлетворяет следующим условиям:

1) вероятность попадания некоторого количества точек на отрезок длины l зависит только от длины отрезка и не зависит от его расположения на оси (то есть точки распределены с одинаковой средней плотностью);
2) точки распределяются независимо друг от друга (вероятность попадания какого-либо числа точек на данный отрезок не зависит от количества точек, попавший на любой другой отрезок);
3) практическая невозможность совпадения двух или более точек.

Тогда случайная величина X – число точек, попадающих на отрезок длины l – распределена по закону Пуассона, где a – среднее число точек, приходящееся на отрезок длины l.

Замечание. В лекции 3 говорилось о том, что формула Пуассона выражает биномиальное распределение при большом числе опытов и малой вероятности события. Поэтому закон Пуассона часто называют *законом редких явлений*.

Лекция 5.

Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины, их взаимосвязь и свойства. Равномерное распределение вероятностей.

Определение и свойства функции распределения сохраняются и для непрерывной случайной величины, для которой функцию распределения можно считать одним из видов задания закона распределения. Но для непрерывной случайной величины вероятность каждого отдельного ее значения равна 0. Это следует из свойства 4 функции распределения: $p(X = a) = F(a) - F(a) = 0$. Поэтому для такой случайной величины имеет смысл говорить только о вероятности ее попадания в некоторый интервал.

Вторым способом задания закона распределения непрерывной случайной величины является так называемая плотность распределения (плотность вероятности, дифференциальная функция).

Определение 5.1. Функция $f(x)$, называемая **плотностью распределения** непрерывной случайной величины, определяется по формуле:

$$f(x) = F'(x), \qquad (5.1)$$

то есть является производной функции распределения.

Свойства плотности распределения.

1) $f(x) \geq 0$, так как функция распределения является неубывающей.
2) $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$, что следует из определения плотности распределения.
3) Вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) определяется формулой $p(a < X < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$

   Действительно, $p(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$
4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (условие нормировки). Его справедливость следует из того, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty)$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1.$
5) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0,$ так как $F(x) \to const$ при $x \to \pm\infty.$

Таким образом, график плотности распределения представляет собой кривую, расположенную выше оси Оx, причем эта ось является ее горизонтальной асимптотой при $x \to \pm\infty$ (последнее справедливо только для случайных величин, множеством возможных значений которых является все множество действительных чисел). Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком этой функции, равна единице.

Замечание. Если все возможные значения непрерывной случайной величины сосредоточены на интервале $[a, b]$, то все интегралы вычисляются в этих пределах, а вне интервала $[a, b]$ $f(x) \equiv 0$.

Пример 1. Плотность распределения непрерывной случайной величины задана формулой

$$f(x) = \frac{C}{1 + x^2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Найти: а) значение константы C; б) вид функции распределения; в) $p(-1 < x < 1)$.

Решение. а) значение константы C найдем из свойства 4:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{C}{1+x^2}dx = C\operatorname{arctg}x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = C\left(\frac{p}{2}+\frac{p}{2}\right) = Cp = 1, \text{ откуда } C = \frac{1}{p}.$$

б) $F(x) = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+t^2}dt = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\, t\Big|_{-\infty}^{x} = \frac{1}{p}\left(\operatorname{arctg}x + \frac{p}{2}\right) = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}.$

в) $p(-1 < x < 1) = \frac{1}{p}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}x\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{p}\left(\frac{p}{4}+\frac{p}{4}\right) = 0{,}5.$

Пример 2. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{2}, & 2 < x \le 4 \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найти плотность распределения.
Решение.

$$f(x) = \begin{cases} 0', & x \le 2 \\ \left(\dfrac{x-2}{2}\right)', & 2 < x \le 4 \\ 1', & x > 4 \end{cases} = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ 0{,}5, & 2 < x \le 4 \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

Равномерный закон распределения.

Часто на практике мы имеем дело со случайными величинами, распределенными определенным типовым образом, то есть такими, закон распределения которых имеет некоторую стандартную форму. В прошлой лекции были рассмотрены примеры таких законов распределения для дискретных случайных величин (биномиальный и Пуассона). Для непрерывных случайных величин тоже существуют часто встречающиеся виды закона распределения, и в качестве первого из них рассмотрим равномерный закон.

Определение 5.2. Закон распределения непрерывной случайной величины называется **равномерным**, если на интервале, которому принадлежат все возможные значения случайной величины, плотность распределения сохраняет постоянное значение ($f(x)$ = const при $a \le x \le b$, $f(x) = 0$ при $x < a$, $x > b$.

Найдем значение, которое принимает $f(x)$ при $x \in [a,b]$. Из условия нормировки следует, что $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b c\,dx = c(b-a) = 1$, откуда $f(x) = c = \frac{1}{b-a}$.

Вероятность попадания равномерно распределенной случайной величины на интервал $[a, b]$ $(a \le a < b \le b)$ равна при этом $\int_a^b \frac{1}{b-a}dx = \frac{b-a}{b-a}$.

Вид функции распределения для нормального закона: $F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b. \end{cases}$

Пример. Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 2 минут.

Решение. Время ожидания является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале [0, 5]. Тогда $f(x)=\frac{1}{5}$, $p(0\le x\le 2)=\frac{2}{5}=0{,}4$.

Лекция 6.

Нормальный закон распределения вероятностей. Нормальная кривая. Функция Лапласа. Вычисление вероятности попадания в заданный интервал нормальной случайной величины. Правило трех сигм. Показательное распределение. Функция надежности. Показательный закон надежности.

Определение 6.1. Непрерывная случайная величина называется распределенной по **нормальному закону**, если ее плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \qquad (6.1)$$

Замечание. Таким образом, нормальное распределение определяется двумя параметрами: a и σ.

График плотности нормального распределения называют **нормальной кривой (кривой Гаусса)**. Выясним, какой вид имеет эта кривая, для чего исследуем функцию (6.1).

1) Область определения этой функции: $(-\infty, +\infty)$.
2) $f(x) > 0$ при любом x (следовательно, весь график расположен выше оси Ox).
3) $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, то есть ось O$x$ служит горизонтальной асимптотой графика при $x \to \pm\infty$.
4) $f'(x) = -\frac{x-a}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} = 0$ при $x = a$; $f'(x) > 0$ при $x > a$, $f'(x) < 0$ при $x < a$.
   Следовательно, $\left(a, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)$ - точка максимума.
5) $F(x - a) = f(a - x)$, то есть график симметричен относительно прямой $x = a$.
6) $f''(x) = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \left(1 - \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) = 0$ при $x = a \pm \sigma$, то есть точки $\left(a \pm \sigma, \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ являются точками перегиба.

Примерный вид кривой Гаусса изображен на рис.1.

Рис.1.

Найдем вид функции распределения для нормального закона:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}} dt. \qquad (6.2)$$

Перед нами так называемый «неберущийся» интеграл, который невозможно выразить через элементарные функции. Поэтому для вычисления значений $F(x)$ приходится пользоваться таблицами. Они составлены для случая, когда $a = 0$, а $\sigma = 1$.

Определение 6.2. Нормальное распределение с параметрами $a = 0$, $\sigma = 1$ называется **нормированным**, а его функция распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad - \qquad (6.3)$$

- **функцией Лапласа**.

Замечание. Функцию распределения для произвольных параметров можно выразить через функцию Лапласа, если сделать замену: $t = \dfrac{x-a}{s}$, тогда $F(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2p}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{s}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Найдем вероятность попадания нормально распределенной случайной величины на заданный интервал:

$$p(a < x < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-a}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a-a}{s}\right) \qquad (6.4)$$

Пример. Случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами $a = 3$, $\sigma = 2$. Найти вероятность того, что она примет значение из интервала (4, 8).
Решение.

$$p(4 < x < 8) = F(8) - F(4) = \Phi\left(\frac{8-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{4-3}{2}\right) = \Phi(2{,}5) - \Phi(0{,}5) = 0{,}9938 - 0{,}6915 = 0{,}3023.$$

Правило «трех сигм».

Найдем вероятность того, что нормально распределенная случайная величина примет значение из интервала ($a - 3\sigma$, $a + 3\sigma$):

$$p(a - 3s < x < a + 3s) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}9986 - 0{,}0014 = 0.9973.$$

Следовательно, вероятность того, что значение случайной величины окажется *вне* этого интервала, равна 0,0027, то есть составляет 0,27% и может считаться пренебрежимо малой. Таким образом, на практике можно считать, что *все* возможные значения нормально распределенной случайной величины лежат в интервале ($a - 3\sigma$, $a + 3\sigma$).

Полученный результат позволяет сформулировать **правило «трех сигм»**: *если случайная величина распределена нормально, то модуль ее отклонения от $x = a$ не превосходит 3σ.*

Показательное распределение.

Определение 6.3. **Показательным (экспоненциальным)** называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ l e^{-lx}, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (6.5)$$

В отличие от нормального распределения, показательный закон определяется только одним параметром λ. В этом его преимущество, так как обычно параметры распределения заранее не известны и их приходится оценивать приближенно. Понятно, что оценить один параметр проще, чем несколько.

Найдем функцию распределения показательного закона:

$F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0 \cdot dt + l \int_{0}^{x} e^{-lt} dt = 1 - e^{-lx}$. Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-lx}, & x \ge 0. \end{cases} \qquad (6.6)$$

Теперь можно найти вероятность попадания показательно распределенной случайной величины в интервал (a, b):

$$p(a < x < b) = e^{-la} - e^{-lb}. \qquad (6.7)$$

Значения функции e^{-x} можно найти из таблиц.

Функция надежности.

Пусть *элемент* (то есть некоторое устройство) начинает работать в момент времени $t_0 = 0$ и должен проработать в течение периода времени t. Обозначим за T непрерывную случайную величину – время безотказной работы элемента, тогда функция $F(t) = p(T > t)$ определяет вероятность отказа за время t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время равна

$$R(t) = p(T > t) = 1 – F(t). \qquad (6.8)$$

Эта функция называется **функцией надежности**.

Показательный закон надежности.

Часто длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение, то есть

$$F(t) = 1 – e^{-\lambda t}.$$

Следовательно, функция надежности в этом случае имеет вид:

$$R(t) = 1 – F(t) = 1 – (1 – e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Определение 6.4. **Показательным законом надежности** называют функцию надежности, определяемую равенством

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \qquad (6.9)$$

где λ – интенсивность отказов.

Пример. Пусть время безотказной работы элемента распределено по показательному закону с плотностью распределения $f(t) = 0{,}1\, e^{-0{,}1t}$ при $t \geq 0$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 10 часов.
Решение. Так как $\lambda = 0{,}1$, $R(10) = e^{-0{,}1\cdot 10} = e^{-1} = 0{,}368$.