

Кафедра «Высшая математика»

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Варианты курсовых заданий

Составители: Выск Н.Д.
Титаренко В.И.

Москва
2002

Наталья Дмитриевна Виск
Вера Ивановна Титаренко

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Варианты курсовых заданий

Редактор

Подписано в печать
Объем п.л. Тираж 100 экз.
Заказ №

Издательско-типографский центр
«МАТИ» - Российского государственного технологического
университета им. К.Э.Циолковского
Берниковская наб.,14

ОГЛАВЛЕНИЕ

I Неопределенный интеграл	3
1. Замена переменной в неопределенном интеграле	3
2. Интегрирование по частям	4
3. Интегрирование рациональных дробей	5
4. Интегрирование иррациональных выражений	6
5. Интегрирование тригонометрических функций	8
II Определенный интеграл	10
1. Формула Ньютона-Лейбница	10
2. Несобственные интегралы	10
3. Геометрические приложения определенного интеграла	11
Варианты курсовых работ	13

Пособие предназначено для студентов первого курса, изучающих в рамках общего курса высшей математики тему «Интеграл». Рассмотрены основные приемы интегрирования, методы вычисления определенных интегралов и их геометрические приложения.

В каждом разделе приводится решение типовых задач.

Для закрепления материала студентам предлагается выполнить курсовую работу по перечисленным выше темам.

Настоящее пособие может использоваться на всех факультетах и специальностях.

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$, заданной на некотором множестве X , если $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in X$. Совокупность всех первообразных данной функции называется ее неопределенным интегралом:

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Для отыскания неопределенного интеграла используют таблицы основных интегралов, свойства интеграла (в частности, линейность), тождественные преобразования (так называемое непосредственное интегрирование), а также применяют различные специальные приемы, позволяющие привести исходные интегралы к табличным.

1. Замена переменной в неопределенном интеграле

Формулу замены переменной:

$$\int f(x)dx = \int f(j(t))j'(t)dt = \int g(t)dt,$$

где $x = \varphi(t)$, причем должна существовать обратная функция $t = \varphi^{-1}(x)$.

Пример 1. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}}.$

Применим подстановки: $t = x^2$, $dt = 2x dx$ и воспользуемся формулой замены переменной:

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2} \ln |t + \sqrt{1+t^2}| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + \sqrt{1+x^4}| + C.$$

Пример 2. $\int \frac{x dx}{3x^2 + 1}.$

Сделаем замену переменной: $x^2 = t$. Тогда $x dx = \frac{1}{2} dt$.

Следовательно, $\int \frac{x dx}{3x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{3t + 1} = \frac{1}{6} \int \frac{d(3t + 1)}{3t + 1} = \frac{1}{6} \ln |3t + 1| =$
 $= \frac{1}{6} \ln(3x^2 + 1) + C.$

2. Интегрирование по частям

Формулу интегрирования по частям:

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x)$$

полезно применять в случае, когда подынтегральное выражение представляет собой произведение двух функций, одна из которых является многочленом, или если подынтегральная функция не имеет табличной первообразной (логарифм, обратные тригонометрические функции и т.п.).

Пример 3. $\int \ln x dx.$

Полагаем $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = x$. Используя формулу интегрирования по частям, находим:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{dx}{x} = x \ln x - x + C.$$

Кроме того, интегрирование по частям применяется для получения уравнений, из которых можно найти искомую первообразную. Такие возможности возникают, когда подынтегральное выражение содержит произведение множителей вида $\sin kx$ или $\cos kx$ и e^{nx} , и в некоторых других случаях.

Пример 4. $I = \int \sin x \cdot e^x dx = \int \sin x de^x = \sin x \cdot e^x - \int e^x d(\sin x) =$
 $= e^x \sin x - \int \cos x \cdot e^x dx = e^x \sin x - \int \cos x de^x = e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x d(\cos x) =$
 $= e^x \sin x - e^x \cos x - \int \sin x \cdot e^x dx = e^x (\sin x - \cos x) - I.$

Тогда $2I = e^x (\sin x - \cos x)$, или $I = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + C.$

3. Интегрирование рациональных дробей

Если рациональная дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ является неправильной, то есть

$m \geq n$, то ее можно представить в виде суммы

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \frac{R_r(x)}{Q_n(x)}, \text{ где } M_{m-n} \text{ и } R_r - \text{многочлены степеней}$$

$m-n \geq 0$ и r , причем $r < n$. Разложение правильной дроби $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ в

сумму простейших имеет вид: $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \dots + \frac{A_{s_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{s_1}} + \dots + \frac{A_l^{(l)}}{x-a_l} + \dots + \frac{A_{s_l}^{(l)}}{(x-a_l)^{s_l}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2 + p_1x + q_1} + \\ &+ \dots + \frac{B_{t_1}^{(1)}x + C_{t_1}^{(1)}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{t_1}} + \dots + \frac{B_k^{(k)}x + C_k^{(k)}}{x^2 + p_kx + q_k} + \dots + \frac{B_{t_k}^{(k)}x + C_{t_k}^{(k)}}{(x^2 + p_kx + q_k)^{t_k}}. \end{aligned}$$

При этом каждая из простейших дробей, стоящих в правой части равенства, интегрируется в квадратурах.

Таким образом, для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь, необходимо в случае, если она является неправильной, выделить целую часть, затем разложить знаменатель оставшейся правильной дроби на множители степени не выше второй и представить эту дробь в виде суммы простейших дробей, вычислив коэффициенты их числителей с помощью метода неопределенных коэффициентов.

Пример 5. $\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx.$

Подынтегральной функцией является правильная дробь, разложение которой в сумму простейших имеет вид:

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю, получаем:

$$2x^2 + 2x + 13 = A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2).$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях x , что приведет к линейной системе относительно A, B, C, D, E :

$$x^4: A + B = 0$$

$$x^3: -2B + C = 0$$

$$x^2: 2A + B - 2C + D = 2$$

$$x: -2B + C - 2D + E = 2$$

$$x^0: A - 2C - 2E = 13.$$

Отсюда $A = 1, B = -1, C = -2, D = -3, E = -4$. Следовательно,

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \left(\frac{1}{x-2} - \frac{x+2}{x^2+1} - \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} \right) dx, \text{ где}$$

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln |x-2| + C_1,$$

$$\int \frac{x+2}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2 \arctg x + C_2,$$

$$\int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2+1} + 4 \int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} +$$

$$+ 4 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2} \arctg x \right) + C_3. \text{ Таким образом, окончательный результат}$$

имеет вид:

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \ln |x-2| + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{4x-3}{2(x^2+1)} + 4 \arctg x + C.$$

4. Интегрирование иррациональных выражений

После соответствующей замены переменных многие иррациональные функции можно свести либо к рациональным дробям, либо к тригонометрическим выражениям, интегрирование которых будет рассмотрено ниже.

Для дробно-линейных иррациональностей удобной заменой является выбор в качестве новой переменной подкоренного выражения в степени $\frac{1}{p}$, где p – наименьший общий знаменатель дробных степеней в подынтегральном выражении.

Пример 6. $\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}}.$

Сделаем замену переменной: $x+3 = t^4$. Тогда $dx = 4t^3 dt$. Подставим полученные результаты в подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}} &= 4 \int \frac{t^3 dt}{(t-1)t^2} = 4 \int \frac{tdt}{t-1} = 4 \int \frac{(t-1)+1}{t-1} dt = \\ &= 4(t + \ln |t-1|) + C = 4(\sqrt[4]{x+3} + \ln |\sqrt[4]{x+3}-1|) + C. \end{aligned}$$

При интегрировании квадратичных иррациональностей привести подынтегральное выражение к рациональному виду помогают тригонометрические замены:

$x = a \sin t$, если в подынтегральную функцию входит $\sqrt{a^2 - x^2}$,

$x = atg\ t$ для $\sqrt{a^2 + x^2}$,

$x = \frac{a}{\sin t}$, если подынтегральная функция содержит $\sqrt{x^2 - a^2}$.

Пример 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2x + 3)^3}}$.

Выделив полный квадрат в квадратном трехчлене, получим:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2x + 3)^3}} = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 + 2)^3}}, \text{ где } u = x + 1. \text{ Теперь сделаем замену}$$

переменной: $u = \sqrt{2}tg t, du = \frac{\sqrt{2}}{\cos^2 t} dt, \sqrt{u^2 + 2} = \frac{\sqrt{2}}{\cos t}$. Подынтегральное выражение при этом примет вид:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2x + 3)^3}} &= \int \frac{\sqrt{2} \cos^3 t}{\cos^2 t \cdot \sqrt{2}^3} dt = \frac{1}{2} \int \cos t dt = \frac{1}{2} \sin t + C = \\ &= \frac{1}{2} \frac{u}{\sqrt{u^2 + 2}} + C = \frac{x+1}{2\sqrt{x^2 + 2x + 3}} + C. \end{aligned}$$

Иногда от квадратичных иррациональностей можно избавиться с помощью замен другого типа.

Пример 8. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2}}$.

Сделаем так называемую обратную подстановку: $x+1 = \frac{1}{t}, dx = -\frac{dt}{t}$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + 2}} &= \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t} \sqrt{\left(\frac{1}{t} - 1\right)^2 + 2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1 - 2t + 3t^2}} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{d\left(t - \frac{1}{3}\right)}{\sqrt{\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| t - \frac{1}{3} + \sqrt{t^2 - \frac{2}{3}t + \frac{1}{3}} \right| + C = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left| \frac{2 - x + \sqrt{3(x^2 + 2)}}{x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

5. Интегрирование тригонометрических функций

В зависимости от вида подынтегральной функции можно применять для упрощения тригонометрического выражения различные способы.

Для интегралов вида $I_{m,n} = \int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$:

а) если хотя бы одно из чисел m, n – нечетное (например, $m = 2k + 1$), то $I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cdot \cos^n x d(\cos x) = -\int (1 - \cos^2 x)^k \cos^n x d(\cos x)$.

Пример 9.

$$\int \sin^8 x \cos^3 x dx = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x) d \sin x = \frac{\sin^9 x}{9} - \frac{\sin^{11} x}{11} + C.$$

б) если m и n – четные, положительные, то степени понижаются сведением к двойному углу по формулам

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

$$\begin{aligned} \text{Пример 10. } \int \cos^4 5x \sin^2 5x dx &= \int (\sin^2 5x \cos^2 5x) \cos^2 5x dx = \\ &= \int \frac{\sin^2 10x}{4} \cdot \frac{1 + \cos 10x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (\sin^2 10x + \sin^2 10x \cos 10x) dx = \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{1 - \cos 20x}{2} dx + \frac{1}{80} \int \sin^2 10x d \sin 10x = \frac{x}{16} - \frac{\sin 20x}{320} + \frac{\sin^3 10x}{240} + C. \end{aligned}$$

в) Если m, n – четные и хотя бы одно из них отрицательно (или если m и n – отрицательные числа одинаковой четности), то используем

$$\text{соотношения } \frac{dx}{\cos^2 x} = dtgx, \frac{dx}{\sin^2 x} = -dctgx.$$

$$\text{Пример 11. } \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x} \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1 + tg^2 x) dtgx = tgx + tg^3 x + C.$$

$$\text{Пример 12. } \int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8} \int \frac{dx}{tg^3 \frac{x}{2} \cos^6 \frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}} d\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}} + 2 \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + \frac{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2} \right) + C.$$

Интегралы вида

$\int \sin nx \cos mx dx$, $\int \sin nx \sin mx dx$, $\int \cos nx \cos mx dx$ приводятся к табличным с помощью формул

$$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)$$

$$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2} (\cos(n+m)x + \cos(n-m)x)$$

Пример 13.

$$\int \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t

в общем случае с помощью подстановки $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, откуда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}. \text{ В случае четности } R \text{ по } \sin x \text{ и } \cos x: R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \text{ используем подстановку } t = \operatorname{tg} x, \text{ откуда } \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 14.

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln |1+t| + C = \ln \left| 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

При вычислении интеграла применена подстановка $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Пример 15.

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{1}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{2}\right) + C.$$

Здесь использовалась замена $t = \operatorname{tg} x$.

II. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Формула Ньютона-Лейбница

Для вычисления определенных интегралов от непрерывных функций с конечными пределами необходимо, пользуясь известными методами интегрирования, получить первообразную от интегрируемой функции и, применяя формулу Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

найти разность значений первообразной при подстановке вместо переменной верхнего и нижнего пределов интегрирования.

Пример 16. Вычислить интеграл $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

Воспользуемся формулой замены переменной в определенном интеграле:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(j(t)) j'(t) dt$$

и применим подстановку $\sqrt{x} = t$, т.е. $x = t^2$. Определим новый промежуток интегрирования: $x = 4$ при $t = 2$; $x = 9$ при $t = 3$. Следовательно,

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = \int_2^3 \frac{t}{t-1} \cdot 2t dt = 2 \int_2^3 \frac{t^2}{t-1} dt = 2 \int_2^3 (t+1) dt + 2 \int_2^3 \frac{dt}{t-1} = 7 + 2 \ln 2.$$

2. Несобственные интегралы

Для вычисления несобственных интегралов необходимо применить предельный переход, то есть изменить пределы интегрирования так, чтобы они стали конечными (для несобственных интегралов 1-го рода) и подынтегральная функция сохраняла непрерывность внутри и на концах нового промежутка интегрирования (для несобственных интегралов 2-го рода). Затем, вычислив значение интеграла в измененных пределах по

формуле Ньютона-Лейбница, нужно применить предельный переход для возвращения к пределам интегрирования, заданным в условии задачи.

Пример 17. Найти несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рассматривается несобственный интеграл 2-го рода, так как подынтегральная функция терпит разрыв на правом конце промежутка интегрирования. На основании определения

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{e \rightarrow 0} \int_a^{b-e} f(x)dx, \text{ если этот предел конечен. Имеем:}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{e \rightarrow 0} \int_0^{1-e} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{e \rightarrow 0} \left(\arcsin x \Big|_0^{1-e} \right) = \lim_{e \rightarrow 0} (\arcsin(1-e) - \arcsin 0) = \\ &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пример 18. Исследовать сходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)}$.

Применим теорему сравнения, по которой, если при $x > a$ выполнено условие

$0 \leq f(x) \leq j(x)$ и если $\int_a^{+\infty} j(x)dx$ сходится, то $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также сходится. В

нашем случае при $x \geq 1$ справедливо неравенство $\frac{1}{x^2(1+e^x)} \leq \frac{1}{x^2}$.

Рассмотрим $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x} \Big|_1^b \right) = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1 \right) = 1$. Так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

сходится, то на основании теоремы сравнения несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+e^x)} \text{ сходится.}$$

3. Геометрические приложения определенного интеграла

Для определения площадей фигур, ограниченных сверху и снизу заданными кривыми $y_1(x)$ и $y_2(x)$, прежде чем применять формулу для нахождения площади

$$S = \int_a^b (y_1(x) - y_2(x))dx,$$

часто нужно бывает определить пределы интегрирования, т.е. абсциссы точек пересечения кривых $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Они находятся как решения уравнения $y_1(x) = y_2(x)$. Если корни этого уравнения (в порядке возрастания) x_1 и x_2 , то x_1 – нижний предел интегрирования, а x_2 – верхний предел.

К возможным геометрическим приложениям определенного интеграла относятся, кроме того, вычисление длины дуги кривой и объема тела вращения.

Пример 19. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln x$ от точки с абсциссой $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

Длина дуги кривой, заданной в декартовых координатах, определяется по формуле:

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

В нашем случае $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{8}, f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}$, следовательно,

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 1} = t, x^2 + 1 = t^2, x dx = t dt, x = \sqrt{3} \Rightarrow t = 2, x = \sqrt{8} \Rightarrow t = 3. \text{ Тогда} \\ l = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} dx = \int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} \frac{x \sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx = \int_2^3 \frac{t^2 dt}{t^2 - 1} = \int_2^3 \frac{t^2 + 1 - 1}{t^2 - 1} dt = \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{t^2 - 1} \right) dt = \\ = \left(t + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \right) \Big|_2^3 = 1 + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Задания для курсовой работы включают по 10 задач. В №1-6 требуется найти неопределенные интегралы, в №7 – вычислить определенный интеграл, в №8-9 выполнить задания, связанные с геометрическими приложениями определенного интеграла, и в №10 – найти несобственный интеграл или исследовать его на сходимость.

ВАРИАНТЫ КУРСОВЫХ ЗАДАНИЙ

Вариант №1

1) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2) $\int x \ln x dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x-1}} dx$

4) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

5) $\int \frac{dx}{\cos^3 x}$

6) $\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$

7) Вычислить интеграл $\int_0^1 \arctg x dx$.

8) Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{x^2 + 1}, y = 0.$$

9) Найти длину дуги кривой $y = \ln(2 \cos x)$ от $x = 0$ до $x = \frac{p}{3}$.

10) Вычислить $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

Вариант №2

1) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x^3} dx$

2) $\int x^2 \cos x dx$

3) $\int x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

4) $\int \frac{dx}{x(x+1)(1+x+x^2)}$

5) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$

6) $\int \frac{dx}{(2 + \cos x) \sin x}$

7) Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{p}{2}} x \sin x \cos x dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x(1-x)$.

9) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией $(x-4)y^2 = x(x-3)$, $y \geq 0$.

10) Вычислить $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^2}$.

Вариант №3

1) $\int \frac{x dx}{3 - 2x^2}$

2) $\int \frac{\ln x dx}{\sqrt[3]{x}}$

3) $\int \frac{\sqrt{x+1} + 2}{(x+1)^2 \sqrt{x+1}} dx$

4) $\int \frac{x dx}{x^8 - 1}$

5) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$

6) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\sin x + 2 \cos x}$

7) Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \cos 3x dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=7$, $x=2$, $x=5$, $y=3,5$.

9) Найти длину дуги кривой $y = \ln(1 - x^2)$ от $x = -0,5$ до $x = 0,5$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \ln x dx$.

Вариант №4

1) $\int \frac{x dx}{(1 + x^2)^2}$

2) $\int (x^2 - x + 1) \ln x dx$

3) $\int \frac{(x+3) dx}{x^2 \sqrt{2x+3}}$

4) $\int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2 (x-1)} dx$

5) $\int \cos^2 x \cos^2 2x dx$

6) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x + 1}$

7) Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x^2}$, $x=1$, $y=0$.

9) Найти длину дуги кривой $y = \ln \sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x^2 - x - 2}$.

Вариант №5

1) $\int \frac{x^3 dx}{x^8 - 1}$

2) $\int x^2 \sin x dx$

3) $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$

4) $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)}$

5) $\int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$

6) $\int \frac{dx}{3 \sin 2x - \cos 2x + 2}$

7) Вычислить интеграл $\int_{\frac{p}{8}}^{\frac{p}{3}} \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln \sin x} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$ при $x \geq 0$.

9) Найти длину дуги кривой $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ от $x = a$ до $x = b$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$.

Вариант №6

1) $\int x^2 e^{-x} dx$

2) $\int \frac{x^2 dx}{4 + x^4}$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3} \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{x^3}}}$

4) $\int \frac{x^3 dx}{x^2 + x - 2}$

5) $\int \sin^2 x \sin^2 3x dx$

6) $\int \frac{dx}{(1 - \cos x) \sin x}$

7) Вычислить $\int_{\frac{p}{8}}^{\frac{p}{3}} \frac{\cos^2 3x}{\sin 3x} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 6x + 9$, $\frac{x}{12} + \frac{y}{12} = 1$.

9) Найти длину кривой $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^3$, отсекаемой прямой $x = -1$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Вариант №7

1) $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$

2) $\int x^3 e^x dx$

3) $\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1 + x^5}}$

4) $\int \frac{x^2 + 5x + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$

5) $\int \cos^4 x dx$

6) $\int \frac{dx}{\sin x (2 \cos x + 3)}$

7) Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{9}} \frac{dx}{1 - \sin 3x}$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$.

9) Найти длину дуги кривой $x = t^2$, $y = \frac{t}{3}(t^2 - 3)$ между точками пересечения с осью Ox .

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.

Вариант №8

1) $\int \frac{x^2 dx}{(8x^3 + 27)^{\frac{2}{3}}}$

2) $\int x^3 e^{-x^2} dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1 + x^4}}$

4) $\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4}$

5) $\int \sin^5 x dx$

6) $\int \frac{dx}{9 \sin^2 x + 4 \cos^2 x}$

7) Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x}{4 - \cos^2 2x} dx$.

8) Найти длину дуги кривой $y = \ln(2x + 1)$ от $x = \frac{5}{2}$ до $x = \frac{29}{5}$.

9) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $xy = 8$, $x = 6$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_{a^2}^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Вариант №9

1) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2} dx$

2) $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} dx$

3) $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - 1}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$

5) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} dx$

6) $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$

7) Вычислить $\int_1^4 x^2 e^{2x^2 + \ln x} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 2x$, $y = x$.

9) Найти объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x \in [0, 1]$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx$.

Вариант №10

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

2) $\int x \arctg x dx$

3) $\int x^3 (1+2x^2)^{-\frac{3}{2}} dx$

4) $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x^2 + 2x + 2)}$

5) $\int \sin 2x \cos 4x dx$

6) $\int \frac{dx}{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}$

7) Вычислить интеграл $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{3+x^3}{\sqrt{2(1+x^2)}} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 + 4x - 3$, $y = 0$.

9) Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x^4 + y^4 = a^2 x^2$, $x^4 + y^4 = x^3$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$.

Вариант №11

1) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$

2) $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}$

3) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$

4) $\int \frac{xdx}{(x-1)^2(x+1)^3}$

5) $\int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}$

6) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

7) Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$.

9) Найти длину первого витка архимедовой спирали $\rho = 2\varphi$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$.

Вариант №12

1) $\int \frac{e^x dx}{2 + e^x}$

2) $\int e^{ax} \cos bxdx$

3) $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x} + 4)\sqrt[3]{x}}$

4) $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$

5) $\int \cos^3 2x \cos x dx$

6) $\int \frac{\sin x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$

7) Вычислить $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 6x$, $x^2 + y^2 = 16$.

9) Найти длину линии $r = a \sin^3 \frac{j}{3}$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x^2} dx$.

Вариант №13

1) $\int \frac{dx}{1+e^{-x}}$

2) $\int e^{\arccos x} dx$

3) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}$

4) $\int \frac{xdx}{x^3-3x+2}$

5) $\int \frac{dx}{\cos x}$

6) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx$

7) Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{3}} e^x \sin^2 x dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2}$, $x^2 + y^2 = 8$.

9) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной полуэллипсом $2y = 3\sqrt{4-x^2}$ и параболой $y = 1 - \frac{x^2}{4}$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$.

Вариант №14

1) $\int xe^{-x^2} dx$

2) $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$

3) $\int \frac{\sqrt[6]{x+a}-1}{(x+a)(1+\sqrt[3]{x+a})} dx$

4) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

5) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^3 x}$

6) $\int \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}$

7) Вычислить $\int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{3}} \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3(2 - x)$, $y = 0$.

9) Найти длину кардиоиды $\rho = a(1 + \cos \varphi)$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_3^5 \frac{x^2 dx}{\sqrt{x-3}}$.

Вариант №15

1) $\int \frac{x dx}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$

2) $\int x^3 \ln x dx$

3) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

4) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$

5) $\int \cos^6 x dx$

6) $\int \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$

7) Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{p}{3}} \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

9) Найти длину петли линии $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{2}$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_{-1}^1 \frac{3x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^2}} dx$.

Вариант №16

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}$

2) $\int x 3^x dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[4]{x} + 1}$

4) $\int \frac{dx}{x(1+x)(1+x+x^2)}$

5) $\int \sin 6x \cdot \cos 2x dx$

6) $\int \frac{\cos^2 x dx}{1 - 2 \cos^2 x}$

- 7) Вычислить $\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{adx}{(x-a)(x-2a)}$.
- 8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x - x^2$.
- 9) Найти длину линии $x = a \cos 5t$, $y = a \sin 5t$.
- 10) Вычислить несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Вариант №17

- 1) $\int \frac{xdx}{x^3 + 1}$
- 2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$
- 3) $\int (x^2 - 2x + 3) \cos x dx$
- 4) $\int \sqrt{x^2 + 4x + 5} dx$
- 5) $\int \sin^4 x dx$
- 6) $\int \frac{dx}{\cos x(3 - \sin x)}$
- 7) Вычислить $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3 dx}{\left(\frac{5}{8} - x^4\right) \sqrt{\frac{5}{8} - x^4}}$.
- 8) Найти площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью Ox .
- 9) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^4$, $y = x^2$.
- 10) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{\arctg(x-1)dx}{\sqrt[3]{(x-1)^4}}$.

Вариант №18

- 1) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$
- 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 9)^3}}$
- 3) $\int \frac{xdx}{x^3 - 1}$
- 4) $\int \frac{xdx}{(x^2 + 1)^{\frac{3}{4}}}$

$$5) \int \sin^3 2x \cos^3 2x dx$$

$$6) \int \frac{\sin x \cos x dx}{1 + \sin^4 x}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной петлей кривой $x^3 + x^2 - y^2 = 0$.

9) Вычислить длину кривой $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$,
 $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$.

$$10) \text{ Вычислить несобственный интеграл } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

Вариант №19

$$1) \int \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}}$$

$$2) \int x \arcsin x dx$$

$$3) \int \sqrt{x^2 - 2x + 10} dx$$

$$4) \int \frac{x^2 + 1}{(x+1)^2(x-1)} dx$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin^3 x \cos^5 x}$$

$$6) \int \frac{dx}{\cos^6 x + \sin^6 x}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}}.$$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = a \sin 2\varphi$.

9) Найти объем тела, образованного вращением окружности $x^2 + (y - 4)^2 = 9$ вокруг оси Ox .

$$10) \text{ Вычислить несобственный интеграл } \int_1^{\infty} \frac{dx}{x(x+1)}.$$

Вариант №20

$$1) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

$$2) \int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

$$3) \int \sqrt{(x^2 - 1)^3} dx$$

$$4) \int \frac{(x^3 + x^2 + 1)dx}{x^3 - 5x^2 + 6x}$$

$$5) \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$$

$$6) \int \frac{dx}{3\sin x + \cos x - 1}$$

7) Вычислить $\int_{\frac{p}{8}}^{\frac{p}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 2\cos 3\varphi$.

9) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x+x^2}$.

Вариант №21

1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$

2) $\int x^2 \arctg x dx$

3) $\int \sqrt{4x-x^2} dx$

4) $\int \frac{x dx}{(x-1)^2 (x^2+2x+2)}$

5) $\int tg^5 x dx$

6) $\int \frac{dx}{\cos x (2 + \sin x)}$

7) Вычислить $\int_0^{\frac{p}{3}} \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 3e^j$, $j = -p$, $j = p$.

9) Найти длину дуги кривой $x = (\cos t + t \sin t)$, $y = \sin t - t \cos t$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

10) Вычислить несобственный интеграл $\int_0^{\infty} \frac{x dx}{(1+x)^3}$.

Вариант №22

1) $\int tg x dx$

2) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} dx$

3) $\int \frac{\sqrt{x^2+5}}{x^2} dx$

4) $\int \frac{x^4 + 3x^3 + 3x^2 - 5}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx$

$$5) \int \cos x \cos 2x \cos 3x dx$$

$$6) \int \frac{dx}{\sin^4 x - \cos^4 x}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[4]{x^3 + 1}}.$$

$$8) \text{ Найти площадь общей части эллипсов } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

$$9) \text{ Найти длину кардиоиды } \rho = 3(1 - \cos \varphi).$$

$$10) \text{ Вычислить несобственный интеграл } \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{(1+x)^2}.$$

Вариант №23

$$1) \int \operatorname{ctg} x dx$$

$$2) \int \frac{x dx}{\sin^2 x}$$

$$3) \int \sqrt{1 - 2x - x^2} dx$$

$$4) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

$$5) \int \sin 5x \cos x dx$$

$$6) \int \frac{\cos^2 x dx}{(\sin^2 x + 4 \cos^2 x)^2}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_0^{\frac{\pi}{w}} \sin^2(wt + j_0) dt.$$

$$8) \text{ Найти площадь фигуры, ограниченной линиями } r = a, r = a(1 + \sin^2 2\varphi).$$

$$9) \text{ Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси } Ox \text{ фигуры, ограниченной линиями } x^2 + y^2 = 1 (x > 0), y^2 = \frac{3}{2}x.$$

$$10) \text{ Вычислить несобственный интеграл } \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}.$$

Вариант №24

$$1) \int \operatorname{ctg}^2 x dx$$

$$2) \int \frac{x \cos x dx}{\sin^2 x}$$

$$3) \int \sqrt{(3 - 2x - x^2)^3} dx$$

$$4) \int \frac{x dx}{(x-1)(x^2 + x + 1)^2}$$

$$5) \int \frac{\cos^4 x dx}{\sin^3 x}$$

$$6) \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2x$, $y^2 = 4x - x^2$ ($x \leq 2$).

9) Найти длину полукубической параболы $y^2 = x^3$, заключенной внутри окружности $x^2 + y^2 = 6x$.

$$10) \text{ Вычислить несобственный интеграл } \int_1^{\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^6}.$$

Вариант №25

$$1) \int \frac{x^4 dx}{(x^5 + 1)^4}$$

$$2) \int e^x \sin x dx$$

$$3) \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$$

$$4) \int \frac{(x-1)dx}{(x^2 + 1)^3}$$

$$5) \int \sin^5 x \cos^5 x dx$$

$$6) \int \frac{\sin^2 x dx}{(9 \sin^2 x + \cos^2 x)^2}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}}.$$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = 4\cos^3 t$, $y = 4\sin^3 t$.

9) Найти длину дуги третьего витка спирали Архимеда $\rho = 4\varphi$.

$$10) \text{ Вычислить несобственный интеграл } \int_1^2 \frac{x^2 dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

Вариант №26

$$1) \int \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}$$

$$2) \int x \sin x \cos x dx$$

$$3) \int x^2 \sin x dx$$

$$4) \int \frac{5x-13}{(x^2-5x+6)^2} dx$$

$$5) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$6) \int \frac{dx}{1 - \sin x}$$

7) Вычислить $\int_0^4 x^3 e^{x^2} dx$.

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 3 \cos j, j = \frac{p}{6},$

$j = \frac{p}{4}.$

9) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = 2x^2, y = 4 - 2x^2,$ вокруг оси Ox .

10) Исследовать на сходимость $\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}.$

Вариант №27

1) $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$

2) $\int 3^x \cos x dx$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$

4) $\int \frac{x^3 + 2}{x^3 - 4x} dx$

5) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$

6) $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

7) Вычислить $\int_1^2 x \log_2 x dx.$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной окружностью $r = 4$ и кардиоидой $r = 2(1 - \cos \varphi).$

9) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{1+x^2}, y = \frac{x}{2}, x = 0.$

10) Исследовать на сходимость $\int_2^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3 - 1}}.$

Вариант №28

1) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^6}}$

2) $\int x^2 \ln x dx$

$$3) \int \frac{dx}{(x^2 - 3)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$4) \int \frac{x^2 + 6x}{x(x + 2)^2} dx$$

$$5) \int \cos^5 x dx$$

$$6) \int \frac{dx}{\sin x - 3 \cos x}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx.$$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 2$, $x + 2y - 5 = 0$.

9) Найти длину астроида $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$.

$$10) \text{ Исследовать на сходимость } \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

Вариант №29

$$1) \int \frac{x^5 dx}{x^6 - 1}$$

$$2) \int \sin(\ln x) dx$$

$$3) \int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2x-3}}$$

$$4) \int \frac{3x^2 + 2x - 1}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

$$5) \int \cos^4 x \sin^2 x dx$$

$$6) \int \frac{dx}{1 + 3 \sin x}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_1^e \ln^3 x dx.$$

8) Найти площадь общей части фигур, ограниченных кривыми $r = 3 + \cos 4\varphi$, $r = 2 - \cos 4\varphi$.

9) Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = 2 - x^2$.

$$10) \text{ Исследовать на сходимость } \int_2^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

Вариант №30

$$1) \int \cos \frac{1}{x^2} \frac{dx}{x^3}$$

$$2) \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$$

$$3) \int \frac{dx}{(5+x)\sqrt{1+x}}$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{x(x^2+1)^3}$$

$$5) \int \sin^6 x dx$$

$$6) \int \frac{dx}{3\sin x + 4\cos x}$$

$$7) \text{ Вычислить } \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dj}{\sqrt{3}\cos j + \sin j}.$$

8) Найти площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 2a(2 + \cos \varphi)$.

9) Найти длину полукубической параболы $y^2 = (x+1)^3$ от $x = 0$ до $x = 3$.

10) Исследовать на сходимость $\int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$.