Лекция 19.
Производные и дифференциалы высших порядков, их свойства. Точки экстремума функции. Теоремы Ферма и Ролля.

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема на некотором отрезке [ab]. В таком случае ее производная представляет собой тоже некоторую функцию x. Продифференцировав эту функцию, мы получим так называемую **вторую производную (или производную второго порядка)** функции $f(x)$. Продолжая эту операцию, можно получить производные третьего, четвертого и более высоких порядков. При этом $f`(x)$ будем называть производной первого порядка.

Определение 19.1. **Производной *n*-го порядка (или *n*-й производной)** от функции $f(x)$ называется производная (первого порядка) от ее $(n-1)$-й производной.
Обозначение: $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'=f^{(n)}(x)$. Производные 2-го и 3-го порядка обозначаются соответственно y'' и y'''.

Примеры.

1) Найдем производную 3-го порядка от функции $y=x^3-5x^2+3x+12$.
$y'=3x^2-10x+3,\ \ y''=(y')'=6x-10,\ y'''=(y'')'=6.$
2) Получим общую формулу для производной n-го порядка функции $y=a^{bx}$.
$y'=a^{bx}\cdot \ln a\cdot b,\ \ y''=\ln a\cdot b(a^{bx})'=a^{bx}\cdot \ln^2 a\cdot b^2,\ldots,\ y^{(n)}=a^{bx}\cdot \ln^n a\cdot b^n.$

Свойства производных высших порядков.

Основные свойства производных высших порядков следуют из соответствующих свойств первой производной:

1. $(cf(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$.
2. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$.
3. Для $y=x^m$ $y^{(n)}=n(n-1)\ldots(n-m+1)x^{m-n}$. Если m – натуральное число, то при $n>m$ $y^{(n)}=0$.
4. Можно вывести так называемую **формулу Лейбница**, позволяющую найти производную n-го порядка от произведения функций $f(x)g(x)$:
$$(fg)^{(n)} = f^{(n)}g + nf^{(n-1)}g' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} f^{(n-2)}g'' + \ldots + fg^{(n)}\ . \qquad (19.1)$$
Заметим, что коэффициенты в этой формуле совпадают с соответствующими коэффициентами формулы бинома Ньютона, если заменить производные данного порядка той же степенью переменной. Для $n=1$ эта формула была получена при изучении первой производной, для производных высших порядков ее справедливость можно доказать с помощью метода математической индукции.
5. Получим формулу для второй производной функции, заданной параметрически.

Пусть $x = \varphi(t), y = \psi(t), t_0 \le t \le T$. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Следовательно,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}:\frac{dx}{dt}=\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3} \qquad (19.2)$$

Дифференциалы высших порядков.

Определение 19.2. Дифференциал от дифференциала функции называется ее **вторым дифференциалом** или **дифференциалом второго порядка**.
Обозначение: $d^2y=d(dy)$.
При вычислении второго дифференциала учтем, что dx не зависит от x и при дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель.
Итак, $d^2y=d(dy)=d(f'(x)dx)=(f'(x)dx)'dx=(f'(x))'(dx)^2=f''(x)dx^2$. (19.3)
Подобным же образом можно найти третий дифференциал от данной функции:
$d^3y=d(d^2y)=f'''(x)d^3x$ и дифференциалы более высоких порядков.

Определение 19.3. **Дифференциалом *n*-го порядка** называется первый дифференциал от дифференциала (n-1)-го порядка:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = (f^{(n-1)}(x)d^{n-1}x)' = f^{(n)}(x)d^nx. \qquad (19.4)$$

Свойства дифференциалов высших порядков.

1. Производную любого порядка можно представить как отношение дифференциалов соответствующего порядка:

$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad f''(x)=\frac{d^2y}{dx^2},\ldots, f^{(n)}(x)=\frac{d^ny}{dx^n}. \qquad (19.5)$$

2. Дифференциалы высших порядков **не обладают свойством инвариантности**.

Покажем это на примере второго дифференциала. Если $y=F(\varphi(x))=F(u)$, где $u=\varphi(x)$, то $d^2y=d(F'(u)du)$. Но $du=\varphi'(x)dx$ зависит от x, поэтому
$d^2y=d(F'(u))du+F_u'(u)d(du)=F''_{uu}(u)(du)^2+F_u'(u)d^2u$, где $d^2u=\varphi''(x)(dx)^2$. Таким образом, форма второго дифференциала изменилась при переходе к аргументу u.

Точки экстремума функции.

Определение 19.4. Точка x_0 называется **точкой максимума (минимума)** функции $y = =f(x)$, если $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ для всех x из некоторой δ-окрестности точки x_0 .

Определение 19.5. Точки максимума и минимума функции называются ее **точками экстремума**.

Примеры.
1. $y=x^2$ имеет минимум при x=0.
2. $y=-|x-3|$ имеет максимум при x=3.
3. $y=\sin x$ имеет минимумы при $x=-\frac{p}{2}+2pn$ и максимумы при $x=\frac{p}{2}+2pn$.

Теорема 19.1 (теорема Ферма). Если функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, принимает в этой точке наибольшее (наименьшее) в рассматриваемой окрестности значение и имеет в точке x_0 производную, то $f'(x_0)$=0.

Доказательство.Пусть $f(x_0)$ – наибольшее значение функции, то есть для любой точки выбранной окрестности выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$. Тогда, если $x < x_0$,
$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \ge 0$, а если $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \le 0$.
Переходя к пределу в полученных неравенствах, находим, что из первого из них следует, что $f'(x_0) \ge 0$, а из второго – что $f'(x_0) \le 0$. Следовательно, $f'(x_0) = 0$.

Замечание. В теореме Ферма важно, что x_0 – внутренняя точка для данного промежутка. Например, функция $y = x$, рассматриваемая на отрезке [0;1], принимает наибольшее и наименьшее значения соответственно при $x = 1$ и $x = 0$, но ее производная в этих точках в ноль не обращается.

Теорема 19.2 (теорема Ролля). Если функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[ab]$;
2) дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка;
3) принимает равные значения на концах этого отрезка, то есть $f(a) = f(b)$,

то внутри интервала (ab) существует по крайней мере одна точка $x = c$, $a < c < b$, такая, что $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть M и m – наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на $[ab]$. Тогда, если $m = M$, то $f(x) = m = M$ – постоянная функция, и $f'(x)=0$ для любой точки отрезка $[ab]$. Если же $m<M$, то по теореме 16.2 хотя бы одно из значений m или M достигается во внутренней точке c отрезка $[ab]$ (так как на концах отрезка функция принимает равные значения). Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$.

Замечание 1. В теореме Ролля существенно выполнение всех трех условий. Приведем примеры функций, для каждой из которых не выполняется только одно из условий теоремы, и в результате не существует такой точки, в которой производная функции равна нулю.

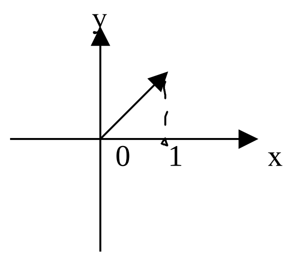


Рис. 1.

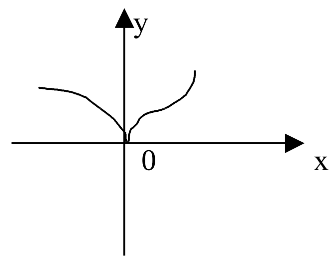


Рис. 2.

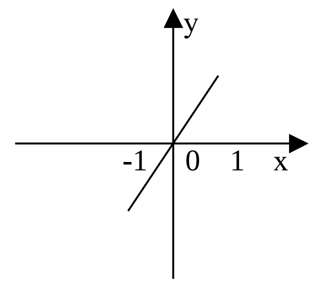


Рис. 3.

Действительно, у функции, график которой изображен на рис. 1, $f(0)=f(1)=0$, но $x=1$ – точка разрыва, то есть не выполнено первое условие теоремы Ролля. Функция, график которой представлен на рис.2, не дифференцируема при $x = 0$, а для третьей функции $f(-1)\neq f(1)$.

Замечание 2. Геометрический смысл теоремы Ролля: на графике рассматриваемой функции найдется по крайней мере одна точка, касательная в которой параллельна оси абсцисс.

Лекция 20.

Теоремы Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Раскрытие неопределенностей.

Теорема 20.1 (теорема Лагранжа). Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$ и дифференцируема во всех внутренних точках этого отрезка, то внутри отрезка $[ab]$ найдется хотя бы одна точка c, $a < c < b$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a) \qquad (20.1)$$

Доказательство.

Обозначим $Q = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ и рассмотрим вспомогательную функцию

F(x) = f(x) - f(a) - (x - a)Q. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля: она непрерывна на [*ab*], дифференцируема на (*ab*) и *F(a)=F(b)=0.* Следовательно, на интервале (*ab*) есть точка *c*, в которой *F′(c)=0.* Но *F′(x)=f′(x) – Q,* то есть *F′(c) = f′(c) – Q.* Подставив в это равенство значение *Q*, получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

откуда непосредственно следует утверждение теоремы.

Замечание. Геометрический смысл теоремы Лагранжа: на графике функции *y = f(x)* найдется точка, касательная в которой параллельна отрезку, соединяющему точки графика с абсциссами *a* и *b.*

Теорема 20.2 (теорема Коши). Если *f(x)* и *g(x)* – функции, непрерывные на [*ab*] и дифференцируемые на (*ab*), и *g′(x)*≠0 на (*ab*), то на (*ab*) найдется такая точка *x=c, a<c<b,* что $\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Доказательство.

Обозначим $Q = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$. При этом *g(b)-g(a)*≠0, иначе по теореме Ролля нашлась бы точка внутри отрезка [*ab*], в которой *g′(x)*=0, что противоречит условию теоремы. Рассмотрим вспомогательную функцию *F(x) = f(x) – f(a) – Q(g(x) – g(a)),* для которой выполнены все условия теоремы Ролля (в частности, *F(a)=F(b)=0*). Следовательно, внутри отрезка [*ab*] существует точка *x=c*, в которой *F′(c)*=0. Но *F′(x)=f′(x) - Qg′(x),* поэтому *f′(c) - Qg′(c)*=0, откуда $Q = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Подставляя в это равенство значение *Q*, получаем доказательство утверждения теоремы.

Раскрытие неопределенностей.

Если функции *f(x)* и *g(x)* удовлетворяют на некотором отрезке [*ab*] условиям теоремы Коши и *f(a) = g(a)* = 0, то отношение *f(x)/g(x)* не определено при *x=a*, но определено при остальных значениях *x*. Поэтому можно поставить задачу вычисления предела этого отношения при *x→a.* Вычисление таких пределов называют обычно «раскрытием неопределенностей вида {0/0}».

Теорема 20.3 (правило Лопиталя). Пусть функции *f(x)* и *g(x)* удовлетворяют на отрезке [*ab*] условиям теоремы Коши и *f(a)=g(a)=0.* Тогда, если существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. (20.2)

Доказательство.

Выберем $x \in [ab], x \neq a$. Из теоремы Коши следует, что $\exists x : a < x < x,$ такое, что $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. По условию теоремы *f(a)=g(a)*=0, поэтому $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. При $x \to a$

$x \to a$. При этом, если существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$. Поэтому $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A.$ Теорема доказана.

Пример. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x-a} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{(a^x - x^a)'}{(x-a)'} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x \ln a - ax^{a-1}}{1} = a^a \ln a - a^a = a^a(\ln a - 1)$ при $a>0$.

Замечание 1. Если *f(x)* или *g(x)* не определены при $x=a$, можно доопределить их в этой точке значениями *f(a)=g(a)*=0. Тогда обе функции будут непрерывными в точке *a*, и к этому случаю можно применить теорему 20.3.

Замечание 2. Если *f′(a)=g′(a)*=0 и *f′(x)* и *g′(x)* удовлетворяют условиям, наложенным в теореме 20.3 на *f(x)* и *g(x)*, к отношению $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ можно еще раз применить правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{g''(x)}$ и так далее.

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\,ctgx - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ctgx - \dfrac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x - x}{2x\sin^2 x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{2\sin^2 x + 2x\cdot 2\sin x\cos x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-2\sin^2 x}{2\sin x(\sin x + 2x\cos x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{\sin x + 2x\cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{\cos x + 2\cos x - 2x\sin x} = -\dfrac{1}{3}.$

Правило Лопиталя можно применять и для раскрытия неопределенностей вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, то есть для вычисления предела отношения двух функций, стремящихся к бесконечности при $x \to a$.

Теорема 20.4. Пусть функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны и дифференцируемы при $x \neq a$ в окрестности точки *a*, причем $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ и существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то существует и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, причем $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$.

Доказательство.
Выберем в рассматриваемой окрестности точки *a* точки α и *x* так, чтобы $\alpha < x < a$ (или $a < x < \alpha$). Тогда по теореме Коши существует точка *c* ($a < c < x$) такая, что

$\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Так как $\dfrac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}\dfrac{1 - \dfrac{f(a)}{f(x)}}{1 - \dfrac{g(a)}{g(x)}}$, получаем:

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}, \text{ откуда } \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \frac{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}}. \qquad (20.3)$$

Так как $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, можно для любого малого ε выбрать α настолько близким к a, что для любого c будет выполняться неравенство $\left|\dfrac{f'(c)}{g'(c)} - A\right| < e$,

$$\text{или } A - e < \frac{f'(c)}{g'(c)} < A + e. \qquad (20.4)$$

Для этого же значения ε из условия теоремы следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}} = 1$ (так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$), поэтому

$$\left|\frac{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}} - 1\right| < e, \text{ или } 1 - e < \frac{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}} < 1 + e. \qquad (20.5)$$

Перемножив неравенства (20.4) и (20.5), получим

$(A-e)(1-e) < \dfrac{f'(c)}{g'(c)} \dfrac{1-\dfrac{g(a)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(a)}{f(x)}} < (A+e)(1+e)$, или, после использования равенства (20.3):

$(A-e)(1-e) < \dfrac{f(x)}{g(x)} < (A+e)(1+e)$. Поскольку ε – произвольно малое число, отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = A = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Теорема 20.4 верна и при $A=\infty$. В этом случае $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g'(x)}{f'(x)} = 0$. Тогда и $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Замечание 2. Теоремы 20.3 и 20.4 можно доказать и для случая, когда $x \to \infty$.

Пример.

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(x^{-2})'} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{2}{x^3}} = -2\lim_{x\to 0} x^2 = 0.$$

Лекция 21.
Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и в форме Лагранжа. Разложение основных элементарных функций по формуле Тейлора. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений.

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, имеющую в окрестности точки $x=a$ все производные до порядка $(n+1)$ включительно, и поставим задачу: найти многочлен $y=P_n(x)$ степени не выше n, для которого его значение в точке a, а также значения его производных по n-й порядок равны значениям при $x=a$ выбранной функции и ее производных соответствующего порядка:

$$P_n(a)=f(a), P_n'(a)=f'(a), P_n''(a)=f''(a), ..., P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a). \qquad (21.1)$$

Пусть искомый многочлен имеет вид:

$$P_n(x)=C_0+C_1(x-a)+C_2(x-a)^2+...+C_n(x-a)^n. \qquad (21.2)$$

При этом

$$P_n'(x)=C_1+2C_2(x-a)+3C_3(x-a)^2+...+nC_n(x-a)^{n-1},$$

$$P_n''(x)=2\cdot 1\cdot C_2+3\cdot 2\cdot C_3(x-a)+...+n(n-1)C_n(x-a)^{n-2},$$

....,

$$P_n^{(n)}(x)=n(n-1)...\cdot 2\cdot 1\cdot C_n.$$

Тогда

$$\begin{gathered} P_n(a)=C_0=f(a), P_n'(a)=C_1=f'(a), P_n''(a)=2C_2=f''(a), P_n'''(a)=3\cdot 2C_3=f'''(a), ..., \\ P_n^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)...\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot C_n=f^{(n)}(a). \end{gathered} \qquad (21.3)$$

Из формул (21.3) можно выразить коэффициенты C_i через значения производных данной функции в точке a.

Замечание. Произведение последовательных натуральных чисел $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)n$ называется **факториалом числа n** и обозначается

$$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot(n-1)n. \qquad (21.4)$$

Дополнительно вводится $0!=1$.

Используя это обозначение, получим:

$$C_0=f(a), C_1=f'(a), C_2=\frac{1}{2!}f''(a), ..., C_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a). \qquad (21.5)$$

Таким образом, искомый многочлен имеет вид:

$$P_n(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (21.6)$$

Обозначим через $R_n(x)$ разность значений данной функции $f(x)$ и построенного многочлена $P_n(x)$: $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$, откуда $f(x)=P_n(x)+R_n(x)$ или

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x). \qquad (21.7)$$

Полученное представление функции называется **формулой Тейлора**, а $R_n(x)$ называется **остаточным членом** формулы Тейлора. Для тех значений x, для которых $R_n(x)$ мало, многочлен $P_n(x)$ дает приближенное представление функции $f(x)$. Следовательно, формула (21.7) дает возможность заменить функцию $y=f(x)$ многочленом $y=P_n(x)$ с соответствующей степенью точности, равной значению остаточного члена $R_n(x)$.

Формы остаточного члена в формуле Тейлора.

Покажем, что $R_n(x)=o(x-a)^n$. Из выбора многочлена $P_n(x)$ следует, что

$R_n'(a) = R_n''(a) = \ldots = R_n^{(n)}(a) = 0$. Применив для вычисления предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n}$ n раз правило Лопиталя, получим:

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{R_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \ldots = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{R_n^{(n-1)}(x)}{n!(x-a)} = \dfrac{R_n^{(n)}(a)}{n!} = 0$. Утверждение доказано.

Представление остаточного члена в виде $R_n = o(x-a)^n$ (21.8)
называется записью остаточного члена **в форме Пеано**.

Найдем еще один вид записи $R_n(x)$. Представим его в виде

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x) \qquad (21.9)$$

и определим вид функции $Q(x)$. Из (21.7) следует, что

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}Q(x). \qquad (21.10)$$

Пусть при заданных значениях x и a $Q(x)=Q$. Рассмотрим вспомогательную функцию от t $(a < t < x)$:

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{x-t}{1}f'(t) - \frac{(x-t)^2}{2!}f''(t) - \ldots - \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}Q.$$

При этом предполагается, что a и x приняли фиксированные значения. Тогда

$$F'(t) = -f'(t) + f'(t) - \frac{x-t}{1}f''(t) + \frac{2(x-t)}{2!}f''(t) - \ldots - \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t) + \frac{n(x-t)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(t) -$$

$$-\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(n+1)(x-t)^n}{(n+1)!}Q = -\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) + \frac{(x-t)^n}{n!}Q,$$

то есть $F(t)$ дифференцируема в окрестности точки a. Из (21.10) следует, что $F(x) = F(a) = 0$, поэтому к функции $F(t)$ можно применить теорему Ролля: существует $t = \xi$ $(a < \xi < x)$ такое, что $F'(\xi) = 0$. Тогда $-\dfrac{(x-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + \dfrac{(x-x)^n}{n!}Q = 0$, откуда $Q = f^{(n+1)}(\xi)$.

Подставив это выражение в формулу (21.9), получим запись остаточного члена **в форме Лагранжа**:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x). \qquad (21.11)$$

Так как $a < \xi < x$, можно представить $\xi = a + \theta(x-a)$, где $0 < \theta < 1$. При этом

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a + q(x-a)). \qquad (21.12)$$

Замечание. Если в формуле Тейлора принять $a = 0$, этот частный случай называют **формулой Маклорена**:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(qx). \qquad (21.13)$$

Разложение по формуле Тейлора некоторых элементарных функций.

Найдем разложения по формуле Тейлора при $a = 0$ (точнее, по формуле Маклорена) функций $y = e^x$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \ln(1+x)$, $y = (1+x)^m$.

1) $f(x) = e^x$.

f(x) = *f '(x)* = … = $f^{(n)}(x) = e^x$, следовательно, *f(0)* = *f '(0)* = … = $f^{(n)}(0)$ = 1. Подставляя эти результаты в формулу (21.13), получим:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{qx}, 0 < q < 1. \qquad (21.14)$$

Отметим, что для любого x $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

2) $f(x) = \sin x$.

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{p}{2}),\ f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2\frac{p}{2}),\ f''(0) = 0,$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + 3\frac{p}{2}),\ f'''(0) = -1,$$

………………………………………………….

$$f^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{p}{2}),\ f^{(n)}(0) = \sin\frac{pn}{2},$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\frac{p}{2}),\ f^{(n+1)}(x) = \sin(x + (n+1)\frac{p}{2}).$$

Разложение по формуле Маклорена имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\frac{pn}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\sin(x + (n+1)\frac{p}{2}). \qquad (21.15)$$

В этом случае, как и в предыдущем, при всех значениях x $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

Можно предложить еще один вариант этой формулы:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \qquad (21.15\text{ `})$$

3) $f(x) = \cos x$.

Таким же образом, как и для синуса, можно получить разложение по формуле Тейлора:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{x^n}{n!}\cos\frac{pn}{2} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\cos(x + (n+1)\frac{p}{2}) =$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}). \qquad (21.16)$$

4) $f(x) = \ln(1 + x)$. Тогда

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1},\ f''(x) = (-1)(1+x)^{-1}, \ldots,\ f^{(n)}(x) = (-1)^n (n-1)!(1+x)^{-n},$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^n (n-1)!,\ f(0) = 0.$$

Следовательно,

$$\ln x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}). \qquad (21.17)$$

5) $f(x) = (1 + x)^m$. При этом $f^{(n)}(x) = m(m - 1)\ldots(m - n + 1)(1 + x)^{m-n}$,
$f^{(n)}(0) = m(m - 1)\ldots(m - n + 1)$. Тогда

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^{n+1}). \qquad (21.18)$$

Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений.

Заменяя какую-либо функцию, для которой известно разложение по формуле Тейлора, многочленом Тейлора, степень которого выбирается так, чтобы величина остаточного члена не превысила выбранное значение погрешности, можно находить приближенные значения функции с заданной точностью.

Найдем приближенное значение числа *e*, вычислив значение многочлена Тейлора (21.14) при *n*=8:

$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{8!} \approx 2{,}71828.$ При этом $R_8 < \frac{1}{9!} \cdot 3 < 10^{-5}.$

Лекция 22.

Условия возрастания и убывания функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

В предыдущих лекциях использовались известные из курса элементарной математики понятия возрастающей и убывающей функций. Определим их еще раз.

Определение 22.1. Функция $y = f(x)$ называется **возрастающей (убывающей)** на $[ab]$, если

$\forall x_1, x_2 \in [ab]$ таких, что $x_1 < x_2$, $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Теорема 22.1. Если функция $f(x)$, дифференцируемая на $[ab]$, возрастает на этом отрезке, то $f'(x) \geq 0$ на $[ab]$.

Если $f(x)$ непрерывна на $[ab]$ и дифференцируема на (ab), причем $f'(x) > 0$ для $a < x < b$, то эта функция возрастает на отрезке $[ab]$.

Доказательство.

1. Пусть $f(x)$ возрастает на $[ab]$. Тогда при $\Delta x > 0$ $f(x+\Delta x) > f(x),$ то есть $f(x+\Delta x) - f(x) > 0.$ Если же $\Delta x < 0,$ $f(x+\Delta x) < f(x),$ поэтому $f(x+\Delta x) - f(x) < 0.$ Следовательно, в обоих случаях $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} > 0.$ Значит, $\lim\limits_{\Delta x \to o} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \geq 0,$ что и требовалось доказать.

2. Пусть $f'(x) > 0 \forall x \in [ab]$. Выберем $x_1, x_2 \in [ab] : x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$f(x_2) - f(x_1) = f'(x)(x_2 - x_1), x_1 < x < x_2.$ Но по условию $f'(x) > 0,$ поэтому $f(x_2) > f(x_1)$, следовательно, $f(x)$ – возрастающая функция.

Замечание 1. Аналогичную теорему можно доказать и для убывающей функции:
Если $f(x)$ убывает на $[ab]$, то $f'(x) \le 0$ на $[ab]$. Если $f'(x) < 0$ на (ab), то $f(x)$ убывает на $[ab]$.

Замечание 2. Геометрический смысл доказанной теоремы: если функция возрастает на отрезке $[ab]$, то касательная к ее графику во всех точках на этом отрезке образует с осью Ox острый угол (или горизонтальна). Если же функция убывает на рассматриваемом отрезке, то касательная к графику этой функции образует с осью Ox тупой угол (или в некоторых точках параллельна оси Ox).

Необходимое условие экстремума.

В лекции 19 было дано определение максимума и минимума функции.

Теорема 22.2 (необходимое условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ задана в некоторой окрестности точки x_0. Если x_0 является точкой экстремума функции, то $f'(x_0) = 0$ или не существует.

Доказательство. Действительно, производная в точке x_0 либо существует, либо нет. Если она существует, то по теореме Ферма она равна нулю.

Примеры.

1. Функция $y = x^2$ имеет минимум при $x = 0$, причем $(x^2)' = 2x = 0$ при $x = 0$.
2. Минимум функции $y = |x|$ достигается при $x = 0$, причем производная в этой точке не существует.

Замечание. Отметим еще раз, что теорема 22.2 дает **необходимое, но не достаточное** условие экстремума, то есть не во всех точках, в которых $f'(x) = 0$, функция достигает экстремума.

Пример. У функции $y = x^3$ $y' = 3x^2 = 0$ при $x = 0$, однако функция монотонно возрастает во всей области определения.

Определение 22.2. Если функция определена в некоторой окрестности точки x_0 и ее производная в этой точке равна нулю или не существует, точка x_0 называется **критической точкой** функции. Теорема 22.1 означает, что все точки экстремума находятся в множестве критических точек функции.

Достаточные условия экстремума.

Теорема 22.3. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и с каждой стороны от данной точки $f'(x)$ сохраняет постоянный знак. Тогда:

1) если $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой максимума;
2) если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, точка x_0 является точкой минимума;

3) если $f'(x)$ не меняет знак в точке x_0, эта точка не является точкой экстремума.

Доказательство.

Справедливость утверждения 3) следует из теоремы 22.1. Докажем утверждения 1) и 2). По формуле Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$, где x принадлежит окрестности точки x_0, а ξ лежит между x и x_0. Если $f'(\xi) > 0$ при $x < \xi < x_0$ и $f'(\xi) < 0$ при $x_0 < \xi < x$, приращение функции $f(x) - f(x_0) < 0$ по обе стороны x_0, то есть в рассматриваемой точке достигается максимум. Если же производная при $x = x_0$ меняет знак с «+» на «-», точка x_0 является точкой минимума. Следовательно, изменение знака производной в точке x_0 является необходимым и достаточным условием наличия экстремума в этой точке.

Теорема 22.4. Пусть $f'(x_0) = 0$ и у рассматриваемой функции существует непрерывная вторая производная в некоторой окрестности точки x_0. Тогда x_0 является точкой максимума, если $f''(x_0) < 0$, или точкой минимума, если $f''(x_0) > 0$.

Доказательство. Докажем первую часть теоремы. Пусть $f''(x_0) < 0$. Так как по условию $f''(x)$ непрерывна, существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x) < 0$. Вспомним, что $f''(x) = (f'(x))'$, и из условия $(f'(x))' < 0$ следует, что $f'(x)$ убывает в рассматриваемой окрестности. Поскольку $f'(x_0) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$. Тогда по теореме 22.3 точка x_0 является точкой максимума функции, что и требовалось доказать. Утверждение 2) доказывается аналогично.

Теорема 22.5. Пусть функция $y = f(x)$ n раз дифференцируема в точке x_0 и $f^{(k)}(x_0) = 0$ при $k = 1,2,\ldots, n\text{-}1$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда, если n – четное число ($n = 2m$), функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно максимум при $f^{(2m)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(2m)}(x_0) > 0$. Если же n – нечетное число ($n = 2m - 1$), то точка x_0 не является точкой экстремума.

Доказательство.

Из формулы Тейлора (21.6) следует, что $f(x) - f(x_0) = \dfrac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x)$, где ξ лежит между x и x_0.

а) Если $n = 2m$ – четное и $f^{(2m)}(x_0) < 0$, то найдется окрестность точки x_0, в которой $f^{(2m)}(x) < 0$. Пусть x принадлежит этой окрестности, тогда ξ тоже ей принадлежит, то есть $f^{(2m)}(\xi) < 0$. Но $(x - x_0)^{2m} > 0$ при $x \neq x_0$, поэтому $f(x) - f(x_0) < 0$ во всей рассматриваемой окрестности, следовательно, точка x_0 является точкой максимума.

б) Если $n = 2m$ – четное и $f^{(2m)}(x_0) > 0$, то таким же образом доказывается, что x_0 – точка минимума.

в) Если $n = 2m - 1$ – нечетное, то $(x - x_0)^{2m-1}$ имеет разные знаки по разные стороны точки x_0. Поэтому в окрестности этой точки, в которой производная порядка $2m - 1$ сохраняет постоянный знак, приращение функции меняет знак при $x = x_0$. Следовательно, экстремум в этой точке не достигается.

Вывод: проверить наличие экстремума в критической точке можно тремя способами:

1) убедиться, что $f'(x)$ меняет знак при $x = x_0$;

2) определить знак $f''(x_0)$;

3) если $f''(x_0) = 0$, исследовать порядок и знак производной, не обращающейся в 0 в рассматриваемой точке.

Примеры.

1. Определим тип экстремума функции $y = x^3 - 3x + 7$ при $x = 1$. Точка $x = 1$ является критической, так как $y' = 3x^2 - 3x = 0$ при $x = 1$. Так как при $x < 1$ $y' < 0$, а при $x > 1$ $y' > 0$, $x = 1$ – точка минимума. Можно было установить этот факт и с помощью второй производной: $y'' = 6x – 3 = 3 > 0$ при $x = 1$. Следовательно, функция в этой точке достигает минимума (теорема 22.4).

2. Исследуем на экстремум функцию $y = x^5 + x^3$. $y' = 5x^4 + 3x^2 = x^2(5x^2 + 3) = 0$ при $x = 0$. При этом $y'' = 20x^3 + 6x = 0$ при $x = 0$, $y''' = 60x^2 + 6 = 6 \neq 0$ при $x = 0$. Порядок первой ненулевой производной в точке $x = 0$ равен нечетному числу 3, следовательно, по теореме 22.5 функция не имеет экстремума в этой точке, а так как критическая точка единственна, функция вообще не имеет экстремумов.

Наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема на отрезке [ab]. Тогда по теореме 17.2 она непрерывна на нем, и по теореме 16.2 достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значения. Если $f(x)$ имеет на [ab] конечное число критических точек, то ее наибольшее значение будет либо одним из ее максимумов (а именно, наибольшим максимумом), либо будет достигаться в одной из конечных точек отрезка. То же можно сказать и о наименьшем значении. Из сказанного следует, что поиск наибольшего и наименьшего значений дифференцируемой функции на отрезке можно проводить по следующей схеме:

1) найти критические точки функции, принадлежащие данному отрезку;

2) вычислить значения функции в точках a и b, а также в найденных критических точках. Наименьшее из полученных чисел будет наименьшим значением функции на данном отрезке, а наибольшее – ее наибольшим значением на нем.

Пример. Найдем наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x – 15$ на отрезке [-4, 4]. $y' = 3x^2 + 6x – 9 = 0$ при $x = -3$ и $x = 1$. При этом обе найденные критические точки принадлежат данному отрезку. Вычислим значения функции при $x = -4$, $x = -3$, $x = 1$ и $x = 4$.

x	-4	-3	1	4
y	5	12	-20	61

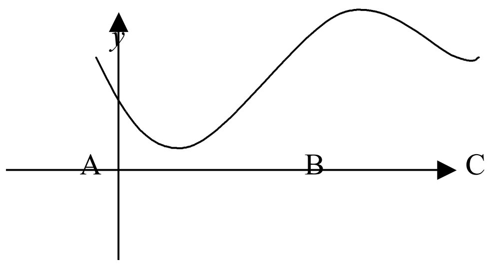
Таким образом, наибольшее значение функции на рассматриваемом отрезке равно 61 и принимается на его правой границе, а наименьшее равно –20 и достигается в точке минимума внутри отрезка.

Лекция 23.

Исследование выпуклости функции. Точки перегиба, их нахождение. Асимптоты функций. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

Определение 23.1. Кривая называется **выпуклой (обращенной выпуклостью вверх)** на интервале (ab), если все точки кривой лежат ниже любой ее касательной на этом интервале.

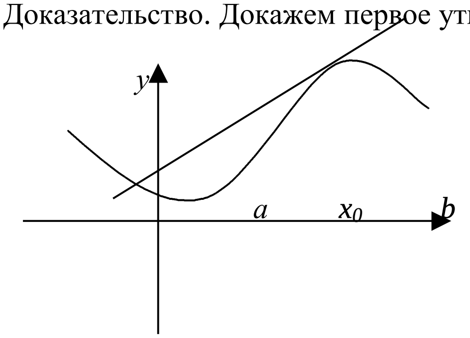
Определение 23.2. . Кривая называется **вогнутой (обращенной выпуклостью вниз)** на интервале (ab), если все точки кривой лежат выше любой ее касательной на этом интервале.



Например, кривая, изображенная на рисунке, выпукла на интервале (BC) и вогнута на интервале (AB).

Теорема 23.1. Если $f''(x) < 0$ во всех точках интервала (ab), то кривая $y = f(x)$ выпукла на этом интервале. Если $f''(x) > 0$ во всех точках интервала (ab), то кривая $y = f(x)$ вогнутаа на этом интервале.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы. Пусть $f''(x) < 0$ на (ab).



Выберем на интервале (ab) произвольную точку $x = x_0$ и докажем, что все точки кривой на этом интервале лежат ниже проведенной в точке с абсциссой x_0 касательной, то есть ордината любой точки кривой на рассматриваемом интервале меньше ординаты касательной. Уравнение кривой имеет вид $y = f(x)$, а уравнение касательной при $x = x_0$:

$$\bar{y} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Тогда $y - \bar{y} = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)$. Применив теорему Лагранжа, получим:
$y - \bar{y} = f'(c)(x - x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0)$, где c лежит между x и x_0.
Применим к первому множителю правой части полученного равенства еще раз теорему Лагранжа: $y - \bar{y} = f''(c_1)(c - x_0)(x - x_0)$ (23.1)

(здесь c_1 – между x_0 и c). Пусть $x > x_0$. Тогда $x_0 < c_1 < c < x$, то есть $c - x_0 > 0$, $x - x_0 > 0$, $f''(c_1) < 0$, поэтому $y - \bar{y} < 0$. Если же $x < x_0$, то $x < c < c_1 < x_0$, поэтому $c - x_0 < 0$, $x - x_0 < 0$, $f''(c_1) < 0$. Но при этом по-прежнему $y - \bar{y} < 0$. Таким образом, любая точка кривой на данном интервале лежит ниже касательной в точке с абсциссой x_0. Следовательно, кривая является выпуклой.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогичным образом.

Определение 23.3. Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется **точкой перегиба**.

Замечание. Если в точке перегиба существует касательная к кривой, то в этой точке она пересекает кривую, потому что по одну сторону от данной точки кривая проходит выше касательной, а по другую – ниже.

Теорема 23.2 (необходимое условие точки перегиба). Если в точке x_0 перегиба кривой, являющейся графиком функции $y = f(x)$, существует вторая производная $f''(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Так как при $x = x_0$ $y = \bar{y} = f(x_0), y' = \bar{y}' = f'(x_0)$, по формуле Тейлора получаем: $y - \bar{y} = \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o(x - x_0)^2$. Если бы $f''(x_0) \neq 0$, разность $y - \bar{y}$ сохраняла бы постоянный знак в некоторой окрестности точки x_0, в то время как в точке перегиба эта разность должна менять знак. Следовательно, $f''(x_0) = 0$.

Теорема 23.3 (достаточное условие точек перегиба). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0, дважды дифференцируема в проколотой окрестности этой точки и $f''(x)$ меняет знак при $x = x_0$, то x_0 – точка перегиба.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (23.1), получим, что знак разности $y - \bar{y}$ определяется знаком $f''(c_1)$, так как $(c - x_0)(x - x_0) > 0$ по обе стороны точки x_0. Следовательно, $y - \bar{y}$ меняет знак при $x = x_0$, то есть x_0 – точка перегиба.

Замечание. Можно доказать, что если в условиях теоремы 22.5 критическая точка не является точкой экстремума, то она является точкой перегиба.

Пример. Найдем интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба функции $y = x^3 - 6x^2 + x - 12$. $y' = 3x^2 - 12x + 1$, $y'' = 6x - 12$. $y'' = 0$ при $x = 2$, $y'' < 0$ при $x < 2$, $y'' > 0$ при $x > 2$. Таким образом, график функции является выпуклым при $x < 2$, вогнутым при $x > 2$, а $x = 2$ – точка его перегиба.

Асимптоты.

Определение 23.4. Прямая называется **асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если расстояние от переменой точки этого графика до прямой стремится к нулю при удалении точки в бесконечность.

Рассмотрим три вида асимптот и определим способы их нахождения.

1. Вертикальные асимптоты – прямые, задаваемые уравнениями вида $x = a$. В этом случае определение асимптоты подтверждается, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке a бесконечен.

Пример. Вертикальной асимптотой графика функции $y = 1/x$ является прямая $x = 0$, то есть ось ординат.

2. Горизонтальные асимптоты – прямые вида $y = a$. Такие асимптоты имеет график функции, предел которой при $x \to +\infty$ или при $x \to -\infty$ конечен, т.е. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = a$.

3. Наклонные асимптоты – прямые вида $y = kx + b$. Найдем k и b. Поскольку при $x \to \infty$ $f(x) \approx kx + b$, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$, если этот предел существует, конечен и не равен нулю. Однако даже при выполнении этих условий наклонная асимптота может не существовать. Для ее существования требуется, чтобы имелся конечный предел при $x \to \infty$ разности $f(x) - kx$. Этот предел будет равен b, так как при $x \to \infty$ $f(x) - kx \approx b$.

Замечание. Число вертикальных асимптот графика функции не ограничено, а наклонных и горизонтальных в сумме может быть не более двух (при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$).

Примеры.

1. Функция $y = \text{tg}x$ имеет разрывы 2-го рода при $x = \dfrac{p}{2} + pn$, причем односторонние пределы в этих точках бесконечны. Следовательно, $x = \dfrac{p}{2} + pn$ - вертикальные асимптоты графика.

2. Функция $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ имеет бесконечный разрыв при $x = 1$, то есть $x = 1$ – вертикальная асимптота. $\lim\limits_{x\to\infty} y = \infty$, поэтому горизонтальных асимптот график не имеет. Проверим наличие наклонных асимптот. Для этого вычислим $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+1}{x(x-1)} = 1 = k.$ Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x-1} = 1 = b.$ Заметим, что оба предела не зависят от знака бесконечности, поэтому прямая $y = x + 1$ является асимптотой графика на обоих концах оси Ox.

Общая схема исследования функции.

Результаты, полученные при изучении различных аспектов поведения функции, позволяют сформулировать общую схему ее исследования с целью построения качественного графика, отражающего характерные особенности поведения данной функции. Для этого требуется определить:

1) область определения функции и ее поведение на границах области определения (найти соответствующие односторонние пределы или пределы на бесконечности);

2) четность и периодичность функции;

3) интервалы непрерывности и точки разрыва (указав при этом тип разрыва);

4) нули функции (т.е. значения x , при которых $f(x) = 0$) и области постоянства знака;

5) интервалы монотонности и экстремумы;

6) интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба;

7) асимптоты графика функции.

Заметим, что подробный ответ на первый вопрос фактически содержит ответы на второй и отчасти на седьмой вопросы. Действительно, если в область определения не входят отдельно расположенные точки и найдены односторонние пределы функции в этих точках, то тем самым указан характер разрывов. В частности, если какой-либо из этих односторонних пределов бесконечен, через точку разрыва (или через соответствующую границу области определения) проходит вертикальная асимптота. Если область определения функции не ограничена слева или справа и на бесконечности соответствующего знака существует конечный предел функции, то график имеет на указанном конце оси Ox горизонтальную асимптоту.

Пример. Исследуем функцию $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ и построим ее график.

1. Область определения функции: $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Поведение на границах:
   $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0} \dfrac{x^2+1}{x-1} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0} \dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+1}{x-1} = +\infty$.

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^2+1}{-x-1} \ne \pm f(x)$, следовательно, функция не является четной или нечетной (в этом случае говорят, что рассматриваемая функция общего типа). Функция не является периодической, так как периодическая функция, не равная константе, не может иметь предела на бесконечности.

3. Так как функция является элементарной, она непрерывна во всей области определения, т.е. промежутки непрерывности $x \in (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$. Из ответа на первый вопрос следует, что $x = 1$ – точка разрыва 2-го рода (так как односторонние пределы в этой точке бесконечны).

4. $f(x) \ne 0$ ни при каких значениях x (следовательно, график функции не пересекает ось Ox). $f(x) < 0$ при $x < 1$, $f(x) > 0$ при $x > 1$.

5. Для ответа на этот вопрос найдем производную данной функции.
   $f'(x) = \dfrac{2x(x-1)-(x^2+1)}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0$ при $x = 1 \pm \sqrt{2}$. $f'(x) < 0$ при $x \in (1-\sqrt{2};1) \cup (1;1+\sqrt{2})$ - интервалы убывания функции; $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;1-\sqrt{2}) \in (1+\sqrt{2};+\infty)$ - интервалы возрастания функции. При $x = 1-\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «+» на «-», следовательно, $x = 1-\sqrt{2}$ - точка максимума. При $x = 1+\sqrt{2}$ $f'(x)$ меняет знак с «-» на «+», следовательно, $x = 1+\sqrt{2}$ - точка минимума.

6. $f''(x)=\dfrac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-1)2(x-1)}{(x-1)^4}=\dfrac{4}{(x-1)^3}\neq 0$ ни при каких значениях x.

Следовательно, функция не имеет точек перегиба. $f''(x)<0$ при $x<1$, $f''(x)>0$ при $x>1$, поэтому на интервале $(-\infty;1)$ функция выпукла, а на интервале $(1;+\infty)$ - вогнута.

7. При ответе на первый вопрос показано, что $x = 1$ – вертикальная асимптота графика функции. Там же выяснено, что при $x\to\infty$ функция не имеет конечного предела, следовательно, не имеет и горизонтальных асимптот. Наклонная асимптота $y = x + 1$ найдена в примере 2 настоящей лекции.

Построим график функции $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ на основе результатов проведенного исследования.