Лекция 9.
Вычисление тройного интеграла. Криволинейные системы координат. Якобиан и его геометрический смысл. Замена переменных в кратных интегралах. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле.

Процедура вычисления тройного интеграла аналогична соответствующей операции для двойного интеграла. Для ее описания введем понятие правильной трехмерной области:

Определение 9.1. Трехмерная область *V*, ограниченная замкнутой поверхностью *S*, называется **правильной**, если:

1) любая прямая, параллельная оси O*z* и проведенная через внутреннюю точку области, пересекает *S* в двух точках;
2) вся область *V* проектируется на плоскость O*xy* в правильную двумерную область *D*;
3) любая часть области *V*, отсеченная от нее плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, обладает свойствами 1) и 2).

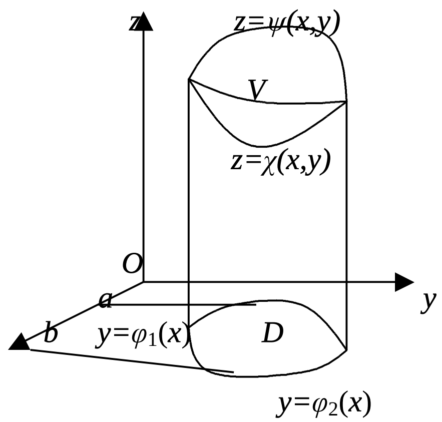


Рис.1.

Рассмотрим правильную область *V*, ограниченную снизу и сверху поверхностями $z=\chi(x,y)$ и $z=\psi(x,y)$ и проектирующуюся на плоскость O*xy* в правильную область *D*, внутри которой *x* изменяется в пределах от *a* до *b*, ограниченную кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ (рис.1). Зададим в области *V* непрерывную функцию *f(x, y, z).*

Определение 9.2. Назовем **трехкратным интегралом от функции *f(x, y, z)* по области *V*** выражение вида:

$$I_V=\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\left(\int_{\chi(x,y)}^{\psi(x,y)}f(x,y,z)dz\right)dy\right)dx. \tag{9.1}$$

Трехкратный интеграл обладает теми же свойствами, что и двукратный. Перечислим их без доказательства, так как они доказываются аналогично случаю двукратного интеграла.

1. Если область *V* разбить на две области V_1 и V_2 плоскостью, параллельной какой-либо из координатных плоскостей, то трехкратный интеграл по области *V* равен сумме трехкратных интегралов по областям V_1 и V_2.
2. Если *m* и *M* – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции *f(x,y,z)* в области *V*, то верно неравенство
   . $mV \le I_V \le MV,$
   где *V* – объем данной области, а I_V – трехкратный интеграл от функции *f(x,y,z)* по области *V.*

3. Трехкратный интеграл I_V от непрерывной функции *f(x,y,z)* по области *V* равен произведению его объема *V* на значение функции в некоторой точке *P* области *V*:

$$I_V = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} \left(\int_{c(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx = f(P)V. \qquad (9.2)$$

Вычисление тройного интеграла.

Теорема 9.1. Тройной интеграл от функции *f(x,y,z)* по правильной области *V* равен трехкратному интегралу по той же области:

$$\iiint_V f(x,y,z)dv = \int_a^b \left(\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} \left(\int_{c(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx. \qquad (9.3)$$

Доказательство.

Разобьем область *V* плоскостями, параллельными координатным плоскостям, на *n* правильных областей $\Delta v_1, \Delta v_2, ..., \Delta v_n$. Тогда из свойства 1 следует, что

$$I_V = I_{\Delta v_1} + I_{\Delta v_2} + ... + I_{\Delta v_n},$$

где $I_{\Delta v_i}$ - трехкратный интеграл от функции *f(x,y,z)* по области Δv_i.

Используя формулу (9.2), предыдущее равенство можно переписать в виде:

$$I_V = f(P_1)\Delta v_1 + f(P_2)\Delta v_2 + ... + f(P_n)\Delta v_n.$$

Из условия непрерывности функции *f(x,y,z)* следует, что предел интегральной суммы, стоящей в правой части этого равенства, существует и равен тройному интегралу $\iiint_V f(x,y,z)dv$. Тогда, переходя к пределу при $r \to 0$, получим:

$$I_V = \iiint_V f(x,y,z)dv,$$

что и требовалось доказать.

Замечание.

Аналогично случаю двойного интеграла можно доказать, что изменение порядка интегрирования не меняет значения трехкратного интеграла.

Пример. Вычислим интеграл $\iiint_V xyzdxdydz,$ где V – треугольная пирамида с вершинами в точках (0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) и (0, 0, 1). Ее проекцией на плоскость Oxy является треугольник с вершинами (0, 0), (1, 0) и (0, 1). Снизу область ограничена плоскостью $z = 0$, а сверху – плоскостью $x + y + z = 1$. Перейдем к трехкратному интегралу:

$\iiint_V xyzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} xyzdz.$ Множители, не зависящие от переменной интегрирования, можно вынести за знак соответствующего интеграла:

$$\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \int_0^{1-x-y} zdz = \int_0^1 xdx \int_0^{1-x} ydy \left(\frac{z^2}{2} \Bigg|_0^{1-x-y} \right) = \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \int_0^{1-x} y(1-x-y)^2 dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 xdx \left((1-x)^2 \frac{y^2}{2} - 2(1-x)\frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} \Bigg|_0^{1-x} \right) = \frac{1}{24}\int_0^1 x(1-x)^4 dx = \frac{1}{24}\int_0^1 (x - 4x^2 + 6x^3 - 4x^4 + x^5)dx =$$

$$= \frac{1}{24}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{4}{5}x^5 + \frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{720}.$$

Криволинейные системы координат в трехмерном пространстве.

1. Цилиндрическая система координат.

Цилиндрические координаты точки *P(ρ,φ,z)* – это полярные координаты *ρ, φ* проекции этой точки на плоскость O*xy* и аппликата данной точки *z* (рис.2).

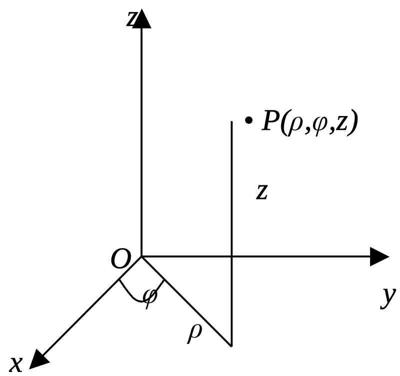


Рис.2

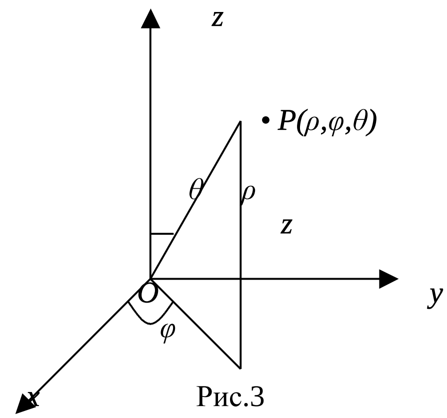


Рис.3

Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым можно задать следующим образом:

$$x = \rho \cos\varphi,\ y = \rho \sin\varphi,\ z = z. \qquad (9.4)$$

2. Сферическая система координат.

В сферических координатах положение точки в пространстве определяется линейной координатой *ρ* – расстоянием от точки до начала декартовой системы координат (или полюса сферической системы), *φ* – полярным углом между положительной полуосью O*x* и проекцией точки на плоскость O*xy*, и *θ* – углом между положительной полуосью оси O*z* и отрезком *OP* (рис.3). При этом

$$r \ge 0,\quad 0 \le j < 2p,\quad 0 \le q \le p.$$

Зададим формулы перехода от сферических координат к декартовым:

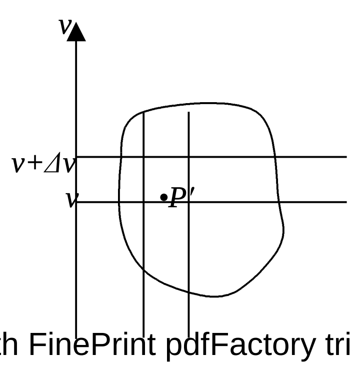
$$x = \rho \sin\theta \cos\varphi,\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi,\ z = \rho \cos\theta. \qquad (9.5)$$

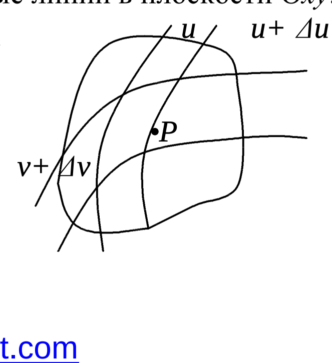
Якобиан и его геометрический смысл.

Рассмотрим общий случай замены переменных в двойном интеграле. Пусть в плоскости O*xy* дана область *D*, ограниченная линией *L*. Предположим, что *x* и *y* являются однозначными и непрерывно дифференцируемыми функциями новых переменных *u* и *v*:

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v). \qquad (9.6)$$

Рассмотрим прямоугольную систему координат O*uv*, точка *P´(u, v)* которой соответствует точке *P(x, y)* из области *D*. Все такие точки образуют в плоскости O*uv* область *D´*, ограниченную линией *L´*. Можно сказать, что формулы (9.6) устанавливают **взаимно однозначное соответствие** между точками областей *D* и *D´*. При этом линиям *u* = const и *v* = const в плоскости O*uv* будут соответствовать некоторые линии в плоскости O*xy*.





v

O *u* *u+Δu* *u* *O* *x*

Рис. 4 .

Рассмотрим в плоскости O*uv* прямоугольную площадку Δ*S´*, ограниченную прямыми *u* = const, *u+Δu* = const, *v* = const и *v+Δv* = const. Ей будет соответствовать криволинейная площадка Δ*S* в плоскости O*xy* (рис.4). Площади рассматриваемых площадок тоже будем обозначать Δ*S´* и Δ*S*. При этом Δ*S´* = *Δu Δv*. Найдем площадь Δ*S*. Обозначим вершины этого криволинейного четырехугольника P_1, P_2, P_3, P_4, где

$P_1(x_1, y_1)$, $x_1 = \varphi(u, v)$, $y_1 = \psi(u, v)$;

$P_2(x_2, y_2)$, $x_2 = \varphi(u+\Delta u, v)$, $y_2 = \psi(u+\Delta u, v)$;

$P_3(x_3, y_3)$, $x_3 = \varphi(u+\Delta u, v+\Delta v)$, $y_3 = \psi(u+\Delta u, v+\Delta v)$;

$P_4(x_4, y_4)$, $x_4 = \varphi(u, v+\Delta v)$, $y_4 = \psi(u, v+\Delta v)$.

Заменим малые приращения Δ*u* и Δ*v* соответствующими дифференциалами. Тогда

$$x_1 = j\,(u,v),\quad y_1 = y\,(u,v),$$
$$x_2 = j\,(u,v) + \frac{\partial j}{\partial u}\Delta u,\quad y_2 = y\,(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u,$$
$$x_3 = j\,(u,v) + \frac{\partial j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v,\quad y_3 = y\,(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v,$$
$$x_4 = j\,(u,v) + \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v,\quad y_4 = y\,(u,v) + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v.$$

При этом четырехугольник $P_1\, P_2\, P_3\, P_4$ можно считать параллелограммом и определить его площадь по формуле из аналитической геометрии:

$$\Delta S \approx \left|(x_3 - x_1)(y_3 - y_2) - (x_3 - x_2)(y_3 - y_1)\right| = \left|\left(\frac{\partial j}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v\right)\frac{\partial y}{\partial v}\Delta v - \frac{\partial j}{\partial v}\Delta v\left(\frac{\partial y}{\partial u}\Delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\right)\right| =$$

$$= \left|\frac{\partial j}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial j}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right|\Delta u\Delta v = \left\|\begin{matrix}\frac{\partial j}{\partial u} & \frac{\partial j}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\|\Delta u\Delta v = |I|\Delta S'. \qquad (9.7)$$

Определение 9.3. Определитель $I = \begin{vmatrix}\frac{\partial j}{\partial u} & \frac{\partial j}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ называется **функциональным определителем** или **якобианом** функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$.

Переходя к пределу при $\max \Delta S' \to 0$ в равенстве (9.7), получим геометрический смысл якобиана:

$$|\,I\,| = \lim_{\Delta S' \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta S'}, \qquad (9.8)$$

то есть модуль якобиана есть предел отношения площадей бесконечно малых площадок Δ*S* и Δ*S´*.

Замечание. Аналогичным образом можно определить понятие якобиана и его геометрический смысл для *n*-мерного пространства: если $x_1 = \varphi_1(u_1, u_2,\ldots,u_n)$, $x_2 = \varphi_2(u_1, u_2,\ldots,u_n)$,…, $x_n = \varphi(u_1, u_2,\ldots, u_n)$, то

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_n}\\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n}\end{vmatrix} \qquad (9.8)$$

При этом модуль якобиана дает предел отношения «объемов» малых областей пространств $x_1, x_2,\dots, x_n$ и $u_1, u_2,\dots, u_n$.

Замена переменных в кратных интегралах.

Исследуем общий случай замены переменных на примере двойного интеграла. Пусть в области D задана непрерывная функция $z = f(x,y)$, каждому значению которой соответствует то же самое значение функции $z = F(u, v)$ в области D', где

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)). \qquad (9.9)$$

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sum f(x, y)\Delta S \;=\; \sum F(u,v)\Delta S \;\approx\; \sum F(u,v)\;|\;I\;|\;\Delta S',$$

где интегральная сумма справа берется по области D'. Переходя к пределу при $\max\Delta S'\to 0$, получим **формулу преобразования координат в двойном интеграле**:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D'}F(u,v)\,|\,I\,|\,dudv. \qquad (9.10)$$

Аналогичным образом можно вывести подобную формулу для тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'}f(\varphi(u,v,w),\psi(u,v,w),\chi(u,v,w))\,|\,I\,|\,dudvdw, \qquad (9.11)$$

где $x = \varphi(u, v, w), y = \psi(u, v, w), z = \chi(u, v, w)$,

$$I=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\varphi}{\partial w}\\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial w}\\ \frac{\partial\chi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial w}\end{vmatrix}, \qquad (9.12)$$

а область V пространства $Oxyz$ отображается в область V' пространства $Ouvw$.

Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле.

Найдем, используя формулы (9.4), (9.5) и (9.12), якобианы перехода от декартовых координат к цилиндрическим и сферическим:

1) для цилиндрических координат

$$I=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r, \qquad (9.13)$$

2) для сферических координат

$$I=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi\\ \cos\theta & 0 & -r\sin\theta\end{vmatrix}=r^2\sin\theta. \qquad (9.14)$$

Тогда формулы перехода к цилиндрическим или сферическим координатам в тройном интеграле будут выглядеть так: (9.15)

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_{j_1}^{j_2} dj \int\limits_{r_1(j)}^{r_2(j)} r\,dr \int\limits_{z_1(r,j)}^{z_2(r,j)} F_1(r,j,z)dz = \int\limits_{q_1}^{q_2} \sin q\,dq \int\limits_{j_1(q)}^{j_2(q)} dj \int\limits_{r_1(j,q)}^{r_2(j,q)} F_2(r,j,q)\,r^2 dr\ ,$$

где смысл обозначений понятен из предыдущего текста.

Примеры.

1. Вычислим интеграл от функции $u = z\sqrt{x^2+y^2}$ по области, ограниченной поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$, $z = 1$.

$$\iiint\limits_V z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int\limits_0^{\frac{p}{4}} dj \int\limits_0^1 r\cdot r\,dr \int\limits_0^1 zdz = \left(j\Big|_0^{\frac{p}{4}} \right)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^1 \right)\left(\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 \right) = \frac{p}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{p}{24}.$$

2. Пусть подынтегральная функция $u = 1$, а область интегрирования – шар радиуса R с центром в начале координат. Тогда

$$\iiint\limits_V dxdydz = \int\limits_0^{p} \sin q\,dq \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^{R} r^2 dr = \left(-\cos q\Big|_0^{p} \right)\left(j\Big|_0^{2p} \right)\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^{R} \right) = 2\cdot 2p\cdot\frac{R^3}{3} = \frac{4}{3}pR^3\ .$$

Лекция 10.
Криволинейные интегралы первого и второго рода, их свойства и вычисление.

Рассмотрим на плоскости или в пространстве кривую L и функцию f, определенную в каждой точке этой кривой. Разобьем кривую на части Δs_i длиной Δs_i и выберем на каждой из частей точку M_i. Составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$. Назовем λ длину наибольшего отрезка кривой.

Определение 10.1. Если существует конечный предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i$, не зависящий ни от способа разбиения кривой на отрезки, ни от выбора точек M_i, то он называется **криволинейным интегралом первого рода** от функции f по кривой L и обозначается

$$\int_L f(M)ds = \int_L f(x,y,z)ds = \lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i \ . \qquad (10.1)$$

Например, если функция $f(M)$ задает плотность в точке M, то интеграл (10.1) равен массе рассматриваемой кривой.

Свойства криволинейного интеграла 1-го рода.

1. Если функция f непрерывна на кривой L, то интеграл $\int_L f(M)ds$ существует.
2. Криволинейный интеграл 1-го рода не зависит от направления движения по кривой, то есть от того, какую из точек, ограничивающих кривую, считать начальной, а какую – конечной. Если назвать эти точки A и B, то

$$\int_{(AB)} f(M)ds = \int_{(BA)} f(M)ds. \qquad (10.2)$$

Справедливость этих свойств следует из определения криволинейного интеграла 1-го рода.

Способ вычисления криволинейного интеграла 1-го рода.

Выберем на кривой L направление от начальной точки A и отметим, что положение точки M на кривой определяется длиной дуги $AM = s$. Тогда кривую L можно задать параметрически: $x = x(s), y = y(s), z = z(s)$, где $0 \le s \le S$. Функция $f(x,y,z)$ становится при этом сложной функцией одной переменной s: $f(x(s), y(s), z(s))$. Тогда интегральная сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\bar{s}_i), y(\bar{s}_i), z(\bar{s}_i))\Delta s_i \ ,$$

где $\bar{s}_i$ - координата точки M_i, является обычной интегральной суммой для определенного интеграла $\int_0^S f(x(s), y(s), z(s))ds.$ Следовательно,

$$\int_L f(M)ds = \int_0^S f(x(s), y(s), z(s))ds. \qquad (10.3)$$

Если же кривая L задана в параметрической форме:

$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \qquad t_0 \le t \le T,$

то, применяя в интеграле (10.3) формулу замены переменной и учитывая, что дифференциал дуги

$$ds = \sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2 + (c'(t))^2}\,dt,$$

получим:

$$\int_L f(M)ds = \int_{t_0}^{T} f(j(t), y(t), c(t))\sqrt{(j'(t))^2 + (y'(t))^2 + (c'(t))^2}\,dt. \qquad (10.4)$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла 1-го рода сводится к вычислению обычного определенного интеграла от функции переменной t в пределах, соответствующих изменению значения этой переменной на рассматриваемой кривой.

Пример.

Вычислить $\int_L xyzds$, где L: $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \quad 0 \le t \le 2p \\ z = t, \end{cases}$. Применяя формулу (10.4), получим:

$$\int_L xyzds = \int_0^{2p} 2\cos t \cdot 2\sin t \cdot t \cdot \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1}dt = -\sqrt{5}\int_0^{2p} td(\cos 2t) = -\sqrt{5}\left(t\cos 2t\Big|_0^{2p} - \right.$$

$$\left. - \int_0^{2p} \cos 2tdt\right) = -\sqrt{5}\cdot 2p + \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2p} = -2\sqrt{5}p.$$

Криволинейный интеграл второго рода.

Вновь рассмотрим кривую L, в каждой точке которой задана функция ***f(M)***, и зададим разбиение кривой на отрезки. Выберем на каждом отрезке точку M_i и умножим значение функции в этой точке не на длину ***i***-го отрезка, как в случае криволинейного интеграла 1-го рода, а на проекцию этого отрезка, скажем, на ось Оx, то есть на разность $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$. Составим из полученных произведений интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \,.$$

Определение 10.2. Если существует конечный предел при $l \to 0$ интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i$, не зависящий от способа разбиения кривой на отрезки и выбора точек M_i, то от называется **криволинейным интегралом второго рода** от функции ***f(M)*** по кривой L и обозначается

$$\int_L f(M)dx = \int_{(AB)} f(x,y,z)dx = \lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x_i \,. \qquad (10.5)$$

Подобным образом можно определить и криволинейные интегралы 2-го рода вида

$$\int_{(AB)} f(x,y,z)dy, \qquad \int_{(AB)} f(x,y,z)dz.$$

Определение 10.3. Если вдоль кривой L определены функции $P(M) = P(x, y, z)$, $Q(M) = Q(x, y, z)$, $R(M) = R(x, y, z)$ и существуют интегралы

$$\int_{(AB)} P(x,y,z)dx, \qquad \int_{(AB)} Q(x,y,z)dy, \qquad \int_{(AB)} R(x,y,z)dz\,,$$

то и их сумму называют **криволинейным интегралом второго рода (общего вида)** и полагают

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + \int\limits_{(AB)} Q(x,y,z)dy + \int\limits_{(AB)} R(x,y,z)dz\,. \qquad (10.6)$$

Замечание. Если считать, что сила $\vec{F} = \{P, Q, R\}$ действует на точку, движущуюся по кривой (AB), то работа этой силы может быть представлена как

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,,$$

то есть криволинейным интегралом 2-го рода.

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода.

1. Если функции $P(M), Q(M), R(M)$ непрерывны на кривой (AB), то интеграл (10.6) существует (справедливость этого утверждения следует из определения 10.2).

2. При изменении направления кривой (то есть перемены местами начальной и конечной ее точек) криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dx = -\int\limits_{(BA)} f(M)dx. \qquad (10.7)$$

Действительно, при этом изменяется знак Δx_i в интегральной сумме.

Способ вычисления криволинейного интеграла 2-го рода.

Теорема 10.1. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t),\ z = \chi(t), \qquad \alpha \le t \le \beta\,,$$

где φ, ψ, χ – непрерывно дифференцируемые функции, и на ней задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Тогда интеграл (10.5) существует и имеет место равенство

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)dt\,. \qquad (10.8)$$

Доказательство.

Запишем $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})$ и преобразуем последнюю разность по формуле Лагранжа: $\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\tau_i)\Delta t_i$, где τ_i – некоторое значение t, заключенное между t_{i-1} и t_i. Выберем точку M_i так, чтобы ее координаты соответствовали значению параметра, равному τ_i : $M_i(\varphi(\tau_i), \psi(\tau_i), \chi(\tau_i))$. Подставив эти значения в формулу (10.5), получим:

$$\int\limits_{(AB)} f(M)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi(\tau_i),\psi(\tau_i),\chi(\tau_i))\varphi'(\tau_i)\Delta t_i\,.$$

Справа получен предел интегральной суммы для функции $f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, равный определенному интегралу от этой функции:

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t)dt\,,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. Аналогичные соотношения можно получить для криволинейных интегралов вида $\int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dy,\quad \int\limits_{(AB)} f(x,y,z)dz$, откуда следует, что

$$\int\limits_{(AB)} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(P(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\varphi'(t) +$$
$$+Q(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\psi'(t) + R(\varphi(t),\psi(t),\chi(t))\chi'(t))dt. \qquad (10.9)$$

Пример.

Вычислим интеграл $\int\limits_L x^3dx + 2xy^2dy - 3x^2zdz$, где L – отрезок прямой от точки $A(1,2,-2)$ до точки $B(0, -1, 0)$. Запишем уравнение этой прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - 3t, \quad\quad 0 \le t \le 1. \\ z = -2 + 2t, \end{cases}$$

Следовательно, $\varphi'(t) = -1$, $\psi'(t) = -3$, $\chi'(t) = 2$. Тогда

$$\int\limits_L x^3dx + 2xy^2dy - 3x^2zdz = \int\limits_0^1 \left((1-t)^3 \cdot (-1) + 2(1-t)(2-3t)^2(-2) + -3(1-t)^2(2t-2)\cdot 2\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^1 (25t^3 - 51t^2 + 31t - 5)dt = \left(\frac{25}{4}t^4 - 17t^3 + \frac{31}{2}t^2 - 5t\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{4}.$$

Лекция 11.
Скалярное и векторное поле. Циркуляция векторного поля вдоль кривой. Формула Грина.

Если в каждой точке M определенной пространственной области задано значение некоторой скалярной или векторной величины, то говорят, что задано **поле** этой величины (соответственно **скалярное** или **векторное**).
Примерами скалярных полей являются поле температур или поле электрического потенциала, примерами векторных полей – поле сил или поле скоростей.
Рассмотрим некоторые характеристики скалярных и векторных полей.

Определение 11.1. Если в некоторой области задано скалярное поле $U(x,y,z)$, то поверхность, определяемая уравнением

$$U(x, y, z) = C, \qquad (11.1)$$

называется **поверхностью уровня**. В двумерном случае **линия уровня** задается уравнением $U(x, y) = C.$ (11.1`)

Определение 11.2. Если в некоторой области задано векторное поле $\vec{A} = \{A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)\}$, то кривая, направление которой в каждой ее точке M совпадает с направлением вектора $\vec{A}$ в этой точке, называется **векторной линией**. Она задается уравнениями

$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}. \qquad (11.2)$$

Поверхность, составленная из векторных линий, называется **векторной поверхностью**. Если векторная поверхность образована векторными линиями, проходящими через каждую точку некоторой замкнутой кривой, то она называется **векторной трубкой**.

Определение 11.3. Пусть задано скалярное поле $U(x, y, z)$. Вектор

$$\vec{g} = gradU = \left\{\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right\} \qquad (11.3)$$

называется **градиентом** величины U в соответствующей точке (см. лекцию 4 за 2-й семестр).
Замечание. Таким образом, скалярное поле $U(x, y, z)$ порождает векторное поле градиента grad$U$.

Определение 11.4. Пусть дано векторное поле $\vec{A} = \{A_x(x,y,z), A_y(x,y,z), A_z(x,y,z)\}$.
Интеграл

$$\int_L A_x dx + A_y dy + A_z dz = \int_L \vec{A} \cdot d\vec{r} \qquad (11.4)$$

называется **линейным интегралом от вектора** $\vec{A}$ **вдоль кривой** L. Если кривая L замкнута, то этот интеграл называют **циркуляцией вектора** $\vec{A}$ **вдоль кривой** L.
Здесь $\vec{A} \cdot d\vec{r}$ - скалярное произведение векторов $\vec{A}$ и $d\vec{r} = \{dx, dy, dz\}$.

Замечание. Иногда криволинейный интеграл 2-го рода по *замкнутому* контуру обозначают $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$.

Пример. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{A}$={x, xy, xyz} вдоль контура L: $x^2 + y^2 = 9$, $z = 2$ (направление обхода контура – от точки (3,0,2) к точке (0,3,2)).

Зададим контур L параметрически: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $z = 2$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Тогда

$$\oint_L xdx + xydy + xyzdz = \int_0^{2p} (3\cos t(-3\sin t) + 3\cos t \cdot 3\sin t \cdot 3\cos t + 3\cos t \cdot 3\sin t \cdot 2 \cdot 0)dt =$$

$$= \int_0^{2p} (-\frac{9}{2}\sin 2t)dt - 27\int_0^{2p} \cos^2 td\cos t = 0.$$

Формула Грина.

Установим связь между двойным интегралом по некоторой плоской области D и криволинейным интегралом по границе L этой области.

Пусть в плоскости Oxy дана ограниченная замкнутым контуром L правильная область D. Кривые, ограничивающие эту область снизу и сверху, заданы уравнениями $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $y_1(x) \le y_2(x)$, $a \le x \le b$ (рис.1).

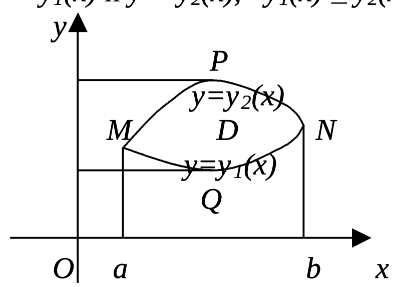


Рис. 1.

Зададим в области D непрерывные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, имеющие непрерывные частные производные, и рассмотрим интеграл

$$\iint_D \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} dxdy \ .$$

Переходя к двукратному интегралу, получим:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial x} dxdy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) dx = \int_a^b P(x,y) \Big|_{y_1(x)}^{y_2(x)} dx = \int_a^b \big(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))\big) dx. \quad (11.5)$$

Так как $y = y_2(x)$ – параметрическое выражение кривой MPN, то

$$\int_a^b P(x, y_2(x))dx = \int_{MPN} P(x,y)dx,$$

где справа стоит криволинейный интеграл по кривой MPN. Аналогично получаем, что

$$\int_a^b P(x, y_1(x))dx = \int_{MQN} P(x,y)dx = -\int_{NQM} P(x,y)dx\,.$$

Подставим полученные результаты в формулу (11.5):

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{MPN} P(x,y)dx + \int_{NQM} P(x,y)dx = \oint_L P(x,y)dx, \qquad (11.6)$$

так как контур L представляет собой объединение кривых MPN и NQM.

Так же можно получить, что $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = -\oint_L Q(x,y)dy.$ (11.7)

Вычтем из равенства (11.6) равенство (11.7):

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dxdy = \oint_L Pdx + Qdy.$$

При этом обход контура L происходит по часовой стрелке. Изменим направление обхода. Тогда предыдущее равенство примет вид:

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L Pdx + Qdy. \qquad (11.8)$$

Эта формула, задающая связь между двойным интегралом и криволинейным интегралом 2-го рода, называется **формулой Грина**.

Замечание 1. Если в криволинейном интеграле по замкнутому контуру не указано направление обхода, то предполагается, что он производится *против часовой стрелки*.

Замечание 2. Если рассматривать в плоскости Оxy векторное поле $\{P(x,y), Q(x,y)\}$, то в правой части формулы (11.8) стоит его циркуляция по контуру L.

Пример. Вычислим циркуляцию векторного поля $\{x + \sin x, x - e^y\}$ по контуру $x^2 + y^2 = 1$. Применим формулу Грина, учитывая, что $\frac{\partial P}{\partial y} = 0,\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$:

$\oint\limits_L (x + \sin x)dx + (x - e^y)dy = \iint\limits_D dxdy.$ Область D при этом – круг единичного радиуса с центром в начале координат. Перейдем к полярным координатам:

$$\iint\limits_D dxdy = \int\limits_0^{2p} dj \int\limits_0^1 r dr = 2p \cdot \frac{1}{2} = p.$$

Лекция 12.
Площадь поверхности. Поверхностный интеграл первого рода, его свойства, геометрический и физический смысл. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

Если при определении длины кривой она задавалась как предел вписанной в данную кривую ломаной при стремлении к нулю длины наибольшего ее отрезка, то попытка распространить это определение на площадь криволинейной поверхности может привести к противоречию (пример Шварца: можно рассмотреть последовательность вписанных в цилиндр многогранников, у которых наибольшее расстояние между точками какой-либо грани стремится к нулю, а площадь стремится к бесконечности). Поэтому определим площадь поверхности иным способом. Рассмотрим незамкнутую поверхность S, ограниченную контуром L, и разобьем ее какими-либо кривыми на части $S_1, S_2,\dots, S_n$. Выберем в каждой части точку M_i и спроектируем эту часть на касательную плоскость к поверхности, проходящую через эту точку. Получим в проекции плоскую фигуру с площадью T_i. Назовем ρ наибольшее расстояние между двумя точками любой части поверхности S.

Определение 12.1. Назовем **площадью S поверхности** предел суммы площадей T_i при $r \to 0$:

$$S = \lim_{r\to 0}\sum_i T_i \ . \qquad (12.1)$$

Поверхностный интеграл первого рода.

Рассмотрим некоторую поверхность S, ограниченную контуром L, и разобьем ее на части $S_1, S_2,\dots, S_n$ (при этом площадь каждой части тоже обозначим S_n). Пусть в каждой точке этой поверхности задано значение функции $f(x, y, z)$. Выберем в каждой части S_i точку M_i (x_i, y_i, z_i) и составим интегральную сумму

$$s = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i \ . \qquad (12.2)$$

Определение 12.2. Если существует конечный предел при $r \to 0$ интегральной суммы (12.2), не зависящий от способа разбиения поверхности на части и выбора точек M_i, то он называется **поверхностным интегралом первого рода от функции $f(M) = f(x, y, z)$ по поверхности S** и обозначается

$$\iint_S f(M)dS = \iint_S f(x,y,z)dS = \lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_i)S_i \ . \qquad (12.3)$$

Замечание. Поверхностный интеграл 1-го рода обладает обычными свойствами интегралов (линейность, суммирование интегралов от данной функции по отдельным частям рассматриваемой поверхности и т.д.).

Геометрический и физический смысл поверхностного интеграла 1-го рода.

Если подынтегральная функция $f(M) \equiv 1$, то из определения 12.2 следует, что $\iint_S dS$ равен площади рассматриваемой поверхности S.
Если же считать, что $f(M)$ задает плотность в точке M поверхности S, то масса этой поверхности равна

$$M = \iint_S f(M)dS \ . \qquad (12.4)$$

Вычисление поверхностного интеграла 1-го рода.

Ограничимся случаем, когда поверхность S задается явным образом, то есть уравнением вида $z = \varphi(x, y)$. При этом из определения площади поверхности следует, что $S_i = \dfrac{\Delta\sigma_i}{\cos\gamma_i}$, где $\Delta\sigma_i$ – площадь проекции S_i на плоскость Oxy, а γ_i – угол между осью Oz и нормалью к поверхности S в точке M_i. Известно, что

$$\cos\gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i, y_i)+\varphi_y'^2(x_i, y_i)}},$$

где (x_i, y_i, z_i) – координаты точки M_i. Следовательно,

$$S_i = \sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i, y_i)+\varphi_y'^2(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i.$$

Подставляя это выражение в формулу (12.2), получим, что

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, \varphi(x_i, y_i))\sqrt{1+\varphi_x'^2(x_i, y_i)+\varphi_y'^2(x_i, y_i)}\Delta\sigma_i,$$

где суммирование справа проводится по области Ω плоскости Oxy, являющейся проекцией на эту плоскость поверхности S (рис.1).

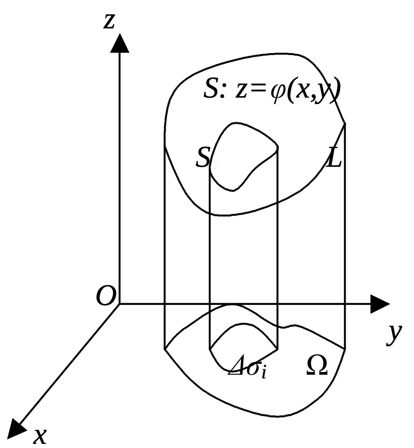


Рис. 1.

При этом в правой части получена интегральная сумма для функции двух переменных по плоской области, которая в пределе при $\rho \to 0$ дает двойной интеграл $\iint\limits_{\Omega} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1+(\varphi_x'(x, y))^2+(\varphi_y'(x, y))^2}\,dxdy$. Таким образом, получена формула, позволяющая свести вычисление поверхностного интеграла 1-го рода к вычислению двойного интеграла:

$$\iint\limits_{S} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{\Omega} f(x, y, \varphi(x, y))\sqrt{1+(\varphi_x'(x, y))^2+(\varphi_y'(x, y))^2}\,dxdy. \qquad (12.5)$$

Замечание. Уточним еще раз, что в левой части формулы (12.5) стоит *поверхностный* интеграл, а в правой – *двойной*.

Пример.

Вычислим $\iint\limits_{S} xydS$, где S – часть плоскости $3x + 4y – 5z = 36$, расположенная в первом октанте. Преобразуем это уравнение к виду $z = \dfrac{3x+4y-36}{5}$, откуда $\varphi_x' = \dfrac{3}{5}$,

$j'_y = \frac{4}{5}$, $\sqrt{1 + j'^2_x + j'^2_y} = \sqrt{2}$. Проекцией плоскости S на плоскость Оxy является треугольник с вершинами в точках (0, 0), (12, 0) и (0, 9). Тогда из формулы (12.5) получим:

$$\iint\limits_S xydS = \sqrt{2}\iint\limits_\Omega xydxdy = \sqrt{2}\int_0^{12} xdx \int_0^{3-\frac{3}{4}x} ydy = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{12} x\left(3 - \frac{3}{4}x\right)^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{12}\left(9x - \frac{9}{2}x^2 + \frac{9}{16}x^3\right)dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{9}{64}x^4\right)\Bigg|_0^{12} = 486\sqrt{2}.$$

Лекция 13.
Ориентация поверхности. Поток векторного поля. Поверхностный интеграл второго рода, его свойства, физический смысл и вычисление. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.

Определим понятие **стороны поверхности**. Выберем на гладкой поверхности (замкнутой или ограниченной гладким контуром) точку M_0 и проведем в ней нормаль к поверхности, выбрав для нее определенное направление (одно из двух возможных). Проведем по поверхности замкнутый контур, начинающийся и заканчивающийся в точке M_0. Рассмотрим точку M, обходящую этот контур, и в каждом из ее положений проведем нормаль того направления, в которое непрерывно переходит нормаль из предыдущей точки. Если после обхода контура нормаль вернется в точке M_0 в первоначальное положение при любом выборе точки M_0 на поверхности, поверхность называется **двусторонней**. Если же направление нормали после обхода хотя бы одной точки изменится на противоположное, поверхность называется **односторонней** (примером односторонней поверхности служит лист Мебиуса).

Из вышесказанного следует, что выбор направления нормали в одной точке однозначно определяет направление нормали во всех точках поверхности.

Определение 13.1. Совокупность всех точек поверхности с одинаковым направлением нормали называется **стороной поверхности**.

Ориентация поверхности.

Рассмотрим незамкнутую гладкую двустороннюю поверхность S, ограниченную контуром L, и выберем одну сторону этой поверхности.

Определение 13.2. Назовем **положительным** направление обхода контура L, при котором движение по контуру происходит против часовой стрелки относительно наблюдателя, находящегося в конечной точке нормали к какой-либо точке поверхности S, соответствующей выбранной стороне поверхности. Обратное направление обхода контура назовем **отрицательным**.

Поток векторного поля.

Рассмотрим векторное поле ***A(M)***, определенное в пространственной области ***G***, ориентированную гладкую поверхность $S \subset G$ и поле единичных нормалей ***n****(M)* на выбранной стороне поверхности S.

Определение 13.3. Поверхностный интеграл 1-го рода

$$\iint_S \vec{A}\vec{n}\,dS = \iint_S A_n\,dS\,, \tag{13.1}$$

где ***An*** – скалярное произведение соответствующих векторов, а A_n – проекция вектора ***A*** на направление нормали, называется **потоком векторного поля *A(M)* через выбранную сторону поверхности *S***.

Замечание 1. Если выбрать другую сторону поверхности, то нормаль, а, следовательно, и поток изменят знак.

Замечание 2. Если вектор ***A*** задает скорость течения жидкости в данной точке, то интеграл (13.1) определяет количество жидкости, протекающей в единицу времени через поверхность S в положительном направлении (отсюда общий термин «поток»).

Поверхностный интеграл второго рода.

Введем определение поверхностного интеграла 2-го рода по аналогии с соответствующим криволинейным интегралом. Рассмотрим гладкую двустороннюю поверхность S, заданную уравнением $z = z(x, y)$, в каждой точке которой определена функция $f(M) = f(x, y, z)$, и выберем какую-либо из ее сторон (или, что то же самое, определенную ориентацию). Разобьем поверхность S на части $S_1, S_2,\dots, S_n$, выберем в каждой части S_i точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, и умножим $f(M_i)$ на площадь D_i проекции части S_i на плоскость Oxy. При этом будем считать, проекция части *верхней* по отношению к плоскости Oxy стороны рассматриваемой поверхности имеет знак «+», а *нижней* – знак «-». Составим сумму

$$s = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)D_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)D_i\ . \qquad (13.2)$$

Определение 13.4. Если существует конечный предел суммы (13.2) при $\rho\to 0$, не зависящий от способа разбиения поверхности и выбора точек на ней, то он называется **поверхностным интегралом второго рода от функции $f(M)$ по выбранной стороне поверхности S** и обозначается

$$\iint_S f(M)dxdy = \iint_S f(x, y, z)dxdy. \qquad (13.3)$$

Замечание. В этой символической записи не содержится указания на то, какая сторона поверхности выбрана, поэтому это требуется оговаривать отдельно.

Подобным образом можно проектировать части поверхности на координатные плоскости Oxz и Oyz (при условии, что уравнение поверхности можно представить в виде $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$). Получим два других поверхностных интеграла 2-го рода:

$$\iint_S f(x, y, z)dxdz \quad \text{и} \quad \iint_S f(x, y, z)dydz\,. \qquad (13.4)$$

Рассмотрев сумму интегралов вида (13.3) и (13.4) по одной и той же поверхности соответственно от функций $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$, получим **поверхностный интеграл второго рода общего вида**:

$$\iint_S P(x, y, z)dxdy + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dydz. \qquad (13.5)$$

Отметим **основное свойство поверхностного интеграла 2-го рода:**

При замене рассматриваемой стороны поверхности на противоположную поверхностный интеграл 2-го рода меняет знак:

$$\iint_{S^+} P(x, y, z)dxdy + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dydz =$$

$$= -\iint_{S^-} P(x, y, z)dxdy + Q(x, y, z)dxdz + R(x, y, z)dydz. \qquad (13.6)$$

Справедливость этого утверждения следует из определения 13.4.

Вычисление поверхностного интеграла 2-го рода.

Если задать единичный вектор выбранной нормали к поверхности S в виде $\boldsymbol{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, где α, β, γ – углы, образованные нормалью с осями координат, то $D_i = S_i \cos g = \dfrac{S_i}{\pm\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}$ (выбор знака зависит от направления нормали). Тогда из (13.2), (13.3) следует, что

$$\iint_S f(M)dxdy = \iint_S f(x,y,z(x,y))\cos\gamma dS = \iint_D f(x,y,z(x,y))\frac{dS}{\pm\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}} =$$

$$= \pm\iint_D f(x,y,z(x,y))\frac{1}{\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}dxdy = \pm\iint_D f(x,y,z(x,y))dxdy. \qquad (13.7)$$

Здесь D – проекция поверхности S на плоскость Оxy, а выражение для dS взято из формулы (12.5). Таким образом, вычисление поверхностного интеграла 2-го рода сводится к вычислению обычного двойного интеграла по области D от функции f, в которую вместо координаты z подставлено ее выражение из уравнения поверхности S. Обобщая эти рассуждения, получим, что

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz = \pm\iint_D P(x,y,z(x,y)dxdy \pm$$

$$\pm\iint_{D'} Q(x,y(x,z),z)dxdz \pm \iint_{D''} R(x(y,z),y,z)dydz, \qquad (13.8)$$

где D' и D'' - проекции поверхности S на соответствующие координатные плоскости.

Пример. Вычислить поверхностный интеграл 2-го рода $\iint_S dxdy$, где S – нижняя сторона части конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ при $0\le z\le 1$.

Применим формулу (13.7), учитывая, что выбрана нижняя сторона поверхности и что проекцией части конуса на плоскость Оxy является круг $x^2+y^2\le 1$:

$$\iint_S dxdy = -\iint_D dxdy = -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\,dr = -\pi.$$

Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.

Учитывая, что проекции элемента поверхности S_i на координатные плоскости имеют вид $S_i\cos\gamma$, $S_i\cos\beta$, $S_i\cos\alpha$, из (13.5) получим:

$$\iint_S P(x,y,z)dxdy + Q(x,y,z)dxdz + R(x,y,z)dydz =$$

$$= \iint_S (R\cos\alpha + Q\cos\beta + P\cos\gamma)dS = \iint_S \vec{A}\vec{n}dS, \qquad (13.9)$$

где векторное поле $\vec{A}=\{R,Q,P\}$, а $\vec{n}$ - векторное поле единичных нормалей заданного направления в каждой точке поверхности. Следовательно, поверхностный интеграл 2-го рода (13.5) равен поверхностному интегралу 1-го рода (13.9). Эта формула предоставляет еще одну возможность вычисления поверхностного интеграла 2-го рода. Заметим, что при смене стороны поверхности меняют знак направляющие косинусы нормали, и, соответственно, интеграл в правой части равенства (13.9), который сам по себе, как поверхностный интеграл 1-го рода, от выбора стороны поверхности не зависит.

Пример. Рассмотрим интеграл $\iint_S xydxdy + xzdxdz + yzdydz$, где S – внешняя сторона верхней половины сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$. Так как радиус сферы, проведенный в любую ее точку, можно считать нормалью к сфере в этой точке, единичный вектор нормали можно задать в виде $\boldsymbol{n} = \{\frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R}\}$. Тогда, используя формулу (13.9), получаем, что требуется вычислить поверхностный интеграл 1-го рода

$$\frac{3}{R}\iint_S xyzdS = \frac{3}{R}\iint_D xy\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}}dxdy = 3\iint_D xydxdy =$$

$$= 3\int_0^{2p} \sin j \ \cos j\, dj \int_0^R r^3 dr = 0.$$ (Область D – круг с центром в начале координат радиуса R).

Физический смысл поверхностного интеграла 2-го рода.

Сравнив формулы (13.9) и (13.1), увидим, что поверхностный интеграл 2-го рода представляет собой поток векторного поля $\vec{A} = \{P, Q, R\}$ через выбранную сторону поверхности S. При этом из формулы (13.9) следует, что поток можно задать и в виде поверхностного интеграла 1-го рода вида (13.5).

Лекция 14.

Геометрические и механические приложения кратных, криволинейных и поверхностных интегралов.

Двойной интеграл.

1. Площадь плоской области.

Из формулы 7.1 следует, что при $f(x,y) \equiv 0$ предел интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$ при $r \to 0$ равен площади области интегрирования S, то есть

$$\iint_S dxdy = S. \qquad (14.1)$$

2. Объем цилиндроида.

Рассмотрим тело, ограниченное частью поверхности S ($z = f(x,y)$), ограниченной контуром L, проекцией этой поверхности на плоскость Оxy и отрезками, параллельными оси Оz и соединяющими каждую точку контура L с соответствующей точкой плоскости Оxy. Такое тело будем называть **цилиндроидом**. Тогда из формул (7.1) и (7.2) получим, что объем этого тела равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$ по области S:

$$V_{цил} = \iint_S f(x,y)dxdy. \qquad (14.2)$$

3. Площадь криволинейной поверхности.

Вычислим площадь части криволинейной поверхности S, заданной уравнением $z = f(x,y)$, ограниченной контуром L. Вспомним еще раз (см. лекцию 12), что площадь элемента поверхности ΔS_i равна

$$\Delta S_i = \frac{\Delta D_i}{\cos g} = \sqrt{1 + f_x'^2(x_i, h_i) + f_y'^2(x_i, h_i)}\Delta D_i,$$

где ΔD_i – проекция ΔS_i на плоскость Оxy, γ – угол между осью Оz и нормалью к ΔS_i в некоторой ее точке $M_i(x_i, h_i)$. Составив интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f_x'^2(x_i, h_i) + f_y'^2(x_i, h_i)}\Delta D_i$$

и устремив ее к пределу при $r \to 0$, получим формулу для площади поверхности:

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\, dxdy. \qquad (14.3)$$

4. Момент инерции плоской фигуры.

Вспомним определение момента инерции

а) материальной точки M с массой m относительно точки O: $I = mr^2$ (r – расстояние от M до O);

б) системы материальных точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ относительно точки O:

$$I = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2 .$$

Определим теперь момент инерции относительно точки O материальной плоской фигуры D.

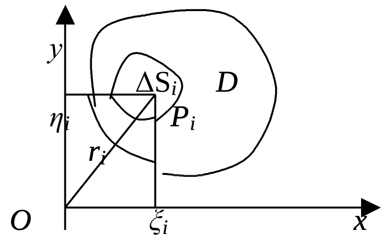


Рис. 1.

Найдем момент инерции фигуры D (рис.1) относительно начала координат, считая, что плотность в каждой точке равна 1. Разобьем область D на части ΔS_i (i = 1, 2,… n) и выберем в каждой части точку P_i (ξ_i, η_i). Назовем элементарным моментом инерции площадки ΔS_i выражение вида $\Delta I_i = (\xi_i^2 + \eta_i^2)\Delta S_i$ и составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + h_i^2)\Delta S_i \qquad (14.4)$$

для функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ по области D.

Определение 14.1. Предел интегральной суммы (14.4) при $r \to 0$ называется **моментом инерции фигуры D относительно начала координат**:

$$I_0 = \lim_{r\to 0}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 + h_i^2)\Delta S_i = \iint_D (x^2 + y^2)dxdy. \qquad (14.5)$$

Определение 14.2. Интегралы

$$I_{xx} = \iint_D y^2 dxdy, \quad I_{yy} = \iint_D x^2 dxdy \qquad (14.6)$$

называются **моментами инерции фигуры D относительно осей Оx и Оy**.

Замечание. Если поверхностная плотность не равна 1, а является некоторой функцией $\gamma = \gamma(x, y)$, то момент инерции фигуры относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = \iint_D g(x, y)(x^2 + y^2)dxdy. \qquad (14.7)$$

5. Координаты центра масс плоской фигуры.

Как известно, координаты центра масс системы материальных точек $P_1, P_2,\ldots, P_n$ с массами $m_1, m_2,\ldots, m_n$ определяются по формулам

$$x_c = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}, \quad y_c = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}.$$

Если разбить плоскую фигуру D с поверхностной плотностью, равной 1, на части, то масса каждой части будет равна ее площади. Будем считать теперь, что вся масса элементарной площадки ΔS_i сосредоточена в какой-либо ее точке P_i (ξ_i, η_i). Тогда фигуру D можно рассматривать как систему материальных точек, центр масс которой определяется равенствами

$$x_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i}, \quad y_c \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i \Delta S_i}{\sum_{i=1}^{n}\Delta S_i}.$$

Переходя к пределу при $r \to 0$, получим точные формулы для координат центра масс плоской фигуры:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D x dx dy}{\iint\limits_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D y dx dy}{\iint\limits_D dx dy}. \qquad (14.8)$$

В случае переменной поверхностной плотности $\gamma = \gamma\ (x, y)$ эти формулы примут вид

$$x_c = \frac{\iint\limits_D g\,(x, y) x dx dy}{\iint\limits_D g\,(x, y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint\limits_D g\,(x, y) y dx dy}{\iint\limits_D g\,(x, y) dx dy}. \qquad (14.9)$$

Тройной интеграл.

1. Объем тела.

Из определения 7.3 следует, что при $f(x, y, z) \equiv 1$ тройной интеграл по некоторой замкнутой области V равен объему тела V:

$$V = \iiint\limits_V dx dy dz. \qquad (14.10)$$

2. Масса тела.

Если $\gamma = \gamma\ (x, y, z)$ – функция, задающая плотность вещества, из которого состоит тело V, то масса тела выражается формулой

$$M = \iiint\limits_V g\,(x, y, z) dx dy dz. \qquad (14.11)$$

3. Момент инерции тела.

Используя формулы для моментов инерции точки $M\ (x, y, z)$ массы m относительно координатных осей:

$$I_{xx} = (y^2 + z^2)m, \quad I_{yy} = (x^2 + z^2)m, \quad I_{zz} = (x^2 + y^2)m$$

и проводя те же рассуждения, что и при определении моментов плоской фигуры, можно задать моменты инерции тела относительно координатных осей в виде:

$$I_{xx} = \iiint\limits_V (y^2 + z^2) g\,(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_{yy} = \iiint\limits_V (x^2 + z^2) g\,(x, y, z) dx dy dz, \qquad (14.12)$$

$$I_{zz} = \iiint\limits_V (x^2 + y^2) g\,(x, y, z) dx dy dz,$$

где $\gamma\ (x, y, z)$ – плотность вещества.

4. Координаты центра масс тела.

Формулы для координат центра масс тела тоже задаются аналогично случаю плоской фигуры:

$$x_c = \frac{\iiint\limits_V x g\,(x, y, z) dx dy dz}{\iiint\limits_V g\,(x, y, z) dx dy dz},$$

$$y_c = \frac{\iiint\limits_V y g\,(x, y, z) dx dy dz}{\iiint\limits_V g\,(x, y, z) dx dy dz}, \qquad (14.13)$$

$$z_c = \frac{\iiint\limits_V zg(x,y,z)dxdydz}{\iiint\limits_V g(x,y,z)dxdydz}.$$

Криволинейный интеграл 1-го рода.

1. Длина кривой.

Если подынтегральная функция $f(x, y, z) \equiv 1$, то из определения криволинейного интеграла 1-го рода получаем, что в этом случае он равен длине кривой, по которой ведется интегрирование:

$$l = \int\limits_l ds. \qquad (14.14)$$

2. Масса кривой.

Считая, что подынтегральная функция $\gamma(x, y, z)$ определяет плотность каждой точки кривой, найдем массу кривой по формуле

$$M = \int\limits_l g(x,y,z)ds. \qquad (14.15)$$

3. Моменты кривой l найдем, рассуждая так же, как в случае плоской области:

$$M_x = \int\limits_l yg(x,y)ds, M_y = \int\limits_l xg(x,y,z)ds \ - \qquad (14.16)$$

- статические моменты плоской кривой l относительно осей Оx и Оy;

$$I_0 = \int\limits_l (x^2 + y^2 + z^2)ds \ - \qquad (14.17)$$

- момент инерции пространственной кривой относительно начала координат;

$$I_x = \int\limits_l (y^2 + z^2)ds, I_y = \int\limits_l (x^2 + z^2)ds, I_z = \int\limits_l (x^2 + y^2)ds \ - \qquad (14.18)$$

- моменты инерции кривой относительно координатных осей.

4.Координаты центра масс кривой вычисляются по формулам

$$x_c = \frac{\int\limits_l xg(x,y,z)ds}{M}, y_c = \frac{\int\limits_l yg(x,y,z)ds}{M}, z_c = \frac{\int\limits_l zg(x,y,z)ds}{M}. \qquad (14.19)$$

Криволинейный интеграл 2-го рода.

Если считать, что сила $\vec{F} = \{P,Q,R\}$ действует на точку, движущуюся по кривой (AB), то работа этой силы может быть представлена как

$$\int\limits_{(AB)} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{(AB)} \vec{F}\cdot d\vec{r}, \qquad (14.20)$$

то есть криволинейным интегралом 2-го рода (см. лекцию 10).

Поверхностный интеграл 1-го рода.

1. Площадь криволинейной поверхности, уравнение которой $z = f(x, y)$, можно найти в виде:

$$S = \iint\limits_S dS = \iint\limits_\Omega \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}\,dxdy \qquad (14.21)$$

(Ω – проекция S на плоскость Оxy).

2. Масса поверхности

$$M = \iint_S g(x,y,z)dS. \qquad (14.22)$$

3. Моменты:

$$M_{xy} = \iint_S zg(x,y,z)dS, M_{xz} = \iint_S ygdS, M_{yz} = \iint_S xgdS \text{ -} \qquad (14.23)$$

- статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей Оxy, Оxz, Оyz;

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)g(x,y,z)dS, I_y = \iint_S (x^2+z^2)gdS, I_z = \iint_S (x^2+y^2)gdS \text{ -} \qquad (14.24)$$

- моменты инерции поверхности относительно координатных осей;

$$I_{xy} = \iint_S z^2 g(x,y,z)dS, I_{xz} = \iint_S y^2 gdS, I_{yz} = \iint_S x^2 gdS \text{ -} \qquad (14.25)$$

- моменты инерции поверхности относительно координатных плоскостей;

$$I_0 = \iint_S (x^2+y^2+z^2)g(x,y,z)dS \text{ -} \qquad (14.26)$$

- момент инерции поверхности относительно начала координат.

4. Координаты центра масс поверхности:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M}, y_c = \frac{M_{xz}}{M}, z_c = \frac{M_{xy}}{M}. \qquad (14.27)$$

Поверхностный интеграл 2-го рода.

Напомним, что поверхностный интеграл второго рода от некоторой векторной функции представляет собой поток соответствующего векторного поля через выбранную сторону поверхности интегрирования (см. лекцию 13).

Замечание 1. Так как формулы, задающие значения геометрических и физических величин с помощью интегралов, выводятся с помощью одних и тех же приемов для интегралов всех- рассматриваемых типов, подробный их вывод дается только в начале лекции. При желании можно провести аналогичные рассуждения для тройных, криволинейных и поверхностных интегралов и получить все формулы, приводимые в лекции без подробного вывода.

Замечание 2. В лекции не рассматриваются примеры использования полученных формул, так как после подстановки в них конкретных функций задача сводится к технике интегрирования, которая рассматривалась в предыдущих лекциях.

Лекция 15.
Формула Гаусса-Остроградского. Дивергенция векторного поля, ее свойства, инвариантное определение и физический смысл. Формула Стокса. Ротор векторного поля, его свойства, инвариантное определение и физический смысл.

Формула Гаусса-Остроградского.

Зададим в пространстве замкнутую трехмерную область *V*, ограниченную поверхностью *S* и проектирующуюся на плоскость *Oxy* в правильную область *D*.

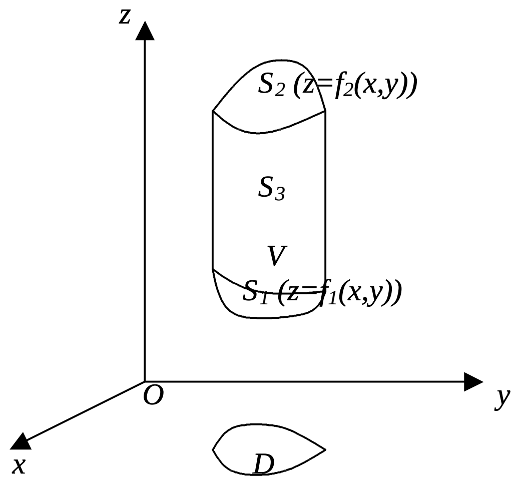


Рис. 1.

Будем считать, что поверхность *S* можно разбить на три части: S_1, заданную уравнением $z = f_1(x, y)$, S_2 ($z = f_2(x, y)$) и S_3 – цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz (рис.1).

Зададим в каждой точке области *V* и поверхности *S* непрерывные функции *P(x, y, z), Q(x, y, z)* и *R(x, y, z)* и вычислим интеграл

$$I = \iiint_V \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z}dxdydz = \iint_D \left(\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}dz \right) dxdy = \iint_D R(x,y,f_2(x,y))dxdy -$$
$$- \iint_D R(x,y,f_1(x,y))dxdy.$$

Зададим ориентацию поверхности *S*, выбрав направление *внешней* нормали, тогда на S_1 $\cos(\mathbf{n}, z) < 0$, на S_2 $\cos(\mathbf{n}, z) > 0$, а на S_3 $\cos(\mathbf{n}, z) = 0$. Двойные интегралы, стоящие в правой части предыдущего равенства, равны соответствующим поверхностным интегралам:

$$\iint_D R(x,y,f_2(x,y))dxdy = \iint_{S_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS,$$
$$\iint_D R(x,y,f_1(x,y))dxdy = \iint_{S_1} R(x,y,z)(-\cos(\vec{n}, z))dS.$$

(Знак «-» во втором интеграле появляется за счет того, элементы площади поверхности S_1 и области *D* связаны соотношением $dxdy = \Delta S(-\cos(\mathbf{n}, z))$). Следовательно, исходный интеграл можно представить в виде:

$$I = \iint_{S_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS + \iint_{S_1} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS = \iint_{S_2} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS +$$
$$+ \iint_{S_1} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS + \iint_{S_3} R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS = \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS.$$

Окончательный результат можно записать так:

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}dxdydz = \iint_S R(x,y,z)\cos(\vec{n}, z)dS.$$

Таким же образом можно получить соотношения

$$\iiint\limits_V \frac{\partial P}{\partial x} dxdydz = \iint\limits_S P(x,y,z)\cos(\vec{n},x)dS, \quad \iiint\limits_V \frac{\partial Q}{\partial y} dxdydz = \iint\limits_S Q(x,y,z)\cos(\vec{n},y)dS.$$

Складывая эти три равенства, получаем **формулу Гаусса-Остроградского**:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_S \left(P\cos(\vec{n},x) + Q\cos(\vec{n},y) + R\cos(\vec{n},z)\right)dS. \qquad (15.1)$$

Воспользовавшись формулой 13.9, задающей связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода, можно записать формулу Гаусса-Остроградского в ином виде:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint\limits_{S^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy, \qquad (15.2)$$

где запись «S^+» означает, что интеграл, стоящий справа, вычисляется по внешней стороне поверхности S.

Дивергенция векторного поля.

Продолжим изучение характеристик векторных полей.

Определение 15.1. **Дивергенцией** векторного поля $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, где A_x, A_y, A_z – функции от x, y, z, называется

$$div\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \qquad (15.3)$$

Замечание 1. Из определения видно, что дивергенция является *скалярной* функцией.
Замечание 2. Слово «дивергенция» означает «расходимость», так как дивергенция характеризует плотность источников данного векторного поля в рассматриваемой точке.

Рассмотрим формулу Гаусса-Остроградского с учетом определений потока и дивергенции векторного поля. Тогда в левой части формулы (15.1) стоит тройной интеграл по объему V от дивергенции векторного поля $\{P, Q, R\}$, а в правой – поток этого вектора через ограничивающую тело поверхность S:

$$\iint\limits_S A_n dS = \iiint\limits_V div\vec{A}dV. \qquad (15.4)$$

Докажем, что величина дивергенции в данной точке не зависит от выбора системы координат. Рассмотрим некоторую точку M, которую окружает трехмерная область V, ограниченная поверхностью S. Разделим обе части формулы (15.4) на V и перейдем к пределу при стягивании тела V к точке M. Получим:

$$div\vec{A} = \lim_{V\to M} \frac{\iint\limits_S A_n dS}{V}. \qquad (15.5)$$

Это равенство можно считать **инвариантным определением дивергенции**, то есть определением, не зависящим от выбора координатной системы.

Формула Стокса.

Рассмотрим поверхность S такую, что любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает ее в одной точке. Обозначим границу поверхности λ и выберем в качестве положительного направления нормали такое, при котором она образует с положительным направлением оси Oz острый угол. Если уравнение поверхности имеет вид $z = f(x, y)$, то направляющие косинусы нормали задаются формулами

$$\cos(\vec{n}, x) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \cos(\vec{n}, y) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\cos(\vec{n}, z) = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

Рассмотрим некоторую трехмерную область V, в которой целиком лежит поверхность S, и зададим в этой области функцию $P(x, y, z)$, непрерывную вместе с частными производными первого порядка. Вычислим криволинейный интеграл 2-го рода по кривой λ:

$$\oint_l P(x,y,z)dx.$$

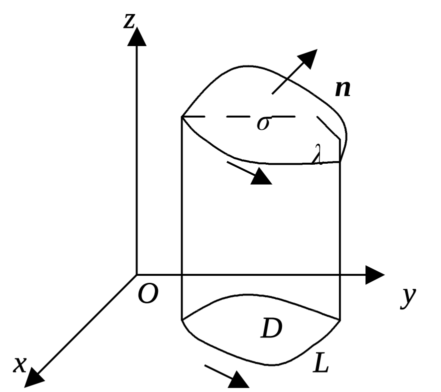


Рис. 2.

Уравнение линии λ имеет вид $z = f(x, y)$, где x, y – координаты точек линии L, являющейся проекцией λ на плоскость Оxy (рис.2). Поэтому, используя формулу (10.8), получаем:

$$\oint_l P(x,y,z)dx = \oint_L P(x,y,f(x,y))dx.$$

Обозначим $\underline{P}(x, y) = P(x, y, f(x, y))$, $\underline{Q}(x, y) = 0$ и применим к интегралу, стоящему в правой части предыдущего равенства, формулу Грина:

$$-\iint_D \frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y}dxdy = \oint_L P(x,y,f(x,y))dx,$$

где область D ограничена линией L. Преобразуем левое подынтегральное выражение, используя формулу производной сложной функции:

$$\frac{\partial P(x,y,f(x,y))}{\partial y} = \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

и подставим его в предыдущее равенство:

$$-\iint_D \left(\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)dxdy = \oint_L P(x,y,f(x,y))dx.$$ Тогда

$$\oint_l P(x,y,z)dx = -\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy - \iint_D \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy.$$ Теперь применим к интегралам, стоящим справа, формулу (13.7) и перейдем к поверхностным интегралам 1-го рода по поверхности σ:

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}dxdy = \iint_s \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n}, z)ds,$$

$$\iint_D \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \iint_s \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\cos(\vec{n},z)ds \; = -\iint_s \frac{\partial P}{\partial z}\cos(\vec{n},y)ds \,,$$

так как $\dfrac{\cos(\vec{n},y)}{\cos(\vec{n},z)} = -\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Следовательно, окончательный результат преобразований выглядит так:

$$\oint_l P(x,y,z)dx = \iint_s \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos(\vec{n},y) - \frac{\partial P}{\partial y}\cos(\vec{n},z) \right) ds \;.$$

При этом направление обхода контура λ выбирается соответствующим положительному направлению нормали (рис.2).

Задавая в области V непрерывно дифференцируемые функции $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$, можно получить для них аналогичные соотношения:

$$\oint_l Q(x,y,z)dx = \iint_s \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos(\vec{n},z) - \frac{\partial Q}{\partial z}\cos(\vec{n},x) \right) ds \;,$$

$$\oint_l R(x,y,z)dx = \iint_s \left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos(\vec{n},x) - \frac{\partial R}{\partial x}\cos(\vec{n},y) \right) ds \;.$$

Складывая левые и правые части полученных равенств, получим **формулу Стокса**, устанавливающую связь между поверхностным интегралом 1-го рода по поверхности σ и криволинейным интегралом 2-го рода по ограничивающему ее контуру λ с учетом ориентации поверхности:

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_s \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right)\cos(\vec{n},x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right)\cos(\vec{n},y) + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)\cos(\vec{n},x) \right] ds \; =$$

$$= \iint_s \begin{vmatrix} \cos(\vec{n},x) & \cos(\vec{n},y) & \cos(\vec{n},z) \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} ds \,. \qquad (15.6)$$

Последняя запись позволяет лучше запомнить подынтегральное выражение в правой части формулы Стокса, которое можно получить, раскрывая определитель по первой строке и учитывая, что во второй его строке стоят операторы частного дифференцирования по соответствующим переменным, применяемые к функциям, стоящим в третьей строке.

Используя связь между поверхностными интегралами 1-го и 2-го рода (формула (13.9)), можно записать формулу Стокса в ином виде:

$$\oint_l Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{s^+} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dxdz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \,. \qquad (15.7)$$

Ротор векторного поля.

Определение 15.2. **Ротором или вектором вихря** векторного поля $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, где A_x, A_y, A_z – функции от x, y, z, называется вектор, определяемый следующим образом:

$$rot\vec{A} = \left\{ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}; \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}; \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right\}. \qquad (15.8)$$

Замечание 1. Ротор характеризует завихренность поля $\boldsymbol{A}$ в данной точке, то есть наличие вращательных движений, так как его модуль равен удвоенной угловой скорости в этой точке.

Замечание 2. Формула Стокса в векторной формулировке имеет вид:

$$\oint_l A_x dx + A_y dy + A_z dz = \iint_s rot\vec{A} \cdot \vec{n} ds \,, \qquad (15.9)$$

то есть **циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку ротора этого вектора через поверхность, натянутую на данный контур**.

Замечание 3. Можно дать другое, **инвариантное**, определение ротора. Для этого рассмотрим произвольное направление *n*, исходящее из данной точки *M*, и окружим эту точку плоской площадкой *σ*, перпендикулярной к *n* и ограниченной контуром *λ*. Применяя формулу Стокса, получим:

$$\oint_l A_l \, dl = \iint_s rot_n \vec{A} ds \,.$$

Разделив обе части этого равенства на *σ* и стягивая площадку *σ* к данной точке, найдем в пределе, что

$$rot_n \vec{A} = \lim_{s \to M} \frac{\oint_l A_l \, dl}{s} \,.$$

Тем самым можно определить проекцию ротора на *любую* ось, то есть вектор rot ***A*** не зависит от выбора координатной системы.

Лекция 16.
Оператор Гамильтона, его использование и свойства. Потенциальные векторные поля, условие потенциальности. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Соленоидальные и гармонические векторные поля.

Оператор Гамильтона.

Вспомним определение градиента скалярной функции $u = u(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}\right)u.$$

Определим оператор, стоящий в скобках в правой части этого равенства, так:
Определение 16.1. Оператор

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{16.1}$$

называется **оператором Гамильтона или набла-оператором** и обозначается символом ∇ («набла»).
При применении оператора Гамильтона удобно рассматривать его как «символический вектор» и использовать различные операции над векторами. Например:
1) если умножить «вектор» ∇ на скалярную функцию u, то получим градиент этой функции:

$$\nabla u = \operatorname{grad} u; \tag{16.2}$$

2) составив скалярное произведение ∇ на вектор $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, получим дивергенцию вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{\partial}{\partial x}A_x + \frac{\partial}{\partial y}A_y + \frac{\partial}{\partial z}A_z = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = div\vec{A}; \tag{16.3}$$

3) перемножим теперь векторы ∇ и $\boldsymbol{A}$ векторным образом. Результатом будет ротор вектора $\boldsymbol{A}$:

$$\nabla\times\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \vec{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) = rot\vec{A}; \tag{16.4}$$

4) рассмотрим скалярное произведение векторов ∇ и $\nabla u = \operatorname{grad} u$:

$$\nabla\cdot(\nabla u) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} u) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u.$$

Определение 16.2. Оператор

$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{16.5}$$

называется **оператором Лапласа** и обозначается символом Δ («дельта»).

Определение 16.3. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{16.6}$$

называется **уравнением Лапласа**, а функция, удовлетворяющая ему – **гармонической функцией**.

Замечание. Отметим еще раз, результатом применения к скалярной функции *u* оператора Гамильтона является *вектор*, а оператора Лапласа – *скаляр*.

Потенциальные векторные поля.

Определение 16.4. Векторное поле $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ называется **потенциальным**, если вектор $\boldsymbol{A}$ является градиентом некоторой скалярной функции $u = u(x, y, z)$:

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{grad} u = \vec{i}\frac{\partial u}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial u}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}. \qquad (16.7)$$

При этом функция *u* называется **потенциалом** данного векторного поля.

Примерами потенциальных полей являются поле тяготения точечной массы *m*, помещенной в начале координат, электрическое поле точечного заряда *e*, находящегося в начале координат, и другие.

Выясним, при каких условиях векторное поле является потенциальным. Так как из (16.7) следует, что $A_x = \frac{\partial u}{\partial x}, A_y = \frac{\partial u}{\partial y}, A_z = \frac{\partial u}{\partial z}$, то $\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial A_x}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}$, $\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}$, так как смешанная производная второго порядка не зависит от порядка дифференцирования. Из этих равенств легко получаем, что

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0 \text{ –} \qquad (16.8)$$

- условие потенциальности векторного поля.

Определение 16.5. Векторное поле $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$, для которого $\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0$, называется **безвихревым**.

Из предыдущих рассуждений следует, что любое потенциальное поле является безвихревым. Можно доказать и обратное, то есть то, что любое безвихревое поле есть поле потенциальное.

Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

Рассмотрим криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_L Pdx + Qdy = \int\limits_{(MN)} Pdx + Qdy$, где L – кривая, соединяющая точки M и N. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области D, в которой целиком лежит кривая L. Определим условия, при которых рассматриваемый криволинейный интеграл зависит не от формы кривой L, а только от расположения точек M и N.

Проведем две произвольные кривые MPN и MQN, лежащие в области D и соединяющие точки M и N (рис.1).

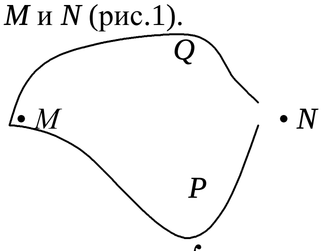


Рис. 1.

Предположим, что $\int\limits_{(MPN)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(MQN)} Pdx + Qdy$, то есть $\int\limits_{(MPN)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(MQN)} Pdx + Qdy = 0$

Тогда $\int\limits_{(MPN)} Pdx + Qdy + \int\limits_{(NQM)} Pdx + Qdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$, где L – замкнутый контур, составленный из кривых MPN и NQM (следовательно, его можно считать произвольным). Таким образом, условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования равносильно условию, что такой интеграл по любому замкнутому контуру равен нулю.

Теорема 16.1. Пусть во всех точках некоторой области D непрерывны функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда для того, чтобы для любого замкнутого контура L, лежащего в области D, выполнялось условие

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ во всех точках области D.

Доказательство.

1) Достаточность: пусть условие $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ выполнено. Рассмотрим произвольный замкнутый контур L в области D, ограничивающий область S, и напишем для него формулу Грина:

$$\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0 \ .$$

Итак, достаточность доказана.

2) Необходимость: предположим, что условие $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$ выполнено в каждой точке области D, но найдется хотя бы одна точка этой области, в которой $\frac{\partial Q}{\partial x}$ - $\frac{\partial P}{\partial y} \neq 0$. Пусть, например, в точке $P(x_0, y_0)$ $\frac{\partial Q}{\partial x}$ - $\frac{\partial P}{\partial y} > 0$. Так как в левой части неравенства стоит непрерывная функция, она будет положительна и больше некоторого δ > 0 в некоторой малой области D`, содержащей точку P. Следовательно,

$$\iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > d \iint\limits_{D'} dxdy = dS_{D'} > 0.$$

Отсюда по формуле Грина получаем, что $\oint\limits_{L'} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy > 0$, где L` - контур, ограничивающий область $D$`. Этот результат противоречит условию $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy = 0$. Следовательно, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ во всех точках области D, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Аналогичным образом для трехмерного пространства можно доказать, что необходимыми и достаточными условиями независимости криволинейного интеграла

$$\int\limits_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz$$

от пути интегрирования являются:

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}. \qquad (16.9)$$

Замечание 2. При выполнении условий (16.9) выражение $Pdx + Qdy + Rdz$ является полным дифференциалом некоторой функции u. Это позволяет свести вычисление криволинейного интеграла к определению разности значений u в конечной и начальной точках контура интегрирования, так как

$$\int_{(MN)} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{(MN)} du = u(N) - u(M).$$

При этом функцию u можно найти по формуле

$$u = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)dz + C, \qquad (16.10)$$

где (x_0, y_0, z_0) – точка из области D, а C – произвольная постоянная. Действительно, легко убедиться, что частные производные функции u, заданной формулой (16.10), равны P, Q и R.

Пример. Вычислить криволинейный интеграл 2-го рода $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} yzdx + xzdy + xydz$ по произвольной кривой, соединяющей точки (1, 1, 1) и (2, 3, 4).

Убедимся, что выполнены условия (16.9): $\frac{\partial(xy)}{\partial y} = \frac{\partial(xz)}{\partial z} = x, \frac{\partial(yz)}{\partial z} = \frac{\partial(xy)}{\partial x} = y,$ $\frac{\partial(xz)}{\partial x} = \frac{\partial(yz)}{\partial y} = z.$ Следовательно, функция u существует. Найдем ее по формуле (16.10), положив $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Тогда

$u = \int_0^x yzdx + \int_0^y 0\cdot zdy + \int_0^z 0\cdot 0dz + C = xyz + C$. Таким образом, функция u определяется с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Примем $C = 0$, тогда $u = xyz$.

Следовательно, $\int_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} yzdx + xzdy + xydz = xyz\Big|_{(1,1,1)}^{(2,3,4)} = 2\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 1 = 23.$

Соленоидальные и гармонические векторные поля.

Определение 16.6. Векторное поле $\boldsymbol{A} = \{A_x, A_y, A_z\}$ называется **соленоидальным** в области D, если в каждой точке этой области

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \qquad (16.11)$$

Замечание. Так как дивергенция характеризует плотность источников поля $\boldsymbol{A}$, то в области, где поле соленоидально, нет источников этого поля. Примером соленоидального поля может служить поле точечного заряда e во всех точках, кроме точки, где расположен заряд.

Условием соленоидальности поля является требование, что вектор $\boldsymbol{A}$ является ротором некоторого вектора $\boldsymbol{B}$: $\boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{B}$. Докажем это.

Действительно, если $A_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, A_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, A_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}$, то

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 B_z}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2 B_y}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2 B_z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 B_y}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2 B_x}{\partial y\partial z} \equiv 0.$$

Определение 16.7. Скалярное поле, задаваемое функцией $u = u(x, y, z)$, называется **гармоническим** в некоторой области, если функция u в этой области удовлетворяет уравнению Лапласа: $\Delta u = 0$.
Примеры: линейная функция, потенциал электрического поля точечного заряда или поля тяготения точечной массы.