Лекция 13.
Множества. Операции с множествами. Отображения множеств. Множество действительных чисел. Числовые множества. Функция. Область ее определения. Сложные и обратные функции. График функции. Основные элементарные функции. Предел функции в точке и на бесконечности. Свойства предела. Односторонние пределы. Предел числовой последовательности.

Замечание. Понятие множества, как и другие основополагающие понятия математики, вводится без определения.

Операции с множествами.

1. Включение множества A в множество B $(A \subset B)$. При этом каждый элемент множества A является элементом множества B, и множество A называется подмножеством множества B. В частности, $A=B$, если все элементы множества A принадлежат множеству B и наоборот.
2. Объединение множеств A и B $(A \cup B)$ - множество элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B.
3. Пересечение множеств A и B $(A \cap B)$ - множество всех элементов, принадлежащих одновременно A и B.
4. Разность множеств A и B ($A \backslash B$) – множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B.

Определение 13.1. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым множеством**.

Определение 13.2. Пусть заданы непустые множества X и Y. Соответствие, при котором каждому элементу множества X соответствует некоторый элемент множества Y, называется **отображением** X на Y.

Множество действительных чисел.

Из элементарной математики известно, что совокупность рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$. На нем определены операции:

1) Сложение: для любой пары действительных чисел a и b определено единственное число $a+b$, называемое их суммой, причем выполняются следующие условия:
   a) $a+b=b+a$
   b) $a+(b+c)=(a+b)+c$
   c) существует число 0 такое, что $a+0=a$ для любого $a\in$ R
   d) $\forall a \in R$ $\exists$ противоположное число $–a$, для которого $a+(-a)=0$.
2) Умножение: $\forall a, b \in R$ определено единственное число ab, называемое их произведением, такое, что выполняются следующие условия:
   a) $ab=ba \quad \forall a, b \in R$
   b) $a(bc)=(ab)c \quad \forall a, b, c \in R$
   c) существует число 1 такое, что $a\cdot 1=a \quad \forall a \in R$
   d) $\forall\, a \neq 0$ существует обратное число $1/a$, для которого $a\cdot 1/a = 1$.
   Связь сложения и умножения: $(a + b)c = ac + bc$.

Множество действительных чисел обладает следующими свойствами:

1) Упорядоченность - $\forall a,b \in R$ либо $a < b$, либо $a > b$. При этом
   a) если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.
   b) если $a < b$, то $\forall c \quad a + c < b + c$.
   c) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.
2) Непрерывность – для любых непустых множеств X и Y таких, что $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$ $x \le y$, $\exists a : x \le a \le y$.

Подмножества множества $\boldsymbol{R}$ называют числовыми множествами.
Примеры числовых множеств:

1. Множество натуральных чисел $\boldsymbol{N}$ (1,2,3,…).
2. Множество целых чисел $\boldsymbol{Z}$ (0,±1,±2,...).
3. Множество рациональных чисел $\boldsymbol{Q}$ (числа вида m/n, где m и n – целые).

Функция.

Определение 13.3. Если каждому элементу x множества X (называемого областью определения функции) по определенному закону ставится в соответствие **единственный** элемент y множества Y, то подобное отображение называется **функцией,** определенной на множестве X со значениями в множестве Y. При этом x называется независимой переменной, или аргументом, а $y = f(x)$ – зависимой переменной, или функцией.

Замечание. Мы будем рассматривать только **однозначные функции** (в отличие от многозначных функций, для которых одному значению x может соответствовать более одного значения y).

Способы задания функции:

1) табличный
2) графический
3) аналитический.

Определение 13.4. Если $y=F(u)$ является функцией от u, а $u=\varphi(x)$ – функцией от x, то
$$y = F[\varphi(x)]$$
называется **сложной функцией** или функцией от функции.

Основные элементарные функции.

1. Степенная функция $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$.
2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \ne 1$.
3. Логарифмическая функция $y=\log_a x$, $a > 0$, $a \ne 1$.
4. Тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \text{tg}\, x$, $y = \text{ctg}\, x$, $y = \sec x$, $y = \text{cosec}\, x$.
5. Обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \text{arctg}\, x$, $y = \text{arcctg}\, x$, $y = \text{arcsec}\, x$, $y = \text{arccosec}\, x$.

Определение 13.5. **Элементарной функцией** $y = f(x)$ называется функция, заданная с помощью основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций и взятия функции от функции.

Определение 13.6. Если для функции $y = f(x)$ можно определить функцию $x = g(y)$, ставящую в соответствие каждому значению функции $y = f(x)$ значение ее аргумента x, то функция $y = g(x)$ называется **обратной функцией** к $y = f(x)$ и обозначается $y = f^{-1}(x)$.

Пределы функций.

Определим понятие **окрестности** точки x_0 как множество значений x, являющихся решениями неравенства $0<|x - x_0| < \delta$, где $\delta > 0$ – некоторое число. Само значение x_0 может включаться в окрестность или не включаться в нее (в этом случае окрестность называется проколотой).
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 13.7. Число А называется **пределом** функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если $\forall e > 0 \quad \exists d = d(e) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$.
Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$.

Замечание. Для существования предела функции в точке x_0 не требуется, чтобы функция была определена в самой этой точке.

Примеры.

1. Докажем, что $\lim\limits_{x\to 3}(2x+1) = 7.$ Если $|2x+1-7| < \varepsilon$, то $|2x - 6| < \varepsilon$, $|x - 3| < \varepsilon/2$. Таким образом, если принять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$, то выполнены все условия определения предела. Утверждение доказано.
2. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x+1)(x-2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 2+1 = 3.$ Заметим, что в проколотой окрестности х=2 $\;x-2\neq 0,$ поэтому мы имеем право сократить дробь на $(x - 2)$.

Определение 13.8. Функция $y = f(x)$ имеет **бесконечный предел** при x, стремящемуся к x_0 (стремится к бесконечности, является бесконечно большой), если $\forall M > 0 \quad \exists d > 0$ такое, что $|f(x)| > M$ при $|x - x_0| < \delta$.
Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty.$

Определение 13.9. Число A называется **пределом функции $y = f(x)$ на бесконечности**, если $\forall e > 0 \quad \exists X > 0 : |f(x) - A| < e$ при $x > X$ ($\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$), при $x < -X$ ($\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = A$), при $|x| > X$ ($\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = A$).

Замечание. Бесконечный предел функции на бесконечности можно определить по аналогии с определением 13.8.

Определение 13.10. Функция $y = f(x)$ называется **ограниченной** в некоторой области значений x, если существует число $M>0$ такое, что $|f(x)|<M$ для всех значений x, принадлежащих рассматриваемой области.

Свойства пределов.

1. Если существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$ (A – конечное число), то функция $y = f(x)$ является ограниченной в некоторой окрестности (возможно, проколотой) точки x_0.
Доказательство. Так как для любого ε существует такое δ, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - x_0| < \delta$, то при этом $|f(x)| < |A| + \varepsilon$, то есть функция ограничена в рассматриваемой окрестности.
2. Функция не может иметь двух различных пределов при x, стремящемуся к одному и тому же значению.

Доказательство. Пусть A и B – пределы $f(x)$ при $x \to x_0$. Выберем $\varepsilon < |A-B|$. Тогда существует такое δ_1, что $|f(x)-A|<\varepsilon/2$ при $|x - x_0| < \delta_1$, и такое δ_2, что $|f(x)-B|<\varepsilon/2$ при $|x - x_0| < \delta_2$. Если выбрать в качестве δ меньшее из чисел δ_1 и δ_2, то значения функции $f(x)$ для аргументов, лежащих в δ – окрестности x_0, должны одновременно находиться в двух непересекающихся окрестностях, что невозможно. Утверждение доказано.

3. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ и $A \neq 0$, то существует окрестность точки x_0, в которой функция $f(x)$ сохраняет постоянный знак ($f(x)>0$, если $A > 0$, и $f(x)<0$, если $A < 0$).

Доказательство. Достаточно выбрать $\varepsilon=|A|/2$. Тогда для x из некоторой окрестности x_0 $|f(x)-A| < |A|/2$, то есть $A/2 < f(x) < 3A/2$ при $A > 0$ и $3A/2 < f(x) < A/2$ при $A < 0$. Следовательно, в выбранной окрестности $f(x)$ сохраняет постоянный знак.

Односторонние пределы.

Определение 13.11. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 слева (справа), если $\forall e > 0 \quad \exists d = d(e) > 0$ такое, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x_0 - x < \delta$ ($x - x_0 < \delta$).

Обозначения: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$

Теорема 13.1(второе определение предела). Функция $y=f(x)$ имеет при x, стремящемся к x_0, предел, равный A, в том и только в том случае, если оба ее односторонних предела в этой точке существуют и равны A.

Доказательство.

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то и для $x_0 - x < \delta$, и для $x - x_0 < \delta$ $|f(x) - A|<\varepsilon$, то есть

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$

3) Если $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A$, то существует δ_1: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x_0 - x < \delta_1$ и δ_2: $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $x - x_0 < \delta_2$. Выбрав из чисел δ_1 и δ_2 меньшее и приняв его за δ, получим, что при $|x - x_0| < \delta$ $|f(x) - A| < \varepsilon$, то есть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$. Теорема доказана.

Замечание. Поскольку доказана эквивалентность требований, содержащихся в определении предела 13.7 и условия существования и равенства односторонних пределов, это условие можно считать вторым определением предела.

Предел числовой последовательности.

Числовую последовательность $\{a_n\}$ можно считать функцией дискретного аргумента n и применить к ней определение 13.9:

Определение 13.12. Число A называется **пределом числовой последовательности** $\{a_n\}$, если $\forall e > 0 \quad \exists N : |a_n - A| < e$ при $n > N$.

Лекция 14.
Бесконечно малые функции и их свойства. Основные теоремы о пределах. Замечательные пределы. Натуральный логарифм и гиперболические функции.

Определение 14.1. Функция $y=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} a(x)=0.$

Свойства бесконечно малых.

1. Сумма двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$, то существуют δ_1 и δ_2 такие, что $|\alpha(x)|<\varepsilon/2$ и $|\beta(x)|<\varepsilon/2$ для выбранного значения ε. Тогда $|\alpha(x)+\beta(x)|\le|\alpha(x)|+|\beta(x)|<\varepsilon$, то есть $|(\alpha(x)+\beta(x))-0|<\varepsilon$.
Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}(a(x)+b(x))=0$, то есть $\alpha(x)+\beta(x)$ – бесконечно малая.

Замечание. Отсюда следует, что сумма любого конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

2. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, а $f(x)$ – функция, ограниченная в некоторой окрестности x_0, то $\alpha(x)f(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Доказательство. Выберем число M такое, что $|f(x)|<M$ при $|x-x_0|<\delta_1$, и найдем такое δ_2, что $|\alpha(x)|<\varepsilon/M$ при $|x-x_0|<\delta_2$. Тогда, если выбрать в качестве δ меньшее из чисел δ_1 и δ_2, $|\alpha(x)\cdot f(x)|<M\cdot\varepsilon/M=\varepsilon$, то есть $\alpha(x)\cdot f(x)$ – бесконечно малая.
Следствие 1. Произведение бесконечно малой на конечное число есть бесконечно малая.
Следствие 2. Произведение двух или нескольких бесконечно малых есть бесконечно малая.
Следствие 3. Линейная комбинация бесконечно малых есть бесконечно малая.

3. (**Третье определение предела**). Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, то необходимым и достаточным условием этого является то, что функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x)=A+\alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$.

Доказательство.

1) Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Тогда $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $x\to x_0$, то есть $\alpha(x)=f(x)-A$ – бесконечно малая при $x\to x_0$. Следовательно, $f(x)=A+\alpha(x)$.
2) Пусть $f(x)=A+\alpha(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-A)=\lim\limits_{x\to x_0} a(x)=0$, значит, $\forall e$ $|f(x)-A|<\varepsilon$ при $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Замечание. Тем самым получено еще одно определение предела, эквивалентное двум предыдущим.

Основные теоремы о пределах.

Теорема 14.1. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B.$

Доказательство. Используя третье определение предела, представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$. Тогда $f(x)+g(x)=A+B+(\alpha(x)+\beta(x))=A+B+\gamma(x)$, где $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$ – бесконечно малая.
Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B.$

Теорема 14.2. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$**,** то существует и

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B.$

Доказательство. Представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$. Тогда $f(x)\cdot g(x)=AB+A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$. Но $A\beta(x)+B\alpha(x)+\alpha(x)\beta(x)$ – бесконечно малая (так как $f(x)$ и $g(x)$ ограничены в окрестности x_0), следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = A\cdot B.$

Теорема 14.3. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B \neq 0$**,** то существует и

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$$

Доказательство. Представим $f(x)=A+\alpha(x)$, $g(x)=B+\beta(x)$, где $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x\to x_0$. Тогда $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A+a(x)}{B+b(x)} = \dfrac{A}{B} + \dfrac{Ba(x)-Ab(x)}{B(B+b(x))} = \dfrac{A}{B} + \dfrac{1}{B(B+b(x))}(Ba(x)-Ab(x)),$

где $\dfrac{1}{B(B+b(x))}$ – ограниченная в окрестности x_0 функция, так как имеет предел, равный $1/B^2$, а $B\alpha(x)-A\beta(x)$ – бесконечно малая. Поэтому $\dfrac{1}{B(B+b(x))}(Ba(x)-Ab(x))$ - бесконечно малая, и $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}.$

Теорема 14.4 («лемма о двух милиционерах»). Если $f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$ в некоторой окрестности x_0 и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$, то существует и $\lim\limits_{x\to x_0} j(x) = A.$.

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $f(x)-A\le\varphi(x)-A\le g(x)-A$. Выберем δ-окрестность точки x_0, в которой $|f(x)-A|<\varepsilon$ и $|g(x)-A|<\varepsilon$. Тогда $-\varepsilon< f(x)-A\le\varphi(x)-A\le g(x)-A<\varepsilon$. Поэтому $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} j(x) = A.$.

Теорема 14.5. Если при $x\to x_0$ $f(x)\ge 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A.$, то $A\ge 0$.

Доказательство. Предположим, что $A<0$. Тогда, выбрав $\varepsilon=|A|/2$, найдем окрестность точки x_0, в которой $|f(x)-A|<|A|/2$, следовательно, $3A/2<f(x)<A/2$, то есть $f(x)<0$ в рассматриваемой окрестности, что противоречит условию теоремы.

Следствие 1. Аналогично доказывается, что если $f(x)\le 0$, то $A\le 0$.
Следствие 2. Если $f(x)\ge g(x)$ и обе функции имеют пределы в точке x_0, то $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ge \lim\limits_{x\to x_0} g(x).$

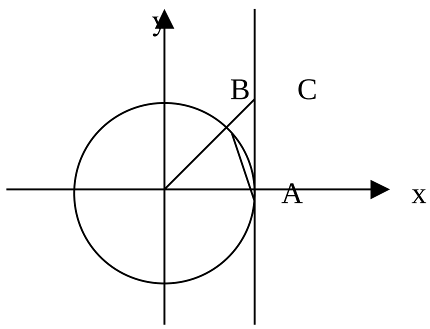
Замечание. Все перечисленные утверждения можно доказать для $x\to\infty$.

Теорема 14.6 (без доказательства). Ограниченная и возрастающая при $a<x<b$ $(a<x<\infty)$ функция имеет предел при $x\to b$ $(x\to\infty)$.

Замечательные пределы.

Теорема 14.7 (первый замечательный предел). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим окружность единичного радиуса с центром в начале координат и будем считать, что угол AOB равен x (радиан). Сравним площади треугольника AOB, сектора AOB и треугольника AOC, где прямая OC – касательная к окружности, проходящая через точку (1;0). Очевидно, что $S_{\Delta AOB} < S_{сект.AOB} < S_{\Delta AOC}$.



Используя соответствующие геометрические формулы для площадей фигур, получим отсюда, что $\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot tgx$, или sin$x$<$x$<tg$x$. Разделив все части неравенства на sin$x$ (при 0<x<π/2 sin$x$>0), запишем неравенство в виде: $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$.

Тогда $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, и по теореме 14.4 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

Замечание. Доказанное справедливо и при x<0.

Следствия из первого замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x} = k\lim\limits_{kx\to 0}\frac{\sin kx}{kx} = k\cdot 1 = k.$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\frac{1}{\cos kx} = k\cdot 1 = k.$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin mx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}\frac{x}{\sin mx} = k\frac{1}{m} = \frac{k}{m}.$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{tgmx} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{tgkx}{x}\frac{x}{tgmx} = \frac{k}{m}.$
5. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\sin y} = 1,$ где y = arcsin$x$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{tgy} = 1,$ где y = arctg$x$.
7. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = 2\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x}\right)^2 = 2(\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}.$

Теорема 14.8 (второй замечательный предел). $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

Замечание. Число e ≈ 2,7.
Доказательство.

1. Докажем сначала, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ при $n \to \infty$ имеет предел, заключенный между 2 и 3. По формуле бинома Ньютона

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \geq 2 -$$

возрастающая переменная величина при возрастающем n. С другой стороны, $\left(1-\frac{1}{n}\right)<1; \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)<1$ и т.д., поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n} < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}} = 1+\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3.$$

Следовательно, $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ - ограниченная и возрастающая величина, поэтому она имеет предел (см. теорему 14.6). Значение этого предела обозначается числом e.

2. Докажем, что $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

а) Пусть $x \to +\infty$. Тогда $n \leq x < n+1, \frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}, 1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$,

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$. При $x \to \infty \quad n \to \infty$. Найдем пределы левой и правой частей неравенства:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e, \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \frac{e}{1} = e.$$

Следовательно, по теореме 14.4 $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$.

б) Если $x \to -\infty$, то $t = -(x+1) \to +\infty$, и

$$\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x}) = \lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1} = e\cdot 1 = e.$$ Теорема доказана.

Следствия из второго замечательного предела.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+x) = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}) = \ln e = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)} = \ln a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = \ln a$, где $a > 0$, $y = a^x - 1$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \ln e = 1.$

Натуральный логарифм и гиперболические функции.

Определение 14.2. Логарифм с основанием e называется **натуральным логарифмом**. Обозначение: $\log_e x=\ln x$.

Определение 14.3. Функции $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус), $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус), $thx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ (гиперболический тангенс) и $cthx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$ (гиперболический котангенс) называются **гиперболическими функциями**.

Замечание 1. Гиперболические функции обладают некоторыми свойствами, похожими на свойства обычных тригонометрических функций. Например,
$\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=\frac14(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x})=1$,
$2\,\mathrm{sh}x\,\mathrm{ch}x=2\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}\,\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}=\mathrm{sh}2x$,
$\mathrm{th}x=\mathrm{sh}x/\mathrm{ch}x$, $\mathrm{cth}x=\mathrm{ch}x/\mathrm{sh}x$,
$\mathrm{th}x\cdot\mathrm{cth}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}\,\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=1$ и т.д.
Замечание 2. Термин «гиперболические» объясняется тем, что уравнения

$$x=a\,\mathrm{ch}\,t,\ y=a\,\mathrm{sh}\,t,\ \ a>0,\ -\infty<t<+\infty,$$

являются параметрическими уравнениями правой ветви гиперболы $x^2-y^2=a^2$, так же, как $x=a\cos t$, $y=a\sin t$ $(0\le t\le 2\pi)$ – параметрические уравнения окружности $x^2+y^2=a^2$.

Лекция 15.
Сравнение бесконечно малых. Символы «о» и «О». Эквивалентные бесконечно малые, их применение к вычислению пределов. Бесконечно большие функции и их связь с бесконечно малыми.

Рассмотрим функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, для которых $\lim\limits_{x\to x_0}a(x)=\lim\limits_{x\to x_0}b(x)=0$, то есть бесконечно малые в окрестности x_0.

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)}{b(x)}=A, |A|<\infty$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми **одного порядка**. В частности, если $A=1$, говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – **эквивалентные** бесконечно малые.
2. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)}{b(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется бесконечно малой **более высокого порядка** по сравнению с $\beta(x)$.
3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{a(x)}{b^n(x)}=A, |A|<\infty$, то $\alpha(x)$ есть бесконечно малая порядка n по сравнению с $\beta(x)$.

Обозначения: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ – бесконечно малые одного порядка, $\alpha(x)\sim\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые, $\alpha(x)=o(\beta(x))$ – α есть бесконечно малая более высокого порядка, чем β.

Замечание 1. Используя 1-й и 2-й замечательные пределы и их следствия, можно указать бесконечно малые функции при $x \to 0$, эквивалентные x: $\sin x$, $\mathrm{tg}x$, $\arcsin x$, $\mathrm{arctg}x$, $\ln(1+x)$, e^x-1.

Замечание 2. При раскрытии неопределенности вида $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, то есть предела отношения двух бесконечно малых, можно каждую из них заменять на эквивалентную – эта операция не влияет на существование и величину предела.
Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 3x}-1}{\ln(1-arctg(5\sin x))}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{-arctg(5\sin x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-5\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{-5x}=-\frac{3}{5}.$$

Бесконечно большие функции.

Определение 15.1. Функция f(x) называется **бесконечно большой** при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} f(x)=+\infty$.

Для бесконечно больших можно ввести такую же систему классификации, как и для бесконечно малых, а именно:

1. Бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ считаются величинами одного порядка, если $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=A, |A|<\infty$.
2. Если $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$, то $f(x)$ считается бесконечно большой более высокого порядка, чем $g(x)$.
3. Бесконечно большая $f(x)$ называется величиной k-го порядка относительно бесконечно большой $g(x)$, если $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g^k(x)}=A, |A|<\infty$.

Замечание. Отметим, что a^x – бесконечно большая (при $a>1$ и $x\to\infty$) более высокого порядка, чем x^k для любого k, а $\log_a x$ – бесконечно большая низшего порядка, чем любая степень x^k.

Теорема 15.1. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x\to x_0$, то $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$.

Доказательство. Докажем, что $\forall M>0 \quad \exists d(M):\left|\frac{1}{a}\right|>M$ при $|x - x_0| < \delta$. Для этого достаточно выбрать в качестве ε $1/M$. Тогда при $|x - x_0| < \delta$ $|\alpha(x)|<1/M$, следовательно, $|1/\alpha(x)|>M$. Значит, $\lim_{x\to x_0}\frac{1}{a(x)}=\infty$, то есть $1/\alpha(x)$ – бесконечно большая при $x\to x_0$.

Лекция 16.
Непрерывность функции в точке. Локальные свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной и обратной функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функций и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, промежуточные значения.

Определение 16.1. Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Замечание. Из этого определения следует, во-первых, что функция определена при $x = x_0$, и во-вторых, что при $x\to x_0$ существует конечный предел функции.

Свойства непрерывных функций.

1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)+g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$.
2. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$.
3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при $x = x_0$, то $f(x)/g(x)$ тоже непрерывна при $x = x_0$ при условии, что $g(x_0) \neq 0$.
4. Если $u=\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$, а $f(u)$ непрерывна при $u = u(x_0)$, то сложная функция $f(\varphi(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

Доказательства всех перечисленных свойств непосредственно следуют из соответствующих свойств пределов.

Точки разрыва и их классификация.

Определение 16.2. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, возможно, самой этой точки. Тогда x_0 называется **точкой разрыва** функции $f(x)$, если она либо не определена при $x = x_0$, либо не является непрерывной в точке x_0.
Определение 16.3. Если существует конечный предел $f(x)$ при $x\to x_0$, но не равный $f(x_0)$, точка разрыва x_0 называется **устранимой особенностью**.
Замечание. Термин «устранимая особенность» связан с тем, что, доопределив функцию в точке разрыва значением ее предела в этой точке, мы сделаем ее непрерывной при $x = x_0$, то есть устраним разрыв в рассматриваемой точке.
Определение 16.4. Если существуют конечные односторонние пределы $f(x)$ при $x\to x_0$, точка x_0 называется **точкой разрыва 1-го рода**.
Определение 16.5. Все остальные точки разрыва называются **точками разрыва 2-го рода**.

Примеры.

1. $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$. Функция не определена при $x = 1$, а для остальных значений аргумента может быть представлена как $y = x - 2$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}=1-2=-1$, то есть $x = 1$ – устранимая особенность.

2. $y=\dfrac{|x|}{x}$. Из определения модуля следует, что $y = 1$ при $x > 0$, $y = -1$ при $x < 0$, а при $x = 0$ функция не определена. При этом $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{|x|}{x}=1, \lim\limits_{x\to -0}\dfrac{|x|}{x}=-1$. Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 1-го рода.

3. $y=\dfrac{1}{x^2}$. Функция не определена при $x = 0$, и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$. Поэтому $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

4. $y=e^{\frac{1}{x}}$. $\lim\limits_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}}=0, \lim\limits_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}}=\infty,$ то есть правосторонний предел не является конечным. Значит, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

5. $y=\sin\frac{1}{x}$. Функция не определена при $x = 0$ и не имеет предела при $x\to 0$. Следовательно, $x = 0$ – точка разрыва 2-го рода.

Свойства функций, непрерывных на отрезке.

Определение 16.6. Функция $y=f(x)$ называется **непрерывной на отрезке [ab],** если она непрерывна в каждой точке этого отрезка (при этом $f(a)$ и $f(b)$ равны соответствующим односторонним пределам).

Теорема 16.1. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке [ab], ограничена на нем. Доказательство. По 1-му свойству предела существует окрестность точки $x = a$, в которой $f(x)$ ограничена, то есть существуют числа m_0 и M_0: $m_0<f(x)<M_0$ в рассматриваемой окрестности. Выберем точку в правой части этой окрестности и рассмотрим окрестность этой точки, в которой $f(x)$ тоже ограничена. Продолжим эту процедуру до тех пор, пока весь отрезок [ab] не будет покрыт системой из n окрестностей, причем для каждой i-й окрестности $m_i<f(x)<M_i$. Следовательно, для любого x, принадлежащего отрезку [ab], верно неравенство: $m<f(x)<M$, где $m=\min(m_i)$, $M=\max(M_i)$. Значит, $f(x)$ ограничена на [ab].

Замечание. Для доказательства следующего свойства функции, непрерывной на отрезке, введем понятие точной верхней и нижней грани числового множества.

Определение 16.7. Если множество X ограничено сверху, то наименьшее из чисел, ограничивающих его сверху, называется его **верхней гранью** . **Нижней гранью** называется наибольшее из чисел, ограничивающих множество снизу.
Обозначения: $B=\sup X$ – верхняя грань, $A=\inf X$ – нижняя грань.
Замечание 1. Можно дать другое определение верхней и нижней грани, эквивалентное предыдущему: число B называется верхней гранью числового множества X, если:
1) $x\leq B \quad \forall x\in X$
2) $\forall B_1 < B \quad \exists x\in X : x > B_1$.
Аналогично число A называется нижней гранью числового множества X, если:
1) $x\geq A \quad \forall x\in X$
2) $\forall A_1 > A \quad \exists x\in X : x < A_1$.
Замечание 2. Можно доказать, что всякое непустое ограниченное сверху (снизу) числовое множество имеет верхнюю (нижнюю) грань. Следовательно, верхняя и нижняя грань существует для значений функции, ограниченной на отрезке.

Теорема 16.2. Если функция $y=f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [ab], то она достигает на нем своей верхней и нижней грани.
Доказательство. Ограниченность $f(x)$ на [ab] следует из теоремы 16.1. Пусть $M=\sup f(x)$. Предположим, что $f(x)<M$ на [ab], и рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=\frac{1}{M-f(x)}$. По выдвинутому предположению знаменатель дроби в 0 не обращается, следовательно, $g(x)$ непрерывна на [ab] и поэтому ограничена (т.16.1):

$g(x) \le m, m > 0.$ Но из этого следует, что $f(x) \le M - \frac{1}{m}$, то есть число $M - \frac{1}{m}$, меньшее M, оказывается верхней гранью $f(x)$, что противоречит выбору M. Значит, на $[ab]$ найдется значение x_0 такое, что $f(x_0)=M$. Аналогичным образом можно доказать и то, что $f(x)$ достигает на $[ab]$ своей нижней грани.

Теорема 16.3. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[ab]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то для любого числа C, заключенного между A и B, найдется $x_0 \in [ab]$: $f(x_0)=C$.
Доказательство. Пусть для определенности $A<C<B$. Найдем середину отрезка $[ab]$: $\underline{x}=(a+в)/2$. Если при этом $f(\underline{x})=C$, то искомое значение x_0 найдено. В противном случае выберем ту половину отрезка, на концах которой значения $f(x)$ лежат по разные стороны C, и обозначим ее концы a_1 и b_1. Будем продолжать эту процедуру (деления отрезка пополам и выбора соответствующей половины). Тогда либо через конечное число шагов значение функции в середине очередного отрезка станет равно C, либо мы получим две последовательности ($\{a_n\}$- начальных точек выбранных отрезков и $\{b_n\}$- их конечных точек), имеющие своими пределами одну и ту же общую для всех отрезков точку x_0. Тогда в силу непрерывности $f(x)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n) = f(x_0)$.
Но, поскольку отрезки выбирались так, что $f(a_n) < C < f(b_n)$, получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \le C \le \lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)$, то есть $f(x_0) \le C \le f(x_0)$, или $C = f(x_0)$.

Следствие.
Если функция непрерывна на отрезке и принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке найдется хотя бы одна точка, в которой значение функции равно нулю.

Непрерывность обратной функции.

Лемма. Если функция $f(x)$ строго возрастает на $[ab]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то существует обратная функция $f^{-1}(x)$, строго возрастающая на $[AB]$.
Доказательство. Докажем существование обратной функции, то есть ее однозначность. Действительно, если существует $y=f(x_1)=f(x_2)$, то это противоречит условию монотонности $f(x)$: если $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$, а если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$.
Докажем возрастание f^{-1} на $[AB]$. Пусть $y_1 = f(x_1) < y_2 = f(x_2)$. Тогда, если $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = =f(x_2)$; если $x_1 > x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Оба эти случая противоречат выбору y_1 и y_2. Значит, $x_1 < x_2$, то есть $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$. Лемма доказана.

Теорема 16.4. Если функция $f(x)$ строго возрастает и непрерывна на $[ab]$ и $f(a)=A$, $f(b)=B$, то множеством значений $f(x)$ является отрезок $[AB]$, и обратная функция $f^{-1}(x)$ является непрерывной и строго возрастающей на $[AB]$.
Доказательство. Неравенство $A = f(a) < f(x) < f(b) = B$ для $a < x < b$ следует из возрастания $f(x)$. С другой стороны, любое значение из интервала (AB) будет достигаться при некотором x из интервала (ab) по теореме 16.3. Возрастание обратной функции следует из леммы. Остается доказать непрерывность f^{-1}. Если допустить, что на (AB) существует точка разрыва, то из условия $a \le f^{-1} \le b$ следует, что может наблюдаться только разрыв 1-го рода. Но, если односторонние пределы в точке такого разрыва не равны между собой, то обратная функция не может принимать значений, лежащих между односторонними пределами (так как функция монотонна, и левосторонний предел может быть только меньше правостороннего), а это противоречит доказанному утверждению, что обратная функция принимает **все** значения из интервала $[AB]$. Значит, f^{-1} непрерывна на $[AB]$. Теорема доказана.

Непрерывность элементарных функций.

1. Так как функции $y=C$ и $y=x$ непрерывны, то из свойств непрерывных функций следует непрерывность любого многочлена и непрерывность дробно-рациональной функции при всех значениях x, кроме тех, при которых знаменатель дроби обращается в 0.
2. Для доказательства непрерывности показательной функции воспользуемся тем, что $\lim\limits_{x\to 0} a^x = 1 = a^0$, то есть a^x непрерывна при x=0. Но $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1,$ то есть $\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, и показательная функция непрерывна при всех значениях аргумента. Отсюда следует непрерывность гиперболических функций.

3. Непрерывность логарифмической функции на любом конечном отрезке следует из теоремы 16.4, так как логарифмическая функция является обратной к показательной.
4. Докажем непрерывность функции $y=\sin x$. $\sin x < x$ для $0 < x < \frac{p}{2}$, тогда $|\sin x| < |x|$ для любого x. Отсюда $|\sin x - \sin x_0| = 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|\cdot|\cos\frac{x+x_0}{2}| \leq |x - x_0|$, что доказывает непрерывность функции при выборе ε = δ = $|x - x_0|$.

Из непрерывности функции $y = \sin x$, в свою очередь, следует непрерывность остальных тригонометрических функций: $\cos x = \sin(\frac{p}{2} - x), tgx = \frac{\sin x}{\cos x}$ и т.д. и непрерывность обратных тригонометрических функций.

Следовательно, **все элементарные функции непрерывны во всей области своего определения.**

Лекция 17.

Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Уравнение касательной к графику функции. Дифференцируемость функции, ее связь с непрерывностью. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Линеаризация функции.

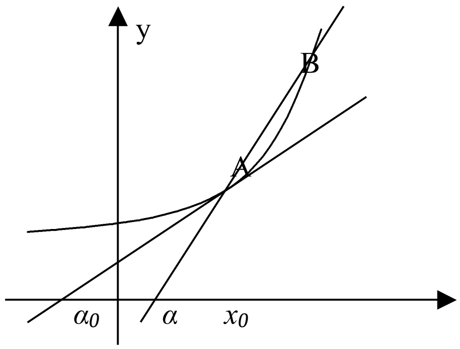
Рассмотрим функцию $y=f(x)$, заданную в окрестности точки x_0.

Определение 17.1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то он называется **производной** функции f в точке x_0.

Обозначение: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

Разность $\Delta x = x - x_0$ называется **приращением аргумента**, а $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ - **приращением функции**. Таким образом, можно определить производную как $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Геометрический смысл производной.



Рассмотрим график функции $y=f(x)$ и проведем секущую через точки A с абсциссой x_0 и B с абсциссой $x_0+\Delta x$. Если обозначить разность ординат этих точек Δy, то тангенс угла α, образованного секущей с осью Оx, можно представить так: $tga = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Если$\Delta x\to 0$, точка B перемещается по кривой, приближаясь к точке A, и секущая при совпадении точек B и A превращается в касательную к графику функции, образующую с осью Ox угол α_0. При этом $tga_0 = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$. Следовательно, **значение производной при данном значении *x* равно тангенсу угла, образованного касательной к графику функции в точке с соответствующим значением *x* с положительным направлением оси *Ox*.**

Механический смысл производной.

Рассмотрим прямолинейное движение тела, для которого пройденное расстояние есть функция от времени: $s=f(t)$. Среднюю скорость за время Δt можно определить по формуле: $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Для определения мгновенной скорости тела в данный момент времени устремим Δt к нулю. Получим: $v = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{(t_0+\Delta t)-t_0} = s'(t_0)$. Таким образом, производная от расстояния в данный момент времени равна мгновенной скорости движения в этот момент. Соответственно **производная любой функции при данном значении аргумента равна скорости изменения этой функции при рассматриваемом *x*.**

Уравнение касательной к графику функции.

Составим уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ при $x = x_0$. Эта прямая должна проходить через точку с координатами (x_0,y_0), лежащую на графике функции, где $y_0 = f(x_0)$, и иметь угловой коэффициент, равный производной $f(x)$ при $x = x_0$. Воспользовавшись уравнением (7.9), получим: $y = f`(x_0)x + b$, причем $y_0 = f`(x_0)x_0 + b$, то есть $b = y_0 - f`(x_0)x_0$. Тогда уравнение касательной можно записать в виде:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0) \qquad (17.1)$$

Дифференцируемость функции.

Определение 17.2. Если приращение функции $y = f(x)$ при $x = x_0$ можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x) \quad , \qquad (17.2)$$

где A = const, то $y = f(x)$ называется **дифференцируемой** при $x = x_0$, а $A\Delta x$ называется **главной линейной частью** приращения или **дифференциалом** функции.
Обозначение: $dy = A\Delta x$.
Замечание. Так как при $y = x$ получаем $dx = 1\cdot\Delta x$, можно обозначать $\Delta x = dx$.

Теорема 17.1. Функция дифференцируема в некоторой точке в том и только в том случае, если она имеет в этой точке производную.
Доказательство.

1) Если для $y=f(x)$ существует $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то $f'(x_0)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}+b(\Delta x)$, где $\beta(\Delta x)$ – бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Тогда $\Delta y=f'(x_0)\Delta x-b(\Delta x)\Delta x=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$. Следовательно, функция $y = f(x)$ дифференцируема при $x = x_0$, причем $A = f'(x_0)$.

2) Пусть $y=f(x)$ дифференцируема при $x=x_0$, то есть ее приращение имеет вид (17.2). Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A+\dfrac{o(\Delta x)}{\Delta x})=A=f'(x_0)$. Таким образом, $f(x)$ имеет производную в точке x_0, равную A.

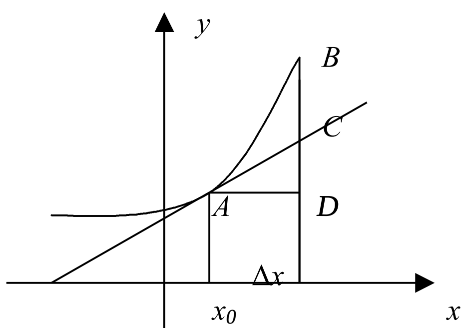
Следствие. Дифференциал функции можно представить в виде $dy=f'(x_0)dx$, а производную – в виде $f'(x_0)=\dfrac{dy}{dx}$.

Теорема 17.2. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Из формулы (17.2) следует, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$, что и означает непрерывность $f(x)$ при $x = x_0$.

Замечание. Обратное утверждение неверно, то есть из непрерывности функции не следует ее дифференцируемость. Например, $y = |x|$ непрерывна при $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Геометрический смысл дифференциала



Линеаризация функции.

Рассмотрим график функции $y=f(x)$ и проведем касательную к нему при $x=x_0$. Тогда при приращении аргумента Δx приращение функции Δy равно длине отрезка BD, а приращение ординаты касательной $f'(x_0)\Delta x=dy$ равно длине отрезка CD. Следовательно, **дифференциал функции равен приращению ординаты касательной.**

Так как истинное значение приращения функции отличается от ее дифференциала на бесконечно малую более высокого порядка, чем Δx, при приближенных вычислениях можно заменять Δy на dy, то есть считать, что $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. При этом функция $f(x)$ для значений x, близких к x_0, приближенно заменяется линейной функцией. Эта операция называется **линеаризацией** функции.

Пример.

Найдем приближенное значение $\sqrt{1{,}02}$. Пусть $f(x)=\sqrt{x}, x_0=1, \Delta x=0{,}02.$ Тогда

$f(1+0{,}02)\approx f(1)+f'(1)\cdot 0{,}02=\sqrt{1}+\dfrac{1}{2\sqrt{1}}\cdot 0{,}02=1+0{,}01=1{,}01.$

Лекция 18.
Свойства производной (правила дифференцирования). Производная сложной и обратной функций. Инвариантность формы дифференциала. Таблица производных, логарифмическое дифференцирование. Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Правила дифференцирования.

Пусть при рассматриваемых значениях x существуют производные функций $f(x)$ и $g(x)$, то есть эти функции являются дифференцируемыми при данных значениях аргумента. Сформулируем и докажем некоторые свойства производных.

1. $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x).$ (18.1)

Доказательство. $(f(x)+g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(f+\Delta f+g+\Delta g)-(f+g)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}+\dfrac{\Delta g}{\Delta x}) = f'+g'.$

2. $(kf(x))' = kf'(x),$ где k=const. (18.2)

Доказательство. $(kf(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(kf+\Delta kf)-kf}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta kf}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{k\Delta f}{\Delta x} = kf'(x).$

3. $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x).$ (18.3)

Доказательство. $(f(x)\cdot g(x))' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(f+\Delta f)(g+\Delta g)-fg}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{g\Delta f+f\Delta g+\Delta f\Delta g}{\Delta x} =$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta f}{\Delta x}g+f\dfrac{\Delta g}{\Delta x}+\dfrac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g\right) = f'g+fg'+f'\cdot 0,$ так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta g = 0$ в силу непрерывности $g(x)$.

4. Если $g(x)\neq 0$, то $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$ (18.4)

Доказательство.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left(\frac{f+\Delta f}{g+\Delta g}-\frac{f}{g}\right) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(fg+g\Delta f-f\Delta g-fg)}{\Delta x\cdot g(g+\Delta g)} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta f}{\Delta x}g-f\dfrac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g+\Delta g)} = \frac{f'g-fg'}{g^2}$$

Производная сложной функции.

Если функция $u=\varphi(x)$ имеет при некотором значении x производную $u_x'=\varphi'(x)$, а функция $y=f(u)$ имеет при соответствующем значении u производную $y_u'=f'(u)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ тоже имеет при данном значении x производную, равную

$$y'(x) = f'(u)\cdot u'(x). \quad (18.5)$$

Доказательство.

Так как $\lim\limits_{\Delta u\to o}\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u),$ то по третьему определению предела можно представить $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = y'(u)+a$, где $a\to 0$ при $\Delta u\to 0$. Тогда $\Delta y = y'(u)\Delta u + a\Delta u$. Разделив обе части равенства на Δx, получим:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+a\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем: $y'(x) = f'(u)u'(x),$ так как $\lim\limits_{\Delta x\to 0} a = 0$.

Производная обратной функции.

Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=\varphi(y)$, которая в некоторой точке y имеет производную $\varphi'(y)\neq0$, то в соответствующей точке x функция $f(x)$ тоже имеет производную, причем $f'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$ (18.6)

Доказательство.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$. Так как $\varphi(y)$ непрерывна, $\Delta x\to0$ при $\Delta y\to0$, и при переходе к пределу при $\Delta y\to0$ получаем: $y'(x)=\dfrac{1}{x'(y)}=\dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Инвариантность формы дифференциала.

Найдем выражение для дифференциала сложной функции. Пусть $y=f(u)$, $u=\varphi(x)$, то есть $y=f(\varphi(x))$. Тогда $\dfrac{dy}{dx}=f'(u)\varphi'(x)$, следовательно, $dy=f'(u)\varphi'(x)dx$. Но $\varphi'(x)dx=du$, поэтому $dy=f'(u)du$. Таким образом, **форма дифференциала не зависит от того, является аргумент функции независимой переменной или функцией другого аргумента.** Это свойство называется свойством неизменности, или **инвариантности**, дифференциала.

Производные основных элементарных функций.

Используя полученные формулы и свойства производных, найдем производные основных элементарных функций.

1. Если $f(x)=C=$const, то $\Delta C=0$, поэтому $C'=0$.
2. $y=x^n$, где n – натуральное число. Тогда по формуле бинома Ньютона можно представить
$$\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}x^{n-2}(\Delta x)^2+\ldots+(\Delta x)^n-x^n=nx^{n-1}\Delta x+o(\Delta x)$$
Следовательно, $y'=nx^{n-1}$.
3. $y=\sin x$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x}=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos x=\cos x.$
4. $y=\cos x$, $y'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to0}2\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\sin(x+\Delta x)=-2\cdot\dfrac{1}{2}\sin x=-\sin x.$
5. $(tgx)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{\sin'x\cos x-\sin x\cos'x}{\cos^2x}=\dfrac{\sin^2x+\cos^2x}{\cos^2x}=\dfrac{1}{\cos^2x}.$
6. Аналогично можно получить формулу $(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2x}$.
7. $(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a$ (см. 2-е следствие из второго замечательного предела).

8. $(\ln x)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(x+\Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\ln(1+\frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} = \dfrac{1}{x}$ (см. 1-е следствие из второго замечательного предела).

9. $(shx)' = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \dfrac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = chx.$ Таким же образом можно найти производные остальных гиперболических функций.

10. По формуле производной обратной функции

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arccos x)' = (\frac{p}{2} - \arcsin x)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$(arcctgx)' = (\frac{p}{2} - arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

11. Если α – произвольное действительное число, то

$$(x^a)' = (e^{a\ln x})' = e^{a\ln x}(a\ln x)' = x^a \cdot a \cdot \frac{1}{x} = ax^{a-1}.$$

В результате получена **таблица основных производных**:

№	f(x)	f´(x)	№	f(x)	f´(x)
1	C	0	9	ctg$x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
2	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	10	sh$x$	ch$x$
3	a^x	$a^x \ln a$	11	ch$x$	sh$x$
4	e^x	e^x	12	th$x$	$\dfrac{1}{ch^2 x}$
5	ln$x$	$\dfrac{1}{x}$	13	cth$x$	$\dfrac{1}{sh^2 x}$
6	sin$x$	cos$x$	14	arcsin$x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7	cos$x$	-sin$x$	15	arccos$x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8	tg$x$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	16	arctg$x$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
			17	arcctg$x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$

Логарифмическое дифференцирование.

Иногда полезно использовать так называемую формулу логарифмического дифференцирования. Пусть *f(x)*>0 на некотором множестве значений аргумента и дифференцируема на этом множестве. Тогда по формуле производной сложной функции

$$(\ln f(x))' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x), \text{ откуда } f'(x)=f(x)(\ln f(x))'. \qquad (18.7)$$

Эту формулу удобно использовать в тех случаях, когда производную натурального логарифма данной функции найти проще, чем производную самой функции.

Примеры.

1. $(x^x)' = x^x(\ln x^x)' = x^x(x\ln x)' = x^x(\ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$

2.

$$\left(\frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\right)' = \frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\left(7\ln(2x+5) + \frac{1}{5}\ln(3x-7) - 8\ln(4x-1) - 7\ln\sin x\right)' =$$

$$= \frac{(2x+5)^7\sqrt[5]{3x-7}}{(4x-1)^8\sin^7 x}\left(\frac{14}{2x+5} + \frac{3}{5(3x-7)} - \frac{32}{4x-1} - 7ctgx\right)$$

Дифференцирование функций, заданных параметрически.

Если функция $y = f(x)$ задана в виде: $\begin{cases} x = j\ (t) \\ y = y\ (t) \end{cases}$, причем функция $\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Phi(x)$, то $y = \psi(\Phi(x))$, и $y'(x) = y\ '(t)\Phi'(x) = y\ '(t)\frac{1}{j\ '(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$. (18.7)

Полученная формула дает возможность находить производную функции, заданной параметрически, без определения непосредственной зависимости y от x.

Пример.

$x = a(1 - \cos t)$, $y = a(t - \sin t)$ – параметрические уравнения кривой, называемой циклоидой. Найдем $y'(x)$: $x'(t) = a\sin t$, $y'(t) = a(1\text{-}\cos t)$, $y'(x) = \frac{a(1-\cos t)}{a\sin t} = \frac{1-\cos t}{\sin t}$.