***Лекция 19.***
***Линеаризация диффе6ренциальных уравнений. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков. Однородные уравнения, свойства их решений. Свойства решений неоднородных уравнений.***

*Определение 19.1.* **Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка** называется уравнение, линейное относительно неизвестной функции и ее производных:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = j(x). \qquad (19.1)$$

Если $j(x) \equiv 0$, уравнение называется **линейным однородным**.

Если $a_0(x)$ не равно нулю ни в одной точке некоторого отрезка $[a,b]$, линейное однородное уравнение удобно записывать в форме

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (19.2)$$

или $$y^{(n)} = -\sum_{i=1}^{n} p_i(x)y^{(n-i)}. \qquad (19.2')$$

Замечание 1. Если коэффициенты $p_i(x)$ непрерывны на $[a,b]$, то в окрестности любых начальных значений при $x_0 \in [a,b]$ удовлетворяются условия теоремы суще6ствования и единственности.

Замечание 2. Линейность и однородность уравнения сохраняются при любом преобразовании $x = j(t)$, где $j(t)$ - $n$ раз дифференцируемая функция и $j'(t) \neq 0$ на $[a,b]$, так как $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{j'(t)}, \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\frac{1}{(j'(t))^2} - \frac{dy}{dt}\frac{j''(t)}{(j'(t))^3}$ и т.д., то есть производная любого порядка по $x$ является линейной однородной функцией производных по $t$.

Замечание 3. Линейность и однородность уравнения сохраняются также при линейном однородном преобразовании неизвестной функции $y(x) = \alpha(x)z(x)$.

*Определение 19.2.* Назовем **линейным дифференциальным оператором**

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \qquad (19.3)$$

результат применения к функции $y$ операций, задаваемых левой частью уравнения (19.2). При этом уравнение (19.2) можно записать в виде $L[y] = 0$.

Свойства линейного дифференциального оператора.

1) Постоянный множитель выносится за знак линейного оператора: $L[cy] = cL[y]$, так как $(cy)^{(i)} = cy^{(i)}$.
2) $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$.

Действительно, $(y_1 + y_2)^{(i)} = y_1^{(i)} + y_2^{(i)}$, откуда следует справедливость сформулированного свойства.

Следствие.

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} c_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} c_i L[y_i]. \qquad (19.4)$$

Используя свойства линейного оператора, можно указать некоторые свойства решений линейного однородного уравнения (19.2).

***Теорема 19.1.*** Если $y_1$ – решение уравнения (19.2), то и $cy_1$, где $c$ – произвольная постоянная, – тоже решение этого уравнения.

Доказательство. Если $L[y_1] = 0$, то по свойству 1) линейного оператора $L[cy_1] = 0$, что и требовалось доказать.

***Теорема 19.2.*** Сумма $y_1 + y_2$ решений уравнения (19.2) тоже является решением этого уравнения.
Доказательство. Так как $L[y_1] = 0$ и $L[y_2] = 0$, по свойству 2) линейного оператора $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0$, что доказывает утверждение теоремы.

Следствие теорем 19.1 и 19.2. Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{m} c_i y_i$ решений уравнения (19.2) $y_1, y_2,\ldots,y_m$ с произвольными постоянными коэффициентами тоже является решением этого уравнения.

Если рассматривается линейное неоднородное уравнение (19.1), которое при $a_0(x) \neq 0$ можно записать в виде

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \qquad (19.5)$$

или $L[y] = f(x)$, то при непрерывности функций $p_i(x)$ и $f(x)$ оно имеет единственное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям (18.3).
Из свойств линейного оператора следуют свойства решений неоднородного линейного уравнения:

1) Сумма $\tilde{y} + y_1$ решения $\tilde{y}$ неоднородного уравнения (19.5) и решения $y_1$ соответствующего однородного уравнения (19.2) является решением неоднородного уравнения (19.5).
   Доказательство. $L[\tilde{y} + y_1] = L[\tilde{y}] + L[y_1] = f(x) + 0 = f(x)$.
2) Если $y_i$ – решение уравнения $L[y] = f_i(x)$, то $y = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i$ является решением уравнения $L[y] = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x)$, где $\alpha_i$ – постоянные (принцип **суперпозиции** или наложения).
   Доказательство.

$$L\left[\sum_{i=1}^{m} a_i y_i\right] = \sum_{i=1}^{m} L[a_i y_i] = \sum_{i=1}^{m} a_i L[y_i] = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x),$$ что и требовалось доказать.

***Лекция 20.***
***Линейная зависимость и независимость системы функций. Определитель Вронского, его свойства. Фундаментальная система решений однородного линейного дифференциального уравнения. Общее решение однородного уравнения.***

*Определение 20.1.* Функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на некотором отрезке $[a,b]$, если существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2,\ldots, \alpha_n$, хотя бы одно из которых не равно нулю, что

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0 \qquad (20.1)$$

на рассматриваемом отрезке. Если же равенство (20.1) справедливо только при всех $\alpha_i=0$, функции $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ называются **линейно независимыми** на отрезке $[a,b]$.
Примеры.

1. Функции $1, x, x^2, \ldots, x^n$ линейно независимы на любом отрезке, так как равенство
   $\alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \ldots + \alpha_{n+1} x^n = 0$
   справедливо только при всех $\alpha_i = 0$. Иначе в левой части равенства стоял бы многочлен степени не выше $n$, который может обращаться в нуль не более, чем в $n$ точках рассматриваемого отрезка.

2. Линейно независимой на любом отрезке является система функций $e^{k_1x}, e^{k_2x}, ..., e^{k_nx}$. Если предположить, что эта система линейно зависима, то существуют такие числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (пусть для определенности $a_n \neq 0$), что $a_1e^{k_1x} + a_2e^{k_2x} + ... + a_ne^{k_nx} = 0$. Разделим полученное равенство на $e^{k_1x}$ и продифференцируем: $a_2(k_2 - k_1)e^{(k_2-k_1)x} + ... + a_n(k_n - k_1)e^{(k_n-k_1)x} = 0$. Проделав эту операцию $n$-1 раз, придем к равенству $a_n(k_2 - k_1)(k_3 - k_2)...(k_n - k_{n-1})e^{(k_n-k_{n-1})x} = 0$, что невозможно, так как по предположению $a_n \neq 0, k_i \neq k_j, e^{(k_n-k_{n-1})x} \neq 0$.
3. Подобным образом можно доказать линейную независимость системы функций
$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, ..., x^{n_1}e^{k_1x}$,
$e^{k_2x}, xe^{k_2x}, ..., x^{n_2}e^{k_2x}$,
............................
$e^{k_px}, xe^{k_px}, ..., x^{n_p}e^{k_px}$.

*Определение 20.2.* Определитель вида

$$W(x) = W[y_1, y_2, ..., y_n] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' \\ ... & ... & ... & ... \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \qquad (20.2)$$

называется **определителем Вронского** системы функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

***Теорема 20.1.*** Если функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы на отрезке $[a,b]$, то их определитель Вронского на этом отрезке тождественно равен нулю.
Доказательство.
Дифференцируя $n$-1 раз тождество $\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ldots + \alpha_ny_n = 0$, где не все $\alpha_i = 0$, получим линейную однородную систему относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{cases} a_1y_1 + a_2y_2 + ... + a_ny_n = 0, \\ a_1y_1' + a_2y_2' + ... + a_ny_n' = 0, \\ ........................................... \\ a_1y_1^{(n-1)} + a_2y_2^{(n-1)} + ... + a_ny_n^{(n-1)} = 0, \end{cases}$$

которая по условию должна иметь нетривиальное решение при любом $x$ из отрезка $[a,b]$, а это возможно только в том случае, если главный определитель этой системы (см. правило Крамера) равен нулю. Поскольку этот главный определитель является определителем Вронского для выбранной системы функций, теорема доказана.

***Теорема 20.2.*** Если линейно независимые функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются решениями линейного однородного уравнения (19.2) с непрерывными на отрезке $[a,b]$ коэффициентами, то определитель Вронского для этих функций не может обратиться в нуль ни в одной точке отрезка $[a,b]$.
Доказательство.
Пусть $\exists x_0 \in [a,b] : W(x_0) = 0.$ Выберем числа $a_1, a_2, ..., a_n$, не все равные нулю, так, чтобы удовлетворялась система уравнений

$$\begin{cases} a_1 y_1(x_0) + a_2 y_2(x_0) + \ldots + a_n y_n(x_0) = 0, \\ a_1 y_1'(x_0) + a_2 y_2'(x_0) + \ldots + a_n y_n'(x_0) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + a_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + a_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0. \end{cases} \qquad (20.3)$$

(Определитель этой системы, неизвестными в которой считаем $a_i$, равен $W(x_0)$ и, следовательно, равен нулю, поэтому система имеет ненулевое решение). Тогда по условию теоремы $y = a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x)$ - решение уравнения (19.2) с нулевыми начальными условиями $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, что следует из системы (20.3). Очевидно, что этим условиям удовлетворяет нулевое решение:

$$a_1 y_1(x) + a_2 y_2(x) + \ldots + a_n y_n(x) \equiv 0, \qquad (20.4)$$

а по теореме существования и единственности это решение единственно. Но при этом из равенства (20.4) следует, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, что противоречит условиям теоремы. Следовательно, $W(x) \neq 0$ ни в одной точке отрезка $[a,b]$.

Замечание. В теореме 20.2 важно, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – решения уравнения (19.2). Для произвольной системы функций утверждение теоремы не справедливо.

***Теорема 20.3.*** Общим решением на $[a,b]$ уравнения (19.2) с непрерывными коэффициентами $p_i$ является линейная комбинация $y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i$ (20.5)

$n$ линейно независимых на $[a,b]$ частных решений $y_i$ с произвольными постоянными коэффициентами.

Доказательство. Для доказательства теоремы с учетом теоремы существования и единственности достаточно показать, что можно подобрать постоянные $c_i$ так, чтобы удовлетворялись произвольно заданные начальные условия:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \qquad (20.6)$$

где $x_0$ – произвольная точка отрезка $[a,b]$.

Подставив в равенства (20.6) выражение для $y$ вида (20.5), получим линейную систему из $n$ уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) = y_0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) = y_0', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases},$$

определителем которой является определитель Вронского для выбранных $n$ линейно независимых решений рассматриваемого уравнения, который по теореме 20.2 не равен нулю. Следовательно, по правилу Крамера система имеет решение при любых правых частях. Теорема доказана.

Следствие. Максимальное число линейно независимых решений однородного уравнения (19.2) равно его порядку.

*Определение 20.3.* Любые $n$ линейно независимых решений однородного линейного уравнения (19.2) называются его **фундаментальной системой решений**.

Таким образом, общее решение уравнения (19.2) является линейной комбинацией любой его фундаментальной системы решений.

***Лекция 21.***
***Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Построение фундаментальной системы решений. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения. Частное и общее решения.***

Определим вид частных решений однородного линейного уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = 0, \qquad (21.1)$$

в котором коэффициенты $a_i$ постоянны. Можно показать, что они имеют вид $y = e^{kx}$, где $k$ – постоянная. Действительно, при этом $y^{(p)} = k^p e^{kx}$, и после подстановки в уравнение (21.1) получаем:

$$a_0 k^n e^{kx} + a_1 k^{n-1} e^{kx} + ... + a_n e^{kx} = 0,$$

или, после сокращения на $e^{kx}$,

$$a_0 k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_{n-1} k + a_n = 0 \text{ -} \qquad (21.2)$$

так называемое **характеристическое уравнение** для уравнения (21.1). Числа $k$, являющиеся его решениями, при подстановке в функцию $y = e^{kx}$ дают частные решения уравнения (21.1). Исследуем различные возможности количества и вида решений характеристического уравнения.

1. Все корни уравнения (21.2) действительны и различны: $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Тогда они задают максимально возможное количество линейно независимых решений уравнения (21.1) (их линейная независимость показана в примере 2 лекции 20), то есть определяют фундаментальную систему решений. Следовательно, в этом случае общее решение уравнения (21.1) может быть записано в виде:
   $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + ... + c_n e^{k_n x}$.
   Пример.
   Общее решение уравнения $y^{(5)} - 5y''' + 4y' = 0$ можно найти, решив характеристическое уравнение $k^5 - 5k^3 + 4k = 0$. Разложим левую часть на множители: $k(k^2 - 4)(k^2 - 1) = 0$. Следовательно, корни характеристического уравнения: $k_1 = 0, k_2 = -2, k_3 = 2, k_4 = -1, k_5 = 1$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид: $y = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-x} + c_5 e^{x}$.
2. Корни уравнения (21.2) различны, среди них есть комплексные. При этом, как было показано ранее, они образуют пары комплексно сопряженных чисел. При этом решения уравнения (21.1), соответствующие паре комплексно сопряженных решений уравнения (21.2) $k_1 = a + bi$ и $k_2 = a - bi$, имеют вид $e^{(a+bi)x}$ и $e^{(a-bi)x}$ и могут быть заменены двумя действительными решениями: действительной и мнимой частями указанных решений. Следовательно, так как $e^{(a+bi)x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$, решениями уравнения (21.1) будут $e^{ax}\cos bx$ и $e^{ax}\sin bx$.
   Пример.
   $y'' - 6y' + 10 = 0, k^2 - 6k + 10 = 0, k_{1,2} = 3 \pm i, y_1 = e^{3x}\cos x, y_2 = e^{3x}\sin x,$
   $y = e^{3x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$
3. Характеристическое уравнение имеет кратные корни. В этом случае число линейно независимых решений предыдущих типов меньше $n$, и для получения фундаментальной системы нужно найти дополнительные решения иного вида. Докажем, что при наличии у характеристического уравнения корня $k_i$ кратности $\alpha_i$ такими решениями будут $xe^{k_i x}, x^2 e^{k_i x}, ..., x^{\alpha_i - 1} e^{k_i x}$. Предположим вначале, что выбранный кратный корень $k_i = 0$. Тогда характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-a_i}k^{a_i} = 0,$$
а соответствующее дифференциальное уравнение:
$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-a_i}y^{(a_i)} = 0.$$
Очевидно, что частными решениями такого уравнения будут функции $1, x, x^2, \ldots, x^{a_i - 1}$, все производные которых порядка $\alpha_i$ и выше равны нулю. Кстати, линейная независимость такой системы функций показана в примере 1 лекции 20.
Пусть теперь корень характеристического уравнения $k_i$ кратности $\alpha_i$ не равен нулю. Сделаем замену переменной: $y = e^{k_i x}z$, тогда при подстановке в дифференциальное уравнение его линейность и однородность не нарушается, а коэффициенты изменяются, но по-прежнему остаются постоянными:
$$b_0z^{(n)} + b_1z^{(n-1)} + \ldots + b_nz = 0.$$
При этом корни характеристического уравнения
$$b_0p^n + b_1p^{n-1} + \ldots + b_np = 0 \qquad (21.3)$$
отличаются от корней уравнения
$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + \ldots + a_{n-1}k + a_n = 0$$
на слагаемое $-k_i$, так как при $z = e^{px}$ $\quad y = e^{k_i x}z = e^{(k_i + p)x}$, то есть $k = k_i + p$.
Следовательно, уравнение (21.3) имеет корень $p = 0$ кратности $\alpha_i$, которому соответствуют линейно независимые частные решения $z = 1, z = x, \ldots, z = x^{a_i - 1}$. При обратной замене получаем набор линейно независимых решений исходного уравнения: $y = e^{k_i x}, y = xe^{k_i x}, \ldots, y = x^{a_i - 1}e^{k_i x}$. (21.4)
Таким образом, каждый кратный корень уравнения (21.2) задает серию линейно независимых частных решений уравнения (21.1), количество которых равно его кратности. Следовательно, вновь построена фундаментальная система решений.
Замечание. Кратные комплексно сопряженные корни задают частные решения вида $x^ie^{ax}\cos bx, x^ie^{ax}\sin bx$.
Примеры.
1. Характеристическое уравнение для уравнения $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ имеет вид $(k + 1)^3 = 0$, то есть $k = -1$ – корень кратности 3. Следовательно, фундаментальная система решений состоит из функций $e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}$, а общее решение можно записать в виде $y = (c_1 + c_2x + c_3x^2)e^{-x}$.
2. Для уравнения $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$ характеристическим уравнением является $k^4 + 8k^2 + 16 = 0$, то есть $(k^2+4)^2 = 0$. Следовательно, $k = \pm 2i$ - корни кратности 2. Тогда общим решением исходного дифференциального уравнения является
$$y = (c_1 + c_2x)\cos 2x + (c_3 + c_4x)\sin 2x.$$

## Линейные неоднородные уравнения.

Ранее было показано (см. лекцию 19), что сумма решений линейного неоднородного уравнения $L[y] = f(x)$ и соответствующего однородного уравнения $L[y] = 0$ является решением неоднородного уравнения. Используя это свойство, можно доказать следующую теорему:
***Теорема 21.1.*** Общее решение на отрезке $[a,b]$ уравнения $L[y] = f(x)$ с непрерывными на $[a,b]$ коэффициентами $p_i(x)$ и правой частью $f(x)$ равно сумме общего решения $\sum_{i=1}^{n} c_iy_i$ соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения неоднородного уравнения.

Доказательство.

Требуется доказать, что для любых начальных условий $y^{(k)}(x_0) = y_0^{(k)}, k = 0,1,\ldots, n-1$, можно подобрать такие значения постоянных $c_i$, чтобы функция

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i + \tilde{y}, \qquad (21.5)$$

где $y_i$ – линейно независимые частные решения однородного уравнения $L[y] = 0$, а $\tilde{y}$ - частное решение рассматриваемого неоднородного уравнения, была решением этого неоднородного уравнения с заданными начальными условиями. Это требование приводит нас к системе уравнений относительно неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} c_i y_i(x_0) + \tilde{y}(x_0) = y_0, \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i'(x_0) + \tilde{y}'(x_0) = y_0', \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i''(x_0) + \tilde{y}''(x_0) = y_0'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} c_i y_i^{(n-1)}(x_0) + \tilde{y}^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}, \qquad (21.6)$$

главным определителем которой является определитель Вронского $W[y_1, y_2, \ldots, y_n]$, как известно, не равный нулю. Поэтому система (21.6) имеет единственное решение, что и доказывает утверждение теоремы.

Замечание. Таким образом, при найденном общем решении однородного уравнения решение неоднородного уравнения сводится к подбору его частного решения.

## *Лекция 22.*
## *Методы нахождения частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения (метод вариации произвольных постоянных, метод неопределенных коэффициентов и принцип суперпозиции).*

Распространим метод вариации произвольных постоянных, рассмотренный в лекции 19 для решения линейного уравнения первого порядка, на линейные уравнения высших порядков. Будем искать решение неоднородного уравнения в виде $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$. При этом требуется найти $n$ неизвестных функций $c_1(x), c_2(x), \ldots, c_n(x)$, которые удовлетворяли бы только одному уравнению

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y = f(x). \qquad (22.1)$$

Поэтому можно дополнительно потребовать, чтобы искомые функции удовлетворяли еще каким-нибудь $n$-1 уравнениям, выбранным так, чтобы производные функции $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$ имели по возможности такой же вид, как при постоянных $c_i$. Первая производная решения имеет вид: $y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x)$. Потребуем, чтобы вторая сумма в этом выражении равнялась нулю: $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i(x) = 0$, тогда $y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'(x)$. Зададим такое же условие для второй производной:

$y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x)$, $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i'(x) = 0$, $y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i''(x)$. Продолжая вычислять производные функции $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$ до порядка $n-1$ включительно и требуя каждый раз, чтобы $\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(k)}(x) = 0$, получим:

$$\begin{cases} y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i \\ y' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i' \\ y'' = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n-1)} \\ y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} \end{cases} \qquad (22.2)$$

( в последнем равенстве уже нельзя потребовать, чтобы вторая сумма равнялась нулю, так как на искомые функции уже наложено $n-1$ условие, а последним требованием является то, что эти функции должны удовлетворять уравнению (22.1)). Подставив $y = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) y_i$ с учетом (22.2) в (22.1), получим:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i'(x) y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i (y_i^{(n)} + p_1(x) y_i^{(n-1)} + \ldots + p_n(x) y_i) = f(x),$$

но $y_i$ – частные решения однородного уравнения, следовательно, все слагаемые второй суммы равны нулю и уравнение сводится к следующему: $\sum_{i=1}^{n} c_i' y_i^{(n-1)} = f(x)$. (22.3)

Добавив его к первым $n-1$ уравнениям системы (22.2), получим систему из $n$ уравнений для определения $c_1'$, $c_2'$,…, $c_n'$, определитель которой является определителем Вронского для функций $y_1$, $y_2$,…, $y_n$ и, следовательно, не равен нулю. Следовательно, из этой системы можно единственным образом найти производные искомых функций, а затем с помощью интегрирования и сами функции $c_1$, $c_2$,…, $c_n$.

Пример.

$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. Найдем решение однородного уравнения, для чего составим характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$, $k_1 = k_2 = 1$. Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид $y = (c_1 + c_2 x)e^x$, то есть фундаментальную систему решений составляют функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = xe^x$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде $y = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$. Составим систему (22.2):

$$\begin{cases} c_1'e^x + c_2'xe^x = 0 \\ c_1'e^x + c_2'(1+x)e^x = \frac{e^x}{x} \end{cases}, \text{ откуда } \begin{cases} c_1' + c_2'x = 0 \\ c_1' + c_2'(1+x) = \frac{1}{x} \end{cases}, \quad c_2' = \frac{1}{x}, c_2 = \ln|x| + C_2,$$

$c_1' = -1, c_1 = -x + C_1$, где $C_1$ и $C_2$ – произвольные постоянные. Таким образом, найдено общее решение исходного уравнения: $y = e^x(x\ln|x| - x + C_1x + C_2)$.

**Подбор частного решения для неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами.**

Для некоторых видов правой части линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (22.4)$$

можно подобрать частное решение в виде функции с неопределенными коэффициентами, которые определяются путем подстановки этой функции в уравнение (22.4).

1. $f(x) = A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_s$ ($a_n \neq 0$). При этом существует частное решение уравнения (22.4), имеющее такой же вид: $y = B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s$. Действительно, подставив эту функцию в уравнение (22.4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях $x$, получим разрешимую единственным образом систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_n B_0 = A_0 \\ a_n B_1 + s a_{n-1} B_0 = A_1 \\ a_n B_2 + (s-1) a_{n-1} B_1 + s(s-1) a_{n-2} B_0 = A_2 \\ .................................................... \\ a_n B_s + ... = A_s \end{cases}.$$

   Пример.
   $y'' + 3y' + 2y = 3x - 5$. Будем искать частное решение в виде $y = Ax + B$, тогда $y' = A, y'' = 0$, и после подстановки в уравнение получим: $3A + 2Ax + 2B = 3x - 5$. Тогда $2A = 3$, $3A + 2B =$ $= -5$. Следовательно, $A = \frac{3}{2}, B = -\frac{19}{4}$, и общее решение уравнения можно записать в виде:
   $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{3}{2} x - \frac{19}{4}$.

2. Если $a_n = a_{n-1} = ... = a_{n-a+1} = 0, a_{n-a} \neq 0$ (то есть $k = 0$ является α – кратным корнем характеристического уравнения), то частное решение имеет вид:
   $y = x^a (B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)$. Легко убедиться, что функция подобного вида является решением уравнения (22.4) при поставленных условиях.
   Пример.
   $y''' - 3y'' = 2x^2 + 5$. Пусть $y_{частн} = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$,
   $y' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, y'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, y''' = 24Ax + 6B$. Подставляя в уравнение, получим: $24Ax + 6B - 36Ax^2 - 18Bx - 6C = 2x^2 + 5$, откуда $-36A = 2$, $24A - 18B = 0$, $6B - 6C$ $= 5$. Решая эту систему, получаем $A = -\frac{1}{18}, B = -\frac{2}{27}, C = -\frac{49}{54}$. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид: $y = c_1 + c_2 x + c_3 e^{3x} - \frac{1}{18} x^4 - \frac{2}{27} x^3 - \frac{49}{54} x^2$.

3. $f(x) = e^{px}(A_0 x^s + A_1 x^{s-1} + ... + A_s)$. Если число $p$ при этом не является корнем характеристического уравнения, можно задать частное решение в виде:
   $y = e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)$. Если же $p$ – корень характеристического уравнения кратности α, частное решение имеет вид: $y = x^a e^{px}(B_0 x^s + B_1 x^{s-1} + ... + B_s)$. В обоих случаях с помощью подстановки в исходное уравнение можно убедиться, что выбранные функции являются его решениями.
   Пример 1.
   $y'' + y' - 2y = xe^{-x}$. Найдя корни характеристического уравнения $k^2 + k - 2 = 0$: $k_1 = 1$, $k_2 = -2$, видим, что $p = -1$ не является корнем этого уравнения. Поэтому будем искать частное решение в форме $y = e^{-x}(Ax + B)$. При этом $y' = e^{-x}(-Ax - B + A), y'' = e^{-x}(Ax - 2A + B)$.

Подставляя в уравнение, получаем: $e^{-x}(-2Ax - A - 2B) = xe^{-x}$, откуда $-2A = 1$, $-A - 2B = 0$, то есть $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{4}$. Итак, общее решение уравнения: $y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + \frac{e^{-x}}{4}(1-2x)$.

Пример 2.

$y'' - 2y' + y = 2e^x$. Здесь $p = 1$ – корень характеристического уравнения кратности 2, поэтому частное решение имеет вид $y = Ax^2 e^x, y' = Ae^x(x^2 + 2x), y'' = Ae^x(x^2 + 4x + 2)$. Подстановка в уравнение дает $2Ae^x = 2e^x$, откуда $A = 1$, а общее решение: $y = (c_1 + c_2 x + x^2)e^x$.

4. В аналогичной форме задаются частные решения в случае, когда правая часть уравнения (22.1) имеет вид $f(x) = e^{px}(P(x)\cos qx + Q(x)\sin qx)$, где $P$ и $Q$ – некоторые многочлены:
   а) если $p \pm qi$ - не корни характеристического уравнения, то можно подобрать частное решение в виде $y = e^{px}(\tilde{P}_m(x)\cos qx + \tilde{Q}_m(x)\sin qx)$, где $\tilde{P}_m(x)$ и $\tilde{Q}_m(x)$ - многочлены с неопределенными коэффициентами, степень $m$ которых есть старшая из степеней многочленов $P$ и $Q$.
   б) если $p \pm qi$ - корни характеристического уравнения кратности α, то
   $$y = x^a e^{px}(\tilde{P}_m(x)\cos qx + \tilde{Q}_m(x)\sin qx).$$
   Пример.
   $y^{(4)} + 2y'' + y = x\cos x$. При этом $\pm i$ - корни характеристического уравнения кратности 2, поэтому следует искать частное решение в виде: $y = x^2((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$.
5. Если правая часть уравнения (22.1) представляет собой сумму функций, рассмотренных в предыдущих пунктах, то по принципу суперпозиции частное решение будет задаваться как сумма решений, соответствующих каждому из слагаемых правой части.
   Пример.
   Для уравнения $y''' - 4y'' + y' - 4 = x^3 e^x + \sin x$ частное решение ищем в виде:
   $$y = (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)e^x + x(E\cos x + F\sin x).$$

***Лекция 23.***
***Системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами, методы их решения.***

*Определение 23.1.* Система дифференциальных уравнений называется **линейной**, если она линейна относительно всех неизвестных функций и их производных.

В частности, система линейных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + f_i(t), i = 1,2,...,n. \qquad (23.1)$$

Можно использовать матричную запись такой системы, если ввести матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \dots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}$$

. Тогда системе (23.1) эквивалентно матричное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = AX + F. \qquad (23.2)$$

Если же рассмотреть линейный оператор $L[X]=\frac{dX}{dt}-AX$, уравнение (23.2) примет вид:

$$L[X]=F. \qquad (23.3)$$

Так как оператор $L$ обладает свойствами линейности:

1) $L[cX] = cL[X]$;
2) $L[X_1 + X_2] = L[X_1] + L[X_2]$,

то для решений линейной однородной системы (23.3) (при $F = 0$) справедливы те же свойства: если $X_1$ и $X_2$ – решения однородного уравнения (23.3) , то и их линейная комбинация будет решением того же уравнения.

Можно ввести понятие линейной зависимости решений $X_1, X_2,\dots, X_n$:

*Определение 23.2.* Векторы (столбцы) $X_1, X_2,\dots, X_n$ , где

$X_i=\begin{pmatrix} x_{1i}(t) \\ x_{2i}(t) \\ \dots \\ x_{ni}(t) \end{pmatrix}$, называются **линейно зависимыми** при $a\le t\le b$, если существуют числа $\alpha_1,\alpha_2,\dots, \alpha_n$, не все равные нулю, что

$$\alpha_1X_1 + \alpha_2X_2 +\dots+ \alpha_nX_n \equiv 0 \qquad (23.4)$$

при $a\le t\le b$. Если же тождество (23.4) справедливо только при всех $\alpha_i = 0$, векторы называются **линейно независимыми**.

Замечание. Назовем **определителем Вронского** для уравнения (23.4) определитель вида

$$W=\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}, \qquad (23.5)$$

являющийся определителем системы уравнений, получаемых при координатной записи равенства (23.4). Можно показать, что так же, как и в случае решения линейного однородного уравнения, при $W = 0$ решения $X_1, X_2,\dots, X_n$ линейно зависимы на $[a,b]$. Тогда справедлива следующая теорема:

***Теорема 23.1.*** Линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ $n$ линейно независимых решений линейной однородной системы является общим решением этой системы.

Будем искать фундаментальную систему решений линейной однородной системы с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt}=a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (23.6)$$

в виде: $x_1=a_1e^{kt}, x_2=a_2e^{kt},\dots, x_n=a_ne^{kt}$, (23.7)

где $\alpha_i$ – постоянные. Подставив (23.7) в (23.6) и сократив на $e^{kt}$, получим:

$$\begin{cases}(a_{11}-k)a_1+a_{12}a_2+\ldots+a_{1n}a_n=0\\ a_{21}a_1+(a_{22}-k)a_2+\ldots+a_{2n}a_n=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{n1}a_1+a_{n2}a_2+\ldots+(a_{nn}-k)a_n=0\end{cases}. \qquad (23.8)$$

Для того, чтобы эта система имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ее главный определитель был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}=0, \qquad (23.9)$$

что представляет собой уравнение $n$ – й степени относительно $k$, называемое **характеристическим**.

Если все корни характеристического уравнения различны, то, подставляя их последовательно в систему (23.8), можно найти соответствующие им значения $a_j^{(i)}$ и тем самым $n$ различных решений системы (23.6). Эти решения линейно независимы. Действительно, если бы существовали числа $\beta_1, \beta_2,\ldots, \beta_n$ такие, что

$$\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n} b_i a_1^{(i)} e^{k_i t}=0\\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i a_2^{(i)} e^{k_i t}=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum\limits_{i=1}^{n} b_i a_n^{(i)} e^{k_i t}=0\end{cases},$$ то в силу линейной независимости функций $e^{k_i t}$ отсюда

следовало бы, что $\begin{cases} b_i a_1^{(i)}=0\\ b_i a_2^{(i)}=0\\ \ldots\ldots\ldots\\ b_i a_n^{(i)}=0\end{cases}$ для каждого $i$. Но поскольку хотя бы одно из $a_1^{(i)}, a_2^{(i)},\ldots, a_n^{(i)}$ не равно нулю, получаем, что все $b_i=0$. Следовательно, найденные решения (23.7) линейно независимы, и общее решение системы имеет вид: $x_j=\sum\limits_{i=1}^{n} c_i a_j^{(i)} e^{k_i t}$, (23.10)

где $c_i$ – произвольные постоянные.

Пример.

$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=3x+4y\end{cases}$. Составим характеристическое уравнение: $\begin{vmatrix}2-k & 1\\ 3 & 4-k\end{vmatrix}=0, k^2-6k+5=0,$

$k_1$ = 1, $k_2$ =5. Для $k$ = 1 получаем систему для определения $a_{1,2}^{(1)}$ : $\begin{cases} a_1^{(1)}+a_2^{(1)}=0\\ 3a_1^{(1)}+3a_2^{(1)}=0\end{cases}$, то есть $a_2^{(1)}=-a_1^{(1)}$. Примем $a_2^{(1)}=-1, a_1^{(1)}=1$, тогда $x^{(1)}=e^t, y^{(1)}=-e^t$. При $k$ = 5 $-3a_1^{(2)}+a_2^{(2)}=0$, $a_2^{(2)}=3a_1^{(2)}$. Тогда $x^{(2)}=e^{5t}, y^{(2)}=3e^{5t}$. Следовательно, общее решение системы имеет вид: $x=c_1e^t+c_2e^{5t}, y=-c_1e^t+3c_2e^{5t}$.

В случае кратных корней характеристического уравнения решение системы (23.6) имеет вид

$X(t)=(\tilde{A}_0^{(s)}+\tilde{A}_1^{(s)}t+...+\tilde{A}_{g-1}^{(s)}t^{g-1})e^{k_s t}$, где γ – кратность корня $k_s$.

Пример.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=2x+y\\ \dfrac{dy}{dt}=4y-x\end{cases}$$ . Характеристическое уравнение имеет вид: $\begin{vmatrix}2-k & 1\\ -1 & 4-k\end{vmatrix}=0, k^2-6k+9=0,$

$k_1=k_2=3$. Пусть $x=(c_1+c_2t)e^{3t}$, $y=(c_3+c_4t)e^{3t}$. Выразим постоянные $c_3$ и $c_4$ через $c_1$ и $c_2$. Для этого подставим найденные решения в одно из уравнений системы и приравняем коэффициенты при $e^{3t}$ и $te^{3t}$: $(3c_1+c_2+3c_2t)e^{3t}=(2c_1+c_3)e^{3t}+(2c_2+c_4)te^{3t}$, $c_3=c_1+c_2$, $c_4=c_2$. Итак, общее решение системы получено в форме: $x=(c_1+c_2t)e^{3t}$, $y=(c_1+c_2+c_2t)e^{3t}$.

Замечание. Для неоднородной системы (23.1) общим решением, так же как для неоднородного уравнения, будет сумма общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы. При подборе частных решений справедлив принцип суперпозиции.

Пример.

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=3x+2y+4e^{5t}\\ \dfrac{dy}{dt}=x+2y\end{cases}$$ . Найдем частное решение в виде: $x=Ae^{5t}, y=Be^{5t}$. При подстановке

получим: $\begin{cases}5A=3A+2B+4\\ 5B=A+2B\end{cases}$, откуда $A=3$, $B=1$. Прибавив к полученному частному решению общее решение соответствующей однородной системы, запишем общее решение исходной системы: $x=c_1e^t+2c_2e^{4t}+3e^{5t}$, $y=-c_1e^t+c_2e^{4t}+e^{5t}$.

### *Лекция 24.*

### ***Устойчивость решений дифференциальных уравнений и их систем. Определение устойчивости по Ляпунову и асимптотической устойчивости. Автономные системы дифференциальных уравнений. Фазовое пространство (плоскость), фазовая траектория. Точки покоя. Классификация точек покоя системы двух однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Условия устойчивости точки покоя.***

Поскольку при решении реальных задач с помощью дифференциальных уравнений начальные условия обычно являются результатами измерений и, следовательно, получены с некоторой погрешностью, очень важным является вопрос о том, как изменится решение уравнения при малом изменении начальных условий. В частности, если такие изменения существенно меняют решение, то подобное решение, очевидно, не имеет практической ценности.

Пусть некоторое явление описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_i}{dt}=\Phi_i(t,y_1,y_2,...,y_n), i=1,2,...,n \qquad (24.1)$$

с начальными условиями $y_i(t_0)=y_{i0}$.

*Определение 24.1.* Решение $\varphi_i(t)$ ($\check{\imath}=1,2,\ldots,n$) называется **устойчивым по Ляпунову**, если

$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0$ такое, что для всякого решения $y_i\,(t)$ той же системы, начальные условия которого удовлетворяют неравенствам $|\,y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)\,| < \delta(\varepsilon)$, для всех $t \ge t_0$ справедливы неравенства

$$|\,y_i(t) - \varphi_i(t)\,| < \varepsilon \qquad (24.2)$$

(то есть близкие по значениям решения остаются близкими для всех $t \ge t_0$).
Если хотя бы для одного решения $y_i\,(t)$ неравенства (24.2) не выполняются, решение $\varphi_i\,(t)$ называется **неустойчивым**.
Если решение $\varphi_i\,(t)$ не только устойчиво по Ляпунову, но и удовлетворяет условию

$$\lim_{t\to\infty} |\,y_i(t) - \varphi_i(t)\,| = 0 \qquad (24.3)$$

при $|\,y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)\,| < \delta_1, \delta_1 > 0$, то это решение называется **асимптотически устойчивым**.
Замечание. Одно условие (24.3) не обеспечивает устойчивость решения.

## Фазовая плоскость.

Дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, \frac{dy}{dt}) \qquad (24.4)$$

равносильно системе уравнений первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}, \frac{d\dot{y}}{dt} = f(t, y, \dot{y}) \ . \qquad (24.5)$$

Геометрически общее решение уравнения (24.4) или системы (24.5) можно представить семейством **фазовых траекторий** на **фазовой плоскости** $Oy\dot{y}$**.** Особенно удобно такое представление в случае, когда функция $f(t, y, \dot{y})$ не содержит явным образом независимого переменного *t*. Тогда система (24.5) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = P(y, \dot{y}), \frac{d\dot{y}}{dt} = Q(y, \dot{y}) \qquad (24.6)$$

и называется **автономной системой**. Фазовые траектории в этом случае удовлетворяют дифференциальному уравнению первого порядка

$$\frac{d\dot{y}}{dy} = \frac{Q(y, \dot{y})}{P(y, \dot{y})}\,, \qquad (24.7)$$

которое каждой точке ставит в соответствие наклон проходящей через нее интегральной кривой.

## Точки покоя.

*Определение 24.2.* Точка $(y, \dot{y})$ фазовой плоскости системы (24.6) называется **обыкновенной точкой**, если $P(y, \dot{y})$ и $Q(y, \dot{y})$ дифференцируемы и не обращаются одновременно в нуль; через каждую обыкновенную точку проходит одна фазовая траектория. Точка $(y_0, \dot{y}_0)$ называется **особой точкой**, если $P(y_0, \dot{y}_0) = 0$ и $Q(y_0, \dot{y}_0) = 0$.
Замечание. Особые точки классифицируются по характеру фазовых траекторий в их окрестности.

Исследование на устойчивость некоторого решения $y_i = \bar{y}_i(t) \quad (i = 1,2,...,n)$ системы (24.1) можно свести к исследованию тривиального решения – **точки покоя**, расположенной в начале координат, преобразуя систему к новым переменным: $x_i = y_i - \bar{y}_i(t)$ - отклонениям прежних неизвестных от решения, исследуемого на устойчивость. В новых переменных система (24.1) принимает вид:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{d\bar{y}_i}{dt} + \Phi_i(t, x_1 + \bar{y}_1(t), x_2 + \bar{y}_1(t), ..., x_n + \bar{y}_n(t)), \quad i = 1,2,...,n. \qquad (24.8)$$

Простейшие типы точек покоя.

Исследуем расположение траекторий в окрестности точки покоя $x = 0$, $y = 0$ системы двух линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}, \text{ где } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (24.9)$$

Характеристическое уравнение при этом имеет вид:

$$k^2 - (a_{11} + a_{22})k + (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = 0.$$

Рассмотрим различные наборы корней этого уравнения:

1) $k_1$ и $k_2$ действительны и различны. Тогда общее решение системы (24.9) можно задать так: $\begin{cases} x = c_1 a_1 e^{k_1 t} + c_2 b_1 e^{k_2 t} \\ y = c_1 a_2 e^{k_1 t} + c_2 b_2 e^{k_2 t} \end{cases}$. При этом возможны следующие случаи:

а) если $k_1 < 0$ и $k_2 < 0$, то точка покоя асимптотически устойчива, так как $\lim\limits_{t\to\infty} e^{k_{1,2}t} = 0$, и все точки, находящиеся в начальный момент $t = t_0$ в любой δ – окрестности начала координат, при достаточно большом $t$ переходят в точки, лежащие в сколь угодно малой ε – окрестности начала координат, а при $t \to \infty$ стремятся к началу координат. Такая точка покоя называется **устойчивым узлом**.

б) если $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, можно свести исследование к предыдущему случаю заменой $t$ на $-t$. При этом фазовые траектории имеют такой же вид, но направление движения меняется на противоположное, то есть при увеличении $t$ точка удаляется от начала координат, поэтому подобная точка покоя – **неустойчивый узел** – неустойчива по Ляпунову.

в) при $k_1 > 0$, $k_2 < 0$ точка покоя тоже неустойчива, так как движущаяся по траектории $x = c_1 a_1 e^{k_1 t}, y = c_1 a_2 e^{k_1 t}$ точка с возрастанием $t$ выходит из ε – окрестности начала координат. Точка покоя рассматриваемого типа называется **седлом**.

2) $k_{1,2} = p \pm qi$. Тогда общее решение системы (24.9) можно представить в виде

$$\begin{cases} x = e^{pt}(c_1 \cos qt + c_2 \sin qt) \\ y = e^{pt}(\tilde{c}_1 \cos qt + \tilde{c}_2 \sin qt) \end{cases}, \text{ где } \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \text{ - линейные комбинации произвольных}$$

постоянных $c_1$, $c_2$. При этом возможны следующие случаи:

а) $p < 0$, $q \neq 0$. Тогда $e^{pt} \to 0$ при $t \to \infty$, а тригонометрические функции являются ограниченными. Поэтому фазовые траектории являются спиралями, асимптотически приближающимися при $t \to \infty$ к началу координат. Таким образом, точка покоя асимптотически устойчива. Она называется **устойчивым фокусом**.

б) $p > 0$, $q \neq 0$. Изменяется направление движения по фазовым траекториям, следовательно, точки удаляются от начала координат и точка покоя неустойчива – **неустойчивый фокус**.

в) $p = 0$. Траекториями являются замкнутые кривые, окружающие точку покоя, называемую в этом случае **центром**. Такая точка покоя устойчива, так как можно подобрать такое δ, что замкнутые траектории, начальные точки которых лежат в δ – окрестности начала координат, не выходят за пределы ε – окрестности начала координат ($x^2(t) + y^2(t) < \varepsilon^2$).

*3)* Корни кратны: $k_1 = k_2$.

а) $k_1 = k_2 < 0$. Тогда общее решение $\begin{cases} x(t) = (c_1 a_1 + c_2 b_2 t)e^{k_1 t} \\ y(t) = (c_1 a_2 + c_2 b_2 t)e^{k_1 t} \end{cases}$ стремится к нулю при $t \to \infty$, и точка покоя вновь называется **устойчивым узлом**. При $b_1 = b_2 = 0$ получаем частный случай устойчивого узла – так называемый **дикритический узел**.

б) $k_1 = k_2 > 0$. Направление движения по траекториям меняется - **неустойчивый узел**.