Лекция 7.

Комплексные числа, их изображение на плоскости. Алгебраические операции над комплексными числами. Комплексное сопряжение. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы комплексного числа. Корни из комплексных чисел. Показательная функция комплексного аргумента. Формула Эйлера. Показательная форма комплексного числа.

При изучении одного из основных приемов интегрирования: интегрирования рациональных дробей – требуется для проведения строгих доказательств рассматривать многочлены в комплексной области. Поэтому изучим предварительно некоторые свойства комплексных чисел и операций над ними.

Определение 7.1. **Комплексным числом** z называется упорядоченная пара действительных чисел (a,b) : $z = (a,b)$ (термин «упорядоченная» означает, что в записи комплексного числа важен порядок чисел a и b: $(a,b)\neq(b,a)$). При этом первое число a называется **действительной частью** комплексного числа z и обозначается $a = \operatorname{Re} z$, а второе число b называется **мнимой частью** z: $b = \operatorname{Im} z$.

Определение 7.2. Два комплексных числа $z_1 = (a_1 , b_1)$ и $z_2 = (a_2 , b_2)$ **равны** тогда и только тогда, когда у них равны действительные и мнимые части, то есть $a_1 = a_2, b_1 = b_2$.

Действия над комплексными числами.

1. **Суммой** комплексных чисел $z_1 = (a_1 , b_1)$ и $z_2 = (a_2 , b_2)$ называется комплексное число $z = (a,b)$ такое, что $a = a_1 + a_2$, $b = b_1 + b_2$.
   Свойства сложения: а) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; б) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
   в) существует комплексное число $0 = (0,0)$: $z + 0 = z$ для любого комплексного числа z.
2. **Произведением** комплексных чисел $z_1 = (a_1 , b_1)$ и $z_2 = (a_2 , b_2)$ называется комплексное число $z = (a,b)$ такое, что $a = a_1a_2 – b_1b_2$, $b = a_1b_2 + a_2b_1$.
   Свойства умножения: а) $z_1z_2 = z_2z_1$; б) $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$, в) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

   Замечание. Подмножеством множества комплексных чисел является множество действительных чисел, определяемых как комплексные числа вида $(a,0)$. Можно убедиться, что при этом определение операций над комплексными числами сохраняет известные правила соответствующих операций над действительными числами. Кроме того, действительное число $1 = (1,0)$ сохраняет свое свойство при умножении на любое комплексное число: $1\cdot z = z$.

   Определение 7.3. Комплексное число $(0, b)$ называется **чисто мнимым** . В частности, число $(0,1)$ называют **мнимой единицей** и обозначают символом i.

   Свойства мнимой единицы:

   1) $i\cdot i=i^2 = -1$; 2) чисто мнимое число $(0,b)$ можно представить как произведение действительного числа $(b,0)$ и i : $(b,0) = b\cdot i$.

Следовательно, любое комплексное число $z = (a,b)$ можно представить в виде: $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib$.

Определение 7.4. Запись вида $z = a + ib$ называют **алгебраической формой** записи комплексного числа.

Замечание. Алгебраическая запись комплексных чисел позволяет производить операции над ними по обычным правилам алгебры.

Определение 7.5. Комплексное число $\bar{z} = a - ib$ называется **комплексно сопряженным** числу $z = a + ib$.

3. **Вычитание** комплексных чисел определяется как операция, обратная сложению: $z = (a,b)$ называется разностью комплексных чисел $z_1 = (a_1 , b_1)$ и $z_2 = (a_2 , b_2)$, если $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$.
4. **Деление** комплексных чисел определяется как операция, обратная умножению: число $z = a + ib$ называется частным от деления $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ ($z_2 \neq 0$), если $z_1 = z \cdot z_2$. Следовательно, действительную и мнимую части частного можно найти из решения системы уравнений: $a_2 a - b_2 b = a_1$, $b_2 a + a_2 b = b_1$.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел.

Комплексное число $z = (a,b)$ можно представить в виде точки на плоскости с координатами (a,b) или вектора с началом в начале координат и концом в точке (a,b).

При этом модуль полученного вектора называется **модулем** комплексного числа, а угол, образованный вектором с положительным направлением оси абсцисс,- **аргументом** числа. Учитывая, что $a = \rho \cos \varphi$, $b = \rho \sin \varphi$, где $\rho = | z |$ - модуль z, а $\varphi = \arg z$ – его аргумент, можно получить еще одну форму записи комплексного числа:

Определение 7.6. Запись вида

$$z = \rho (\cos \varphi + i \sin \varphi) \qquad (7.1)$$

называется **тригонометрической формой** записи комплексного числа.

В свою очередь, модуль и аргумент комплексного числа можно выразить через *a* и *b*:
$r = \sqrt{a^2 + b^2}, tg j = \dfrac{b}{a}$. Следовательно, аргумент комплексного числа определен не однозначно, а с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Легко убедиться, что операция сложения комплексных чисел соответствует операции сложения векторов. Рассмотрим геометрическую интерпретацию умножения. Пусть $z_1 = r_1(\cos j_1 + i \sin j_1), z_2 = r_2(\cos j_2 + i \sin j_2)$, тогда $z = z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos j_1 + i \sin j_1) \cdot$
$\cdot r_2(\cos j_2 + i \sin j_2) = r_1 r_2((\cos j_1 \cos j_2 - \sin j_1 \sin j_2) + i(\sin j_1 \cos j_2 + \cos j_1 \sin j_2)) =$
$r_1 r_2(\cos(j_1 + j_2) + i \sin(j_1 + j_2))$.
Следовательно, модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент – сумме их аргументов. Соответственно, при делении модуль частного равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент – разности их аргументов.
Частным случаем операции умножения является возведение в степень:

$$z^n = r^n(\cos nj + i \sin nj) \qquad (7.2)$$

- формула Муавра.
Используя полученные соотношения, перечислим основные свойства комплексно сопряженных чисел:

1. $|\bar{z}| = |z|, \arg \bar{z} = -\arg z$.
2. $z\bar{z} = |z|^2$.
3. $\bar{\bar{z}} = z$.
4. $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
5. $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.
6. $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.
7. $\overline{(z_1 / z_2)} = \bar{z}_1 / \bar{z}_2$.

Извлечение корня из комплексного числа.

Определение 7.7. Комплексное число $z_1 = \sqrt[n]{z}$ называется **корнем *n*-й степени** из z, если $z = z_1^n$.

Из определения следует, что $r_1 = \sqrt[n]{r}, \varphi_1 = \dfrac{\varphi}{n}$. Так как аргумент комплексного числа определен не однозначно, можно получить n различных значений для аргумента z_1:

$\varphi_k = \dfrac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}$, где φ_0 – одно из значений arg z, а k = 1, 2,…, n-1. Окончательно формулу, задающую все значения $\sqrt[n]{z}$, можно записать в виде:

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2\pi k}{n}\right), k = 1,2,...,n-1. \qquad (7.3)$$

Пример. Число z = 16 можно представить в тригонометрической форме следующим образом: z = 16(cos0 + $i$sin0). Найдем все значения $\sqrt[4]{16}$:

$$z_0 = 2(\cos 0 + i\sin 0) = 2, z_1 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 2i, z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2,$$

$$z_3 = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = -2i.$$

Показательная форма комплексного числа.

Введем еще одну форму записи комплексного числа. На множестве комплексных чисел существует связь между тригонометрическими и показательными функциями, задаваемая **формулой Эйлера**:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (7.4)$$

справедливость которой будет доказана в дальнейшем. Используя эту формулу, можно получить из (7.1) еще один вид комплексного числа: $z = re^{i\varphi}$ (7.5)

Определение 7.8. Запись вида (7.5) называется **показательной формой** записи комплексного числа.

Представление (7.5) позволяет легко интерпретировать с геометрической точки зрения операции умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня, используя известные свойства показательной функции.

Лекция 8.

Многочлены и их корни. Теорема Безу. Основная теорема алгебры. Разложение многочлена на линейные множители в поле комплексных чисел. Простые и кратные корни многочлена. Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители. Рациональные функции. Деление многочленов, выделение целой части рациональной функции. Правильные рациональные функции, их разложение на простейшие.

Рассмотрим в комплексной области **многочлен**, то есть функцию вида

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0, \qquad (8.1)$$

где $a_0, a_1, ..., a_n, z$ - комплексные числа. Числа $a_0, a_1, ..., a_n$ называются **коэффициентами** многочлена, а натуральное число n – его **степенью.**

Определение 8.1. Два многочлена $P_n(z)$ и $Q_m(z) = b_m z^m + \ldots + b_1 z + b_0$ **равны** тогда и только тогда, когда $m=n$, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$,…, $a_n = b_n$.

Определение 8.2. Число z_0 называется **корнем многочлена** (8.1), если $P_n(z_0) = 0$.

Теорема 8.1 (теорема Безу). Остаток от деления многочлена $P_n(z)$ на $z - z_0$ (z_0 – не обязательно корень многочлена) равен $P(z_0)$.
Доказательство. Разделив $P(z)$ на $z - z_0$, получим: $P(z) = Q(z)(z - z_0) + r$, где число r – остаток от деления, а $Q(z)$ – многочлен степени, меньшей n. При подстановке в это равенство $z = z_0$ найдем, что $r = P(z_0)$, что и требовалось доказать.

Теорема 8.2 (основная теорема алгебры). Всякий многочлен в комплексной области имеет корень (без доказательства).

Разложение многочлена в комплексной области на линейные множители.

Пусть $P_n(z)$ – многочлен степени n, а z_1 – его корень. Тогда по теореме Безу $P_n(z)$ можно представить в виде:

$$P_n(z) = (z - z_1)\, Q_{n-1}(z),$$

где Q_{n-1} – многочлен степени $n - 1$. Если при этом $Q_{n-1}(z_1) = 0$, его вновь можно представить как $(z - z_1)Q_{n-2}(z)$, а $P_n(z) = (z - z_1)Q_{n-2}(z)$.

Определение 8.3. Натуральное число k_1 называется **кратностью** корня z_1 многочлена $P_n(z)$, если этот многочлен делится на $(z - z_1)^{k_1}$, но не делится на $(z - z_1)^{k_1+1}$. Корень кратности 1 называется **простым,** а корень кратности, большей 1, - **кратным**.

Итак, если z_1 – корень P_n кратности k_1 , то $P_n(z) = (z - z_1)^{k_1} Q_{n-k_1}(z), Q_{n-k_1}(z_1) \neq 0.$ Из основной теоремы алгебры следует, что многочлен $Q_{n-k_1}(z)$ тоже имеет корень. Обозначим его z_2 , а его кратность k_2 . Тогда $Q_{n-k_1}(z) = (z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z)$, а

$$P_n(z) = (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} Q_{n-k_1-k_2}(z) = \ldots = a_n (z - z_1)^{k_1}(z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_N)^{k_N}, \qquad (8.2)$$

где $z_i \neq z_j, k_1 + k_2 + \ldots + k_N = n.$ Следовательно, в комплексной области всякий многочлен можно разложить на линейные множители.

Разложение многочлена с действительными коэффициентами на линейные и квадратичные множители.

Определим для $P_n(z)$ многочлен $\bar{P}_n(z) = \bar{a}_n z^n + \ldots + \bar{a}_1 z + \bar{a}_0$, где $\bar{a}_i$ - число, комплексно сопряженное коэффициенту a_i . При этом $\overline{P_n(z)} = \bar{P}_n(\bar{z})$. Следовательно, если z_0 – корень P_n , то $\bar{z}_0$ - корень $\bar{P}_n$. Если коэффициенты P_n – действительные числа, то $\bar{P}_n(z) = P_n(z)$, и если $z_0 = a + ib$ – его корень кратности k, то $\bar{z}_0 = a - ib$ - тоже его корень, причем той же кратности. Но $(x - z_0)(x - \bar{z}_0) = (x - a - ib)(x - a + ib) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q$ - квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом. Если теперь применить к многочлену с действительными коэффициентами от действительной переменной $P_n(x)$ формулу (8.2), то

$$P_n(x) = a_n (x - x_1)^{k_1}(x - x_2)^{k_2} \ldots (x - x_r)^{k_r}(x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} \ldots (x^2 + p_s x + q_s)^{m_s} \qquad (8.3)$$

то есть **всякий многочлен на множестве действительных чисел можно разложить на множители степени не выше второй**.

Рациональные дроби.

Если *P(z)* и *Q(z)* – многочлены в комплексной области, то $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ - рациональная дробь. Она называется **правильной**, если степень *P(z)* меньше степени *Q(z)*, и **неправильной**, если степень *P* не меньше степени *Q*. Любую неправильную дробь можно представить в виде: $\dfrac{P(z)}{Q(z)} = S(z) + \dfrac{R(z)}{Q(z)}$, где *P(z) = Q(z) S(z) + R(z),* а *R(z)* – многочлен, степень которого меньше степени *Q(z).* Таким образом, интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию многочленов, то есть степенных функций, и правильных дробей, так как $\dfrac{R(z)}{Q(z)}$ является правильной дробью.

Лемма 1. Если $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ - правильная рациональная дробь и z_0 – корень ее знаменателя кратности k, т.е. $Q(z) = (z - z_0)^k Q_1(z), Q_1(z) \neq 0,$ то существуют число А и многочлен $P_1(z)$ такие, что

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{A}{(z - z_0)^k} + \frac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q_1(z)}, \tag{8.4}$$

где последнее слагаемое является правильной дробью.

Доказательство.

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} = \frac{A}{(z - z_0)^k} + \left(\frac{P(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} - \frac{A}{(z - z_0)^k} \right) = \frac{A}{(z - z_0)^k} + \frac{P(z) - AQ_1(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)}.$$

При этом последнее слагаемое является правильной дробью. Выберем число А так, чтобы z_0 было корнем многочлена $P(z) - AQ_1(z)$, то есть $A = \dfrac{P(z_0)}{Q(z_0)}$. Тогда по теореме Безу

$\dfrac{P(z) - AQ_1(z)}{(z - z_0)^k Q_1(z)} = \dfrac{P_1(z)}{(z - z_0)^{k-1} Q_1(z)}$. Лемма доказана.

Замечание. Если коэффициенты многочленов *P* и *Q* и выбранный корень знаменателя – действительные числа, то и коэффициенты многочленов P_1 и Q_1 – тоже действительные числа.

Теорема 8.3. Если $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ - правильная рациональная дробь и $Q(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \ldots (z - z_N)^{k_N}$, то существуют такие комплексные числа $A_j^{(1)}, A_j^{(2)}, \ldots, A_j^{k_j}$, $j = 1,2,\ldots,N,$ что

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{N} \left(\frac{A_j^{(1)}}{z - z_j} + \frac{A_j^{(2)}}{(z - z_j)^2} + \ldots + \frac{A_j^{(k_j)}}{(z - z_j)^{k_j}} \right). \tag{8.5}$$

Доказательство.

Применив k_1 раз лемму 1 к дроби $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, получим:

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\frac{A_1^{(k_1)}}{(z-z_1)^{k_1}}+\frac{A_1^{(k_1-1)}}{(z-z_1)^{k_1-1}}+\ldots+\frac{A_1^{(1)}}{z-z_1}+\frac{P^*(z)}{Q^*(z)},\text{ где } Q^*(z)=(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_N)^{k_N}.$$

Применяя затем ту же лемму к остальным корням знаменателя, придем к формуле (8.5).

Лемма 2. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами, причем $Q(x) = (x^2 + px + q)^m Q_1(x)$, где $p^2 - 4q < 0$. Тогда существуют такие действительные числа B, C и многочлен с действительными коэффициентами $P_1(x)$, что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P_1(x)}{(x^2+px+q)^{m-1}Q_1(x)}, \tag{8.6}$$

где последнее слагаемое тоже является правильной дробью.

Доказательство.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}=\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}+\left(\frac{P(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}-\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}\right)=$$
$$=\frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m}+\frac{P(x)-(Bx+C)Q_1(x)}{(x^2+px+q)^m Q_1(x)}, \tag{8.7}$$

где последнее слагаемое является правильной дробью. Выберем B и C такими, чтобы число $z_0 = x_0 + iy_0$ (корень многочлена $z^2 + pz + q$) было корнем многочлена $P(x)$-$(Bx+C)Q_1(x)$. Можно показать, что при этом $B=\frac{b}{y_0}, C=a-\frac{x_0}{y_0}b,$ где $a+ib=\frac{P(z_0)}{Q(z_0)}$.

Следовательно, B и C – действительные числа, а z_0 и $\bar{z}_0$ (число, комплексно сопряженное z_0) – корни многочлена $P(x)$-$(Bx+C)Q_1(x)$. Тогда по теореме Безу он делится на $(x-z_0)(x-\bar{z}_0)=x^2+px+q$. Поэтому последнюю дробь в равенстве (8.7) можно сократить на $x^2 + px + q$ и получить равенство (8.6).

Используя эту лемму, можно доказать следующую теорему:

Теорема 8.4. Если $\frac{P(x)}{Q(x)}$ - правильная рациональная дробь, а $Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{m_1}\ldots(x^2+p_sx+q_s)^{m_s}$, где $p_i^{\,2}-4q_i<0$, то существуют такие действительные числа $A_j^{(1)},A_j^{(2)},\ldots,A_j^{(k_j)}, j=1,2,\ldots,r; B_i^{(1)},B_i^{(2)},\ldots,B_i^{(m_i)}$, $C_i^{(1)},C_i^{(2)},\ldots,C_i^{(m_i)}, i=1,2,\ldots,s,$ что

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{A_j^{(1)}}{x-x_j}+\ldots+\frac{A_j^{(k_j)}}{(x-x_j)^{k_j}}\right)+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{B_i^{(1)}x+C_i^{(1)}}{x^2+p_ix+q_i}+\ldots+\frac{B_i^{(m_i)}x+C_i^{(m_i)}}{(x^2+p_ix+q_i)^{m_i}}\right). \tag{8.8}$$

Примеры.

1. $\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{(x+2)(x+3)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}=\frac{Ax+3A+Bx+2B}{(x+2)(x+3)}=\frac{(A+B)x+(3A+2B)}{(x+2)(x+3)}$.

Полученная дробь должна совпадать с исходной при любых x, следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях обеих дробей должны быть равными. Отсюда $\begin{cases} A+B=0 \\ 3A+2B=1 \end{cases}$, то есть A = 1, B = -1. Следовательно, исходную дробь, знаменатель которой имеет только действительные корни (причем простые, то есть кратности 1) можно представить в виде: $\frac{1}{x^2+5x+6}=\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$.

2.
$$\frac{4x^3+4x^2+2x-24}{x^4+2x^3+8x^2}=\frac{4x^3+4x^2+2x-24}{x^2(x^2+2x+8)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+8}=$$
$$=\frac{Ax^3+2Ax^2+8Ax+Bx^2+2Bx+8B+Cx^3+Dx^2}{x^2(x^2+2x+8)}=\frac{(A+C)x^3+(2A+B+D)x^2+(8A+2B)x+8B}{x^2(x^2+2x+8)}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях, получаем:
$$\begin{cases} A+C=4 \\ 2A+B+D=4 \\ 8A+2B=2 \\ 8B=-24 \end{cases}$$
, откуда A = 1, B = -3, C = 3, D = 5. Таким образом, данную дробь, знаменатель которой имеет действительный корень $x = 0$ кратности 2 и комплексно сопряженные корни $-1\pm i\sqrt{7}$, преобразуем в сумму дробей:
$$\frac{4x^3+4x^2+2x-24}{x^4+2x^3+8x^2}=\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2x+5}{x^2+2x+8}.$$

Лекция 9. Интегрирование простейших и произвольных правильных дробей. Интегрирование произвольных рациональных функций. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

В пошлой лекции было показано, что любую правильную рациональную дробь можно представить в виде линейной комбинации дробей вида:

$$1)\ \frac{A}{x-a},\quad 2)\ \frac{A}{(x-a)^n},\quad 3)\ \frac{Ax+B}{x^2+px+q},\quad 4)\ \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}\qquad (p^2-4q<0). \quad (9.1)$$

Эти дроби называются **простейшими** (или элементарными) **дробями**. Выясним, каким образом они интегрируются.

1) $\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{1}{x-a}d(x-a)=A\ln|x-a|+C.$

2) $\int\frac{A}{(x-a)^n}dx=A\int(x-a)^{-n}d(x-a)=\frac{A(x-a)^{-n+1}}{-n+1}+C=-\frac{A(n-1)}{(x-a)^{n-1}}+C.$ (9.2)

3) $\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+\frac{p^2}{4})+q-\frac{p^2}{4}}dx=\int\frac{A(x+\frac{p}{2})+B+A\frac{p}{2}}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}d(x+\frac{p}{2}).$ (9.3)

Сделаем замену $t=x+\frac{p}{2}$ и обозначим $B+A\frac{p}{2}=\tilde{B}, q-\frac{p^2}{4}=c^2$. Тогда требуется вычислить интеграл
$$\int\frac{At+\tilde{B}}{t^2+c^2}dt=\frac{A}{2}\int\frac{2tdt}{t^2+c^2}+\tilde{B}\int\frac{1}{t^2+c^2}dt=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+c^2)}{t^2+c^2}+\tilde{B}\int\frac{1}{t^2+c^2}dt=$$

$$=\frac{A}{2}\ln(t^2+c^2)+\frac{\widetilde{B}}{c}arctg\frac{t}{c}+C=\frac{A}{2}\ln(x^2+px+q)+\frac{\widetilde{B}}{c}arctg\frac{2x-p}{2c}+C. \qquad (9.4)$$

4) При интегрировании простейших дробей последнего типа воспользуемся той же заменой, что и в предыдущем случае, и представим подынтегральное выражение в виде:

$\int\frac{At+\widetilde{B}}{(t^2+c^2)^n}dt=\frac{A}{2}\int\frac{d(t^2+c^2)}{(t^2+c^2)^n}+\widetilde{B}\int\frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt=\frac{A}{2}\frac{(t^2+c^2)^{-n+1}}{-n+1}+\widetilde{B}\cdot I_n$, где

$I_n=\int\frac{1}{(t^2+c^2)^n}dt$. Рассмотрим отдельно способ интегрирования I_n.

$$I_n=\frac{1}{c^2}\int\frac{t^2+c^2-t^2}{(t^2+c^2)^n}dt=\frac{1}{c^2}\int\frac{1}{(t^2+c^2)^{n-1}}dt-\frac{1}{c^2}\int t\frac{tdt}{(t^2+c^2)^n}dt=$$

$$=\frac{1}{c^2}I_{n-1}+\frac{1}{2c^2(n-1)}\int td(t^2+c^2)^{-n+1}=\frac{1}{c^2}I_{n-1}+\frac{1}{2c^2(n-1)}\left(\frac{t}{(t^2+c^2)^{n-1}}-\int\frac{1}{(t^2+c^2)^{n-1}}dt\right)=$$

$$=\frac{t}{2c^2(n-1)(t^2+c^2)^{n-1}}+\frac{1}{c^2}\left(1-\frac{1}{2(n-1)}\right)I_{n-1}\ . \qquad (9.5)$$

Таким образом, получена рекуррентная формула, позволяющая в конечном счете свести вычисление этого интеграла к $I_1=\int\frac{1}{t^2+c^2}dt=\frac{1}{c}arctg\frac{t}{c}+C.$

Итак, **интеграл от любой простейшей дроби находится в явном виде и является элементарной функцией**.

Теорема 9.1. Неопределенный интеграл от любой рациональной дроби на всяком промежутке, на котором ее знаменатель не равен нулю, существует и выражается через элементарные функции, а именно рациональные дроби, логарифмы и арктангенсы.
Доказательство.

Представим рациональную дробь $\frac{P(z)}{Q(z)}$ в виде: $\frac{P(z)}{Q(z)}=S(z)+\frac{R(z)}{Q(z)}$ (см. лекцию 8). При этом последнее слагаемое является правильной дробью, и по теореме 8.4 ее можно представить в виде линейной комбинации простейших дробей. Таким образом, интегрирование рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена *S(x)* и простейших дробей, первообразные которых, как было показано, имеют вид, указанный в теореме.

Замечание. Основную трудность при этом составляет разложение знаменателя на множители, то есть поиск всех его корней.

Пример.

$$\int\frac{x^4+6x^3+12x^2+2x-24}{x^4+2x^3+8x^2}dx=\int(1+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{2x+5}{x^2+2x+8})dx=x+\ln|x|+\frac{3}{x}+\int\frac{2x+5}{x^2+2x+8}dx=$$

$$=x+\ln|x|+\frac{3}{x}+\int\frac{2(x+1)+3}{(x+1)^2+7}d(x+1)=x+\ln|x|+\frac{3}{x}+\int\frac{2(x+1)d(x+1)}{(x+1)^2+7}+3\int\frac{1}{(x+1)^2+7}d(x+1)=$$

$$=x+\ln|x|+\frac{3}{x}+3\ln(x^2+2x+8)+\frac{3}{\sqrt{7}}arctg\frac{x+1}{\sqrt{7}}+C.$$

Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Из ранее доказанного следует, что любую рациональную дробь можно проинтегрировать, поэтому в дальнейшем будем считать задачу интегрирования функции выполненной, если удается представить эту функцию в виде рациональной дроби. В частности, для интегралов вида $\int R\left(x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1},...,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_n}\right)dx$, где R – рациональная функция (многочлен или рациональная дробь), r_1 ,…,r_n – дроби с одним и тем же знаменателем m $\left(r_1=\frac{p_1}{m},...,r_n=\frac{p_n}{m}\right)$, а $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$, замена $t^m=\frac{ax+b}{cx+d}$ приводит к $x=\frac{dt^m-b}{a-ct^m}$. Таким образом, x является рациональной функцией t, следовательно, его производная тоже будет рациональной функцией. Кроме того, $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_i}=t^{p_i}$ - тоже рациональные функции от t (так как p_i – целое число). Поэтому после замены подынтегральное выражение примет вид $R_1(t)dt$, где R_1 – рациональная функция, интегрируемая описанными выше способами.

Замечание. С помощью подобных замен можно интегрировать функции вида $R(x,(ax+b)^{r_1},...,(ax+b)^{r_n})$, и, в частности, $R(x,x^{r_1},...,x^{r_n})$.

Примеры.

1. $\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx.$ Сделаем замену $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$, тогда $x=\frac{t^2+1}{t^2-1}$, а $dx=\frac{-4tdt}{(t^2-1)^2}$. Следовательно,

$$\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx=\int\frac{-4t^2dt}{(t^2-1)^2}=\int\left(-\frac{1}{t-1}-\frac{1}{(t-1)^2}+\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right)dt=\ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right|+\frac{1}{t+1}+\frac{1}{t-1}+C=$$

$$=\ln\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}+1}+\frac{1}{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1}+C.$$

2. $\int\frac{x+\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx$. Так как $\sqrt{x-2}=(x-2)^{\frac{1}{2}}=(x-2)^{\frac{3}{6}}$, а $\sqrt[3]{x-2}=(x-2)^{\frac{1}{3}}=(x-2)^{\frac{2}{6}}$, выберем в качестве новой переменной $t=(x-2)^{\frac{1}{6}}$. Тогда $x=t^6+2, dx=6t^5dt$. Поэтому

$$\int\frac{x+\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}}dx=\int\frac{(t^6+2+t^3)6t^5dt}{t^2}=6\int(t^9+t^6+2t^3)dt=\frac{3}{5}t^{10}+\frac{6}{7}t^7+3t^4+C=$$

$$=\frac{3}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}}+\frac{6}{7}(x-2)^{\frac{7}{6}}+3(x-2)^{\frac{2}{3}}+C.$$

Лекция 10. Интегрирование рациональных тригонометрических выражений. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Интегрируемость в элементарных функциях.

Рассмотрим интегрирование некоторых тригонометрических выражений.

1. **Интегралы вида** $\int \sin ax\cos bx dx, \int \sin ax \sin bx dx, \int \cos ax\cos bx dx$ вычисляются с применением формул

$$\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) \qquad (10.1)$$

$$\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x)$$

Пример. $\int \sin 5x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 8x dx + \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$

2. **Интегралы вида** $\int \sin^n x\cos^m x dx$**,** где m и n – целые числа, интегрируются с помощью замен:

а) если хотя бы одно из чисел m,n – нечетное (например, m), можно сделать замену $t = \sin x$ (или $t = \cos x$ при нечетном n).

Пример 1. $\int \sin^4 x\cos^3 x dx = \int \sin^4 x\cos^2 x\cos x dx = \int \sin^4 x(1-\sin^2 x) d\sin x =$

$$= \int t^4(1-t^2)dt = \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + C = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\sin x dx = -\int \frac{\cos^2 x}{(1-\cos^2 x)^2} d\cos x = -\int \frac{t^2}{(1-t)^2(1+t)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-t} - \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(-\ln|1-t| - \frac{1}{1-t} + \ln|1+t| + \frac{1}{1+t}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{1-\cos x} + \ln\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right) + C.$$

б) если m и n – четные положительные числа, можно понизить степени тригонометрических функций с помощью формул

$$\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}, \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}.$$

Пример.

$$\int \sin^8 x dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^4 dx = \frac{1}{16}\int\left(1 + 4\cos 2x + 6\cos^2 2x + 4\cos^3 2x + \cos^4 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x + 2\sin 2x + 6\int \frac{1+\cos 4x}{2}dx + 2\int(1-\sin^2 2x) d\sin 2x + \int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)^2 dx\right) =$$

$$= \frac{x}{16} + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{3}{16}x + \frac{3}{64}\sin 4x + \frac{1}{8}\sin 2x - \frac{2}{48}\sin^3 2x + \frac{1}{64}\int(1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x)dx =$$

$$= \frac{17}{64}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^3 2x + \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{128}\int(1+\cos 8x)dx = \frac{35}{128}x + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin^2 2x +$$

$$+ \frac{7}{128}\sin 4x + \frac{1}{1024}\sin 8x + C.$$

в) если m и n – четные и хотя бы одно из них отрицательно, можно применить замену $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$.

Пример.

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^8 x}dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\frac{1}{\cos^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x} = \int tg^2 x(1+tg^2 x)^2 dtgx = \int (t^2+2t^4+t^6)dt =$$

$$= \frac{t^3}{3}+\frac{2t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C = \frac{1}{3}tg^3 x+\frac{2}{5}tg^5 x+\frac{1}{7}tg^7 x+C.$$

3. **Интегралы вида** $\int R(\sin x, \cos x)dx,$ где R – рациональная функция, сводятся к интегралам от рациональных функций с помощью универсальной тригонометрической подстановки: $t = tg\frac{x}{2}$, тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2arctgt, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad (10.2)$$

то есть все составляющие подынтегрального выражения представляют собой рациональные функции от t.

Пример. $\int \frac{1}{1-\sin x}dx = 2\int \frac{dt}{\left(1-\frac{2t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = 2\int \frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{2}{1-t}+C = \frac{2}{1-tg\frac{x}{2}}+C.$

Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin^2 x, \cos^2 x)$, можно выбрать замену t = tg x. При этом $\sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}, x = arctgt, dx = \frac{dt}{1+t^2}$, (10.3)

и степень полученной рациональной функции будет ниже, чем при универсальной тригонометрической подстановке, что облегчает дальнейшее интегрирование.

Пример.

$$\int \frac{1}{\sin^2 x - 4\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\frac{t^2}{1+t^2}-\frac{4}{1+t^2}}\frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{1}{t^2-4}dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|t-2| - \ln|t+2|\right)+C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+2}\right|+C.$$

Интегрирование квадратичных иррациональностей.

При вычислении интегралов $\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx, \int R(x, \sqrt{x^2 \pm a^2})dx$ свести подынтегральную функцию к рациональной помогают замены:

а) $x = a\sin t,$ при этом $\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t} = a\cos t;$ $dx = a\cos t\, dt,$ $t = \arcsin\frac{x}{a}$.

б) $x = a$ tg t, тогда $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2(1+tg^2 t)} = \frac{a}{\cos t}; dx = \frac{adt}{\cos^2 t}$, $t = arctg\frac{x}{a}$.

в) $x = \frac{a}{\sin t}$, соответственно $\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2 t}-a^2} = \sqrt{\frac{a^2(1-\sin^2 t)}{\sin^2 t}} = \frac{a\cos t}{\sin t};$

$dx = -\frac{a\cos tdt}{\sin^2 t}, t = \arcsin\frac{a}{x}.$

Пример 1. Вычислим интеграл $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx.$ Пусть $x = 2\sin t,$ тогда

$$\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = \int 4\sin^2 t\cdot 2\cos t\cdot 2\cos tdt = 4\int \sin^2 2tdt = 2\int(1-\cos 4t)dt = 2t - \frac{1}{2}\sin 4t + C =$$

$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin(4\arcsin\frac{x}{2}) + C.$ Заметим, что $\sin 4t = 2\sin 2t\cos 2t = 4\sin t\cos t\cos 2t =$

$= 4\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}(1-2\sin^2 t) = 2x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}(1-\frac{x^2}{2}) = \frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{2}$. Поэтому ответ можно представить в виде: $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}{4} + C.$

Пример 2. Для вычисления интеграла $\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx$ выберем замену $x = 3\text{tg } t$. При этом

$$\int\frac{\sqrt{x^2+9}}{x^2}dx = \int\frac{3}{\cos t\cdot 9tg^2 t}\frac{3dt}{\cos^2 t} = \int\frac{1}{\cos t\sin^2 t}dt = \int\frac{d\sin t}{\sin^2 t(1-\sin^2 t)} = \int\frac{du}{u^2(1-u)(1+u)},$$

где $u = \sin t$. Представив подынтегральную функцию в виде суммы простейших дробей, получим: $\int\frac{du}{u^2(1-u)(1+u)} = \int\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{2(1-u)}+\frac{1}{2(1+u)}\right)dx = -\frac{1}{u}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + C =$

$= -\frac{1}{\sin t}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + C = -\frac{\sqrt{9+x^2}}{x}+\frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{9+x^2}+x}{\sqrt{9+x^2}-x} + C.$ (Учитываем, что $\sin t = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}$).

Пример 3. Вычислим интеграл $\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx$ с помощью замены $x = \frac{1}{\sin t}$. Тогда

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}dx = \int\frac{\sin^2 t\cdot\sin t}{\cos t}\frac{(-\cos t)dt}{\sin^2 t} = -\int\sin tdt = \cos t + C = \cos(\arcsin\frac{1}{x}) + C = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + C.$$

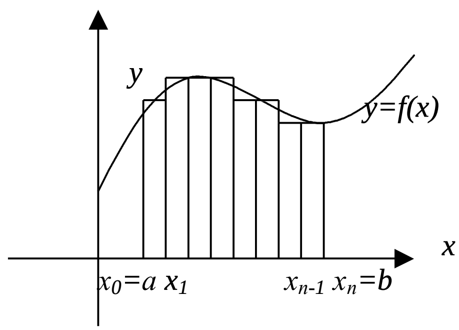
Интегрируемость в элементарных функциях.

В предыдущих лекциях рассмотрены методы интегрирования некоторых элементарных функций. Однако далеко не все элементарные функции интегрируемы, то есть имеют первообразные, также являющиеся элементарными функциями. В качестве примеров можно привести функции $e^{-x^2}, \sin x^2, \frac{\sin x}{x}, \frac{1}{\ln x}$ и другие. Этим операция интегрирования отличается от дифференцирования, при котором производная любой элементарной функции является тоже элементарной функцией. Для отыскания интегралов от функций, не имеющих элементарной первообразной, вводятся и используются новые классы функций, не являющихся элементарными.

Лекция 11.
Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его свойства. Теорема о среднем для определенного интеграла.

Для решения многих задач из различных областей науки и техники требуется применение **определенного интеграла**. К ним относятся вычисление площадей, длин дуг, объемов, работы, скорости, пути, моментов инерции и т.д. Определим это понятие. Рассмотрим отрезок $[a, b]$ оси Ox и определим понятие **разбиения** этого отрезка как множества точек x_i : $a=x_1 < x_2 <\ldots< x_{n-1} < x_n=b$. При этом точки x_i называются **точками**

.



разбиения, отрезки $[x_{i-1}, x_i]$ – **отрезками разбиения** (их длины обозначаются Δx_i), а число

$$|\,\tau\,| = \max\,(\,\Delta x_1, \Delta x_2,\ldots, \Delta x_n\,)$$

называется **мелкостью разбиения**.

Пусть на [a,b] задана функция $y = f(x)$. Выберем на каждом отрезке разбиения по точке ξ_i и составим сумму вида

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\ , \tag{11.1}$$

называемую **интегральной суммой** функции $f(x)$. Если $f(x) > 0$, такая сумма равна сумме площадей прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\xi_i\,)$.

Определение 11.1. Если для любого разбиения отрезка $[a, b]$ существует один и тот же конечный предел интегральных сумм при $n \to \infty$ и $|\,t\,| \to 0$:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ |t|\to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = I\,, \tag{11.2}$$

то функция $f(x)$ называется **интегрируемой** на отрезке $[a, b\,]$, а число I называется **определенным интегралом** $f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается $I = \int_a^b f(x)dx.$ Числа a и b называются соответственно нижним и верхним пределами интегрирования.

Кроме того, определение определенного интеграла дополняется следующими утверждениями:

1) $\int_a^a f(x)dx = 0$,   2) $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$

Теорема 11.1 (необходимое условие интегрируемости). Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем.

Доказательство. Пусть $f\,(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b f(x)dx = I$. Зафиксируем какое-либо ε, например, $\varepsilon = 1$. По определению 11.1 существует такое $\delta > 0$, что для любой

интегральной суммы σ_τ, соответствующей разбиению, для которого $|\tau| < \delta$, верно неравенство $|\sigma_\tau - I| < 1$, откуда $I - 1 < \sigma_\tau < I + 1$, то есть множество интегральных сумм функции $f(x)$ ограничено.
Если предположить при этом, что $f(x)$ неограничена на [a,b], то она неограничена по крайней мере на одном из отрезков разбиения. Тогда произведение $f(\xi_i)\Delta x_i$ на этом отрезке может принимать сколь угодно большие значения, то есть интегральная сумма оказывается неограниченной, что противоречит условию интегрируемости $f(x)$.

Замечание. Условие ограниченности функции является необходимым, но не достаточным условием интегрируемости. В качестве примера рассмотрим функцию Дирихле $f(x) = 1$, если x рационально, и $f(x) = 0$, если x иррационально. Для нее на любом отрезке $[a,b]$ и при любом разбиении на каждом отрезке Δx_i найдутся как рациональные, так и иррациональные значения x. Выбрав в качестве ξ_i рациональные числа, для которых $f(\xi_i) = 1$, получим, что $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = b - a$. Если же считать, что ξ_i – иррациональные числа, то $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = 0$. Следовательно, предел интегральных сумм не существует, и функция Дирихле не интегрируема ни на каком отрезке.

Свойства определенного интеграла.

Сформулируем понятия верхней и нижней интегральных сумм. Пусть m_i – наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке Δx_i, а M_i – ее наибольшее значение на этом отрезке.

Определение 11.2. Сумма $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ называется **нижней интегральной суммой** функции $f(x)$ на $[a,b]$, а $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ **- верхней интегральной суммой**.

Свойства интегральных сумм.

1. Так как на любом отрезке разбиения $m_i \le M_i$, то $s_i \le S_i$.

2. Если m – наименьшее значение $f(x)$ на $[a,b]$, а M – ее наибольшее значение на $[a,b]$, то $m(b-a) \le s_n \le S_n \le M(b-a)$.

3. При добавлении к выбранному разбиению новых точек s_n может только возрастать, а S_n – только уменьшаться.
Доказательство.
Пусть отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ разбит на p отрезков. Обозначим нижнюю и верхнюю интегральные суммы на этих отрезках как s_p и S_p. Но для отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ наименьшим значением функции является $m_к$, а наибольшим – $M_к$. Следовательно, по свойству 2 $s_p \ge m_k \Delta x_k$ – соответствующему слагаемому общей интегральной суммы s, а $S_k \le M_k \Delta x_k$ – слагаемому верхней интегральной суммы. Таким образом, каждое слагаемое s может только увеличиваться при добавлении новых точек, а каждое слагаемое S – только уменьшаться, что и доказывает сформулированное утверждение.

4. Существуют $\lim_{n\to\infty} s = \bar{s}$ и $\lim_{n\to\infty} S = \bar{S}$.
Доказательство.

Из свойств 2 и 3 следует, что s ограничена ($s \le M(b-a)$) и монотонно возрастает. Следовательно, она имеет предел. Подобное же рассуждение справедливо для S.

5. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то $\bar{s} = \bar{S}$.
Доказательство.
Назовем **колебанием** функции $f(x)$ на отрезке Δx_k разность $\omega_k = M_k - m_k$. Тогда в силу непрерывности $f(x)$ $\forall e > 0 \exists d > 0 : w_k < e$ при $|t| < d$. Следовательно, $S - s < e(b-a)$, то есть $\lim_{n\to\infty}(S-s) = 0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Так как s и S можно считать частными случаями интегральных сумм функции $f(x)$, то $\bar{s} = \bar{S} = I = \int_a^b f(x)dx$.

6. Для любых двух разбиений данного отрезка τ_1 и τ_2 $s_{t_1} \le S_{t_2}$.
Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть разбиение, включающее все точки разбиений τ_1 и τ_2 , и воспользоваться свойствами 1 и 3.

Перечислим основные свойства определенного интеграла.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:
$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx .$$
Доказательство.

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |t|\to 0}} \sum_{i=1}^n Af(x_i)\Delta x_i = A \lim_{\substack{n\to\infty \\ |t|\to 0}} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x_i = A\int_a^b f(x)dx.$$

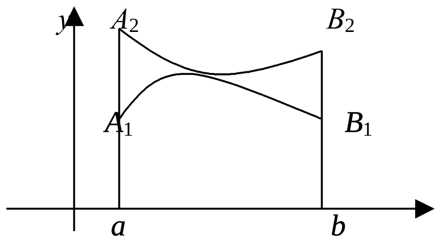
2. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx$.
Доказательство.

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |t|\to 0}} \sum_{i=1}^n (f_1(x_i) + f_2(x_i))\Delta x_i = \lim_{\substack{n\to\infty \\ |t|\to 0}} (\sum_{i=1}^n f_1(x_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^n f_2(x_i)\Delta x_i) =$$
$$= \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx .$$

3.Если на отрезке $[a,b]$ $(a<b)$ $f(x) \le g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство.
$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \lim_{\substack{|t|\to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^n (g(x_i) - f(x_i))\Delta x_i \ge 0$, так как

$g(x_i) - f(x_i) \ge 0, \Delta x_i \ge 0.$ Отсюда следует, что $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

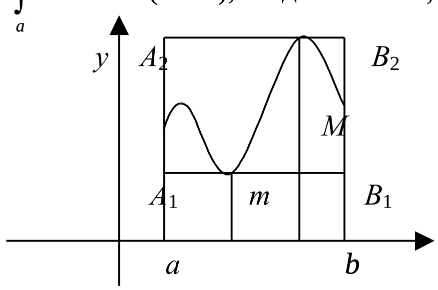


Геометрическая интерпретация:
площадь криволинейной трапеции aA_1B_1b не больше площади aA_2B_2b.

4. Если m и M – наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на отрезке $[a,b]$, $a \le b$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Доказательство.

Так как $m \le f(x) \le M$, по свойству 3 $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$. Но $\int_a^b mdx = m(b-a)$, $\int_a^b Mdx = M(b-a)$, следовательно, $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.



Геометрическая интерпретация:
площадь криволинейной трапеции содержится между площадями прямоугольников aA_1B_1b и aA_2B_2b.

5 (Теорема о среднем). Если функция *f(x)* непрерывна на отрезке $[a,b]$, то на этом отрезке найдется такая точка ξ, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x)$.

Доказательство.

Пусть $a < b$, m и M – наименьшее и наибольшее значения функции *f(x)* на $[a,b]$. Тогда по свойству 4 $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$. Тогда $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mathtt{m}$, $m \le \mathtt{m} \le M$. Так как *f(x)* непрерывна на $[a,b]$, она принимает на нем все промежуточные значения между m и M, то есть существует $x\,(a \le x \le b)$ такое, что $f(x) = \mathtt{m}$. Тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(x)$, что и требовалось доказать.

6. Для любых трех чисел a,b,c справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

если все эти интегралы существуют.

Доказательство.

Пусть $a < c < b$. Составим интегральную сумму так, чтобы точка c была точкой деления. Тогда $\sum_a^b f(x_i)\Delta x_i = \sum_a^c f(x_i)\Delta x_i + \sum_c^b f(x_i)\Delta x_i$. Переходя к пределу при $|t| \to 0$, получим доказательство свойства 6.

Если $a < b < c$, то по только что доказанному $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$, или

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$. Но $\int_b^c f(x)dx = -\int_c^b f(x)dx$, поэтому

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$. Аналогично доказывается это свойство и при любом другом расположении точек a, b и c.

Лекция 12.
Интегрируемость непрерывных, кусочно-непрерывных и монотонных ограниченных функций. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула Ньютона – Лейбница.

Теорема 12.1. Функция, непрерывная на отрезке, интегрируема на нем.
Доказательство.
Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она, во-первых, ограничена на нем, а во-вторых, равномерно непрерывна, то есть $\forall e > 0 \quad \exists d > 0$ такое, что $\forall x, x' \in [a,b]$, $|x - x'| < d, \quad |f(x) - f(x')| < e$. Тогда для разбиения, в котором $|t| < d$, колебание $w_i < e$, следовательно, $0 < S - s < e(b-a)$, и по свойству 5 верхних и нижних интегральных сумм получим, что существует $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема 12.2. Функция, монотонная на отрезке, интегрируема на нем.

Доказательство.
Пусть $f(x)$ возрастает на $[a,b]$. Тогда $\forall x \in [a,b] \quad f(a) \le f(x) \le f(b)$, то есть $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Кроме того, для любого интервала $[x_{i-1}, x_i]$ $m_i = f(x_{i-1}), M_i = f(x_i)$.

Следовательно, $S - s = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1}))\Delta x_i \le (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) -$ $- f(x_1) + ... + f(x_n) - f(x_{n-1}))|t| = (f(b) - f(a))|t|$. Поэтому $\lim_{|t|\to 0}(S - s) = 0$, следовательно, $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Замечание. В теореме 12.2 не требовалась непрерывность функции. Монотонная функция может быть и разрывной, при этом она является интегрируемой по теореме 12.2.

Теорема 12.3. Если $f(x)$ – непрерывная функция и $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$ то $\Phi'(x) = f(x)$.

(Производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которую вместо переменной интегрирования подставлено значение верхнего предела).
Доказательство.
Пусть Δx – приращение аргумента x. Тогда по свойству 6 определенного интеграла

$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt, \quad \Delta\Phi = \Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

По теореме о среднем (свойство 5) $\Delta\Phi = f(x)(x+\Delta x - x) = f(x)\Delta x$, где $x < x < x+\Delta x$.
Поэтому $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \dfrac{f(x)\Delta x}{\Delta x} = f(x)$. Следовательно, $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x)$. Но при $\Delta x \to 0$ $x \to x$, и вследствие непрерывности функции *f(x)* $\lim\limits_{\Delta x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to x} f(x) = f(x)$. Таким образом, $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 12.3 следует, что всякая непрерывная функция имеет первообразную, так как по теореме 12.1 она интегрируема, а по теореме 12.3 ее первообразной является $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$.

Теорема 12.4. Если *F(x)* является первообразной непрерывной функции *f(x),* то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,, \qquad (12.1)$$

называемая **формулой Ньютона – Лейбница**.

Доказательство.
По теореме 12.3 $\int\limits_a^x f(t)dt$ - первообразная функции *f(x),* поэтому *F(x)* и $\int\limits_a^x f(t)dt$ отличаются на постоянное слагаемое *C*. Следовательно, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C$. (12.2)

Пусть $x=a$, тогда из (12.2) получим $\int\limits_a^a f(t)dt = F(a) + C$, то есть $F(a) + C = 0$, откуда $C = -F(a)$. Тогда $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. Принимая в этом равенстве $x=b$, получим формулу Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Замечание. Обычно вводится обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, и формула (12.1) записывается так: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Примеры.

1. $\int\limits_1^e \dfrac{x-1}{x}dx = \int\limits_1^e\left(1-\dfrac{1}{x}\right)dx = \left(x - \ln|x|\right)\Big|_1^e = (e - \ln e) - (1 - \ln 1) = e - 1 - 1 + 0 = e - 2.$
2. $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\dfrac{1}{2} - \arcsin 0 = \dfrac{p}{6} - 0 = \dfrac{p}{6}.$